Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1919. Heft III
November- und Dezembersitzung

München 1919
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Zur Theorie der Planetenbahnen.

Von **F. Lindemann.**

Vorgetragen in der Sitzung am 6. Dezember 1919.

Die von Einstein entwickelte allgemeine Relativitätstheorie hat bekanntlich eine wesentliche Stütze dadurch erhalten, daß es ihm mittels derselben gelang[1]), die von Leverrier festgestellte Bewegung des Perihels der Merkurbahn theoretisch zu begründen.

Das Studium dieser Abhandlungen und insbesondere der lichtvollen Darstellung dieser Theorien durch Bäcklund[2]) hat die folgende Untersuchung veranlaßt. Man kann die Bewegung des Merkur bekanntlich so darstellen, als ob sich die Bahnellipse in ihrer Ebene mit gewisser Geschwindigkeit um die Sonne drehe. Diese Geschwindigkeit kann man als konstant ansehen; sie ist so klein, daß ihr Quadrat vernachlässigt werden darf. Stellt man sich nun umgekehrt die Aufgabe, Kräfte anzugeben, welche (unter der Annahme der klassischen Dynamik) eine solche Bewegung veranlassen würden, so ist diese Aufgabe, da nur erste Potenzen der Geschwindigkeit in Betracht kommen, notwendig unbestimmt. Soll die Geschwindigkeit konstant sein, so ergeben sich leicht Gleichungen.

[1]) Sitzungsberichte der Berliner Akademie, Bd. 47, 1915; vgl. die Darstellung bei Weyl: Raum-Zeit-Materie, Berlin 1918.

[2]) Zusammenstellung einer Theorie der klassischen Dynamik und der neuen Gravitationstheorie von Einstein, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Svenska vetenskapsakademie, Bd. 14, Nr. 11, Stockholm 1919.

deren Integration nicht auf Quadraturen zurückgeführt werden kann; es sind die Gleichungen (4 a). Vernachlässigt man aber ω^2, so entstehen die Gleichungen (7), die sich vollständig behandeln und durch Quadraturen erledigen lassen. Die in (10) und (11) aufgestellten Integrale müssen dann für kleine Werte von ω wieder zu den sonst bekannten Resultaten führen.

Beziehen sich die rechtwinkligen Koordinaten ξ, η und x, y auf denselben Anfangspunkt und dreht sich das System ξ-η mit konstanter Geschwindigkeit ω gegen das feste System x-y, so ist[1])

$$x = \xi \operatorname{cosin} \omega t - \eta \sin \omega t, \quad y = \xi \sin \omega t + y \operatorname{cosin} \omega t \tag{1}$$

und durch Differentiation nach t:

$$\begin{aligned} x' &= \xi' \cos \omega t - \eta' \sin \omega t - \omega y, \\ y' &= \xi' \sin \omega t + \eta' \sin \omega t + \omega x. \end{aligned} \tag{2}$$

Durch nochmalige Differentiation ergibt sich:

$$\begin{aligned} x'' &= \xi'' \operatorname{cosin} \omega t - \eta'' \sin \omega t - 2 \omega y' + \omega^2 x, \\ y'' &= \xi'' \sin \omega t + \eta'' \operatorname{cosin} \omega t + 2 \omega x' + \omega^2 y. \end{aligned} \tag{3}$$

Bewegt sich der Punkt ξ, η nach dem Newtonschen Gesetze um den Anfangspunkt, so ist

$$\xi'' = -\frac{M\xi}{r^3}, \quad \eta'' = -\frac{M\eta}{r^3}, \quad \text{wo } r^2 = \xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2. \tag{4}$$

---

[1]) Die Koordinaten ξ, η beziehen sich auf ein Inertialsystem, die Koordinaten x, y auf ein empirisches System, in dem Sinne, wie v. Seeliger allgemein die Drehung des letzteren Systems gegen das erstere im Raume untersucht hat, um die auf den Planeten wirkenden Störungen darzustellen: Über die sogenannte absolute Bewegung, Sitzungsberichte der Bayer. Akad. d. Wiss, Bd. 36, Jahrg. 1906. Während im Texte rein mathematisch die Integration der Bewegungsgleichungen (7) untersucht wird, kommt es bei v. Seeliger auf die Frage an, ob durch die Störungen der anderen Planeten eine Drehung des einen Systems um das andere (mit Geschwindigkeit ω) verursacht sein kann bei Vernachlässigung von ω^2.

Aus (3) und (1) erhält man also:

$$
\begin{aligned}
x'' &= -\frac{Mx}{r^3} - 2\omega y' + \omega^2 x, \\
\text{(4 a)} \qquad y' &= -\frac{My}{r^3} + 2\omega x' + \omega^2 y.
\end{aligned}
$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen stellen im Systeme x-y die Komponenten derjenigen Kräfte dar, welche wirken müssen, um eine Drehung der im Systeme ξ-η stattfindenden elliptischen Bewegung gegen das feste System mit der Geschwindigkeit ω hervorzurufen. Es wird:

$$\frac{x''x}{r} + \frac{y''y}{r} = -\frac{M}{r^2} - \frac{2\omega}{r}(xy' - yx') + \omega^2 r.$$

Hierin ist

$$\text{(5)} \qquad xy' - yx' = r^2 \frac{d\varphi}{dt},$$

wenn

$$\text{(6)} \qquad x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

gesetzt sei; also:

$$\frac{x''x}{r} + \frac{y''y}{r} = -\frac{M}{r^2} - 2\omega r\frac{d\varphi}{dt} + \omega^2 r.$$

Senkrecht zum Radiusvektor ergibt sich die Komponente

$$y''\frac{x}{r} - x''\frac{y}{r} = 2\omega\frac{xx' + yy'}{r} = 2\omega\frac{dr}{dt}.$$

Die Größe der ergänzenden Kraft R ist also bestimmt durch

$$
\begin{aligned}
\text{(6 a)} \qquad R^2 &= 4\omega^2\left[r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] - 4\omega^3 r^2\frac{d\varphi}{dt} + \omega^4 r^2 \\
&= 4\omega^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,
\end{aligned}
$$

wenn man höhere Potenzen von ω vernachlässigt, und die Richtung ψ der Kraft gegen die X-Axe bestimmt durch

$$\text{(6 b)} \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{-d\log r}{d\varphi} = -\operatorname{cotg}\lambda, \text{ also: } \psi = \lambda + \frac{\pi}{2},$$

wenn λ den Winkel der Tangente der Kurve gegen den Radiusvektor bezeichnet. Die Kraft wirkt also bei kleinen Werten von ω in Richtung der Tangente der Bahnkurve und ist der Geschwindigkeit des Planeten in dieser Bahnkurve proportional.

Um eine Drehung der Bahnellipse um die in einem Brennpunkte stehende Sonne mit konstanter Geschwindigkeit ω hervorzurufen, muß also der Newtonschen Gravitationskraft eine in Richtung auf die Sonne wirkende Kraft von der Größe $-2\omega r \frac{d\varphi}{dt} + \omega^2 r$ und senkrecht dazu eine solche von der Größe $2\omega \frac{dr}{dt}$ hinzugefügt werden. Ist ω sehr klein, so kann das Glied $\omega^2 r$ vernachlässigt werden.

Unabhängig von vorstehend geschildertem Anlasse soll im folgenden die Aufgabe behandelt werden, die Bewegung eines Punktes zu bestimmen, auf den vom Anfangspunkte aus eine Kraft mit den Komponenten $-\frac{M}{r^2} - 2\omega r \frac{d\varphi}{dt}$ und $2\omega \frac{dr}{dt}$ wirkt, wo ω eine Konstante bezeichnet. Größe und Richtung der ergänzenden Kraft sind dann durch die Gleichungen (6a) und (6b) bestimmt.

Wird die Masse des bewegten Punktes gleich 1 gesetzt, so lauten jetzt die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$(7) \qquad x'' = -\frac{Mx}{r^3} - 2\omega y', \qquad y'' = -\frac{My}{r^3} + 2\omega x'.$$

Die Gleichung der lebendigen Kraft wird, wenn v die Geschwindigkeit und h eine Konstante bezeichnet:

$$(8) \qquad \frac{1}{2} v^2 = \frac{M}{r} + h,$$

also ebenso wie im Falle $\omega = 0$. Der Flächensatz wird:

$$(9) \qquad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \omega r^2 + c,$$

wo c eine Konstante bezeichnet. Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$(10) \qquad t = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{-c^2 - 2\,\omega c r^2 - \omega^2 r^4 + 2 h r^2 + 2 M r}} + C,$$

$$(11) \qquad \varphi = \int \frac{(c + \omega r^2)\,dr}{r\sqrt{-c^2 - 2\,\omega c r^2 - \omega^2 r^4 + 2 h r^2 + 2 M r}} + C',$$

wo C und C' Konstante bedeuten. Maximum und Minimum von r (d. h. Aphel und Perihel) werden durch die Gleichung

$$(12) \qquad 2 M r + 2 h r^2 - (c + \omega r^2)^2 = 0$$

bestimmt. Bezeichnen wir die linke Seite mit $\psi(r)$ und sei

$$\psi(r) = a_0 r^4 + 4 a_1 r^3 + 6 a_2 r^2 + 4 a_3 r + a_4,$$

so sind die Invarianten i und j dieses Ausdrucks 4. Grades (in der Clebschschen Bezeichnungsweise):

$$i = 2(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2) = 2\left[c^2 \omega^2 + \tfrac{1}{3}(h - c\omega)^2\right],$$

$$\begin{aligned} j &= 6(a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 - a_2^3) \\ &= 2 c^2 \omega^2 (h - c\omega) + \tfrac{3}{2} M^2 \omega^2 - \tfrac{2}{9}(h - c\omega)^3; \end{aligned}$$

und es wird die Diskriminante:

$$\begin{aligned} i^3 - 6 j^2 = &- 4 M^2 \omega^2 (h - c\omega)^3 - \tfrac{8}{3} c^2 \omega^2 (h - c\omega)^4 \\ &- 16 c^4 \omega^4 (h - c\omega)^2 + 8 c^6 \omega^6, \end{aligned}$$

also für kleine Werte von ω sehr klein; für solche Werte sind daher zwei Wurzeln reell (wie für $\omega = 0$), die beiden andern fallen nahe zusammen und sind unendlich groß, wenn $\omega = 0$ wird. Die Gleichung $\psi(r) = 0$ hat folglich für kleine Werte von ω zwei reelle Wurzeln; nennen wir dieselben r_1 und r_2 und sei

$$r_1 < r_2,$$

so sind die Konstanten h und c durch r_1 und r_2 bestimmt. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} \psi(r) = \psi(r) - \psi(r_1) &= 2 M (r - r_1) + 2 h (r^2 - r_1^2) - 2 c\omega (r^2 - r_1^2) \\ &- \omega^2 (r^4 - r_1^4) = (r - r_1)\left[2 M + 2 (r + r_1)(h - c\omega)\right. \\ &\left. - \omega^2 (r^2 + r_1^2)(r + r_1)\right] = (r - r_1)\,\chi(r), \end{aligned}$$

und: $$\chi(r)\cdot(r_1+r_2) = \chi(r)\cdot(r_1+r_2) - (r+r_1)\,\chi(r_2)$$
$$= 2M(r_2-r) - \omega^2(r+r_1)(r_2+r_1)(r^2-r_2^2)$$
$$= -(r-r_2)\,[2M+\omega^2(r_1+r_2)(r+r_1)(r+r_2)],$$
also:

$$(13)\qquad \psi(r)\cdot(r_1+r_2) = -(r-r_1)(r-r_2)\,[2M+ \omega^2(r_1+r_2)(r+r_1)(r+r_2)] = -(r-r_1)(r-r_2)\cdot f(r),$$

und:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{(c+\omega r^2)\sqrt{r_1+r_2}}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(r)}}.$$

Zwischen c, h, r_1, r_2 bestehen die Relationen:

$$(14)\qquad \begin{aligned} 2hr_1r_2 + (c+\omega r_1r_2)^2 &= \omega^2 r_1r_2(r_1^3+r_2^2+3r_1r_2),\\ c^2(r_1+r_2) &= r_1r_2(2M+\omega^2(r_1+r_2)r_1r_2). \end{aligned}$$

Die Konstante c ist nach (7) positiv, wenn φ mit wachsender Zeit wächst (für kleine Werte von ω). Für $\omega=0$ und folglich für kleine Werte von ω sind die Wurzeln r_1 und r_2 positiv.

Wir können es immer so einrichten, daß $t=0$ und $\varphi=0$ ist für $r=r_1$, dann tritt infolge von (12) zu den Relationen (14) die weitere hinzu:

$$(c+\omega r_1^2)^2 = 2Mr_1 + 2hr_1^2,$$

und die Integrale (10) und (11) werden:

$$(15)\qquad t = \int_{r_1}^{r} \frac{r\,dr\sqrt{r_1+r_2}}{\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)f(r)}},$$

$$(16)\qquad \varphi = \int_{r_1}^{r} \frac{(c+\omega r^2)\,dr\sqrt{r_1+r_2}}{r\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)f(r)}},$$

wo $f(r)$ durch (13) definiert ist. Zur Auswertung der Integrale setzen wir

$$(17)\qquad \begin{aligned} r &= \tfrac{1}{2}\,[(r_1+r_2)+(r_1-r_2)\operatorname{cosin}\theta]\\ (r-r_1)(r_2-r) &= \tfrac{1}{4}(r_2-r_1)^2\sin^2\theta, \end{aligned}$$ also aus (16):

$$\varphi = \int_0^{\Theta} \frac{2\,c\,d\,\Theta \cdot \sqrt{r_1 + r_2}}{[r_1 + r_2 + (r_1 - r_2)\,\text{cosin}\,\Theta]\sqrt{f(r)}}$$

$$+ \frac{\omega}{2} \int_0^{\Theta} \frac{[r_1 + r_2 + (r_1 - r_2)\,\text{cosin}\,\Theta]\,d\,\Theta}{\sqrt{f(r)}} \sqrt{r_1 + r_2}.$$

Die genaue Auswertung könnte leicht durch Einführung elliptischer Funktionen geschehen. Wir beschränken uns auf den Fall kleiner Werte von ω, so daß die Glieder mit ω^2 vernachlässigt werden können. Dann kann $f(r)$ zufolge (13) durch $2\,M$ ersetzt werden, und $c^2(r_1 + r_2)$ zufolge (14) durch $2\,M\,r_1\,r_2$. Wir setzen noch

(18) $$r_1 = a(1 - \varepsilon), \quad r_2 = a(1 + \varepsilon),$$

so daß c durch $\sqrt{a\,M(1 - \varepsilon^2)}$ ersetzt werden kann, und finden:

$$\varphi \sim \int_0^{\Theta} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \cdot d\,\Theta}{(1 - \varepsilon\,\text{cosin}\,\Theta)} + \frac{a^{3/2}}{\sqrt{M}}\,\omega \int_0^{\Theta} (1 - \varepsilon\,\text{cosin}\,\Theta)\,d\,\Theta$$

$$\sim \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{\varepsilon - \text{cosin}\,\Theta}{1 - \varepsilon\cos\Theta}\right) + \frac{a^{3/2}}{\sqrt{M}} \cdot \omega \cdot (\Theta - \varepsilon\sin\Theta).$$

Setzen wir $\Theta = 2\,\pi$, so ergibt sich das Vorrücken des Perihels nach einem vollen Umlaufe gleich

(19) $$\delta = \frac{2\,\pi\,\omega\,a^{3/2}}{\sqrt{M}};$$

und für $\Theta = \pi$ ist die Vorrückung des Aphels gleich der Hälfte dieser Zahl. Hierin bedeutet a die halbe große Axe der Bahnellipse und M das Verhältnis der Masse der Sonne zur Masse des Merkur.

Das Zeitintegral wird infolge der Substitution (17):

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{r_1 + r_2} \int_0^{\Theta} \frac{[r_1 + r_2 + (r_1 - r_2)\cos\Theta]\,d\,\Theta}{\sqrt{f(r)}}$$

und (wenn wieder Glieder mit ω^2 vernachlässigt werden):

$$t \sim \frac{a^{3/2}}{\sqrt{M}} \int_0^{\Theta} (1 - \varepsilon \cos \Theta)\, d\,\Theta = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{M}} (\Theta + \varepsilon \sin \Theta),$$

wie bei der Keplerschen Gleichung, also die Umlaufszeit:

$$T = \frac{2\,\pi\, a^{3/2}}{\sqrt{M}}$$

und folglich das Vorrücken des Perihels nach (19):

$$\delta = \omega\, T. \tag{20}$$

Nach der Einsteinschen Theorie soll angenähert

$$\delta = \frac{24\,\pi^3\, a^2}{\lambda^2\, T^2 (1 - \varepsilon^2)} \tag{21}$$

sein, wenn λ die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

Der Wert (21) stimmt überein mit dem Werte, den Bäcklund für die Geschwindigkeit der Drehung der Ellipse berechnet, wenn man (wie es bei ihm geschieht), das Quadrat von ε vernachlässigt[1]).

Vernachlässigt man das Quadrat der Exzentrizität und wendet das dritte Keplersche Gesetz an, so erhält man aus (21)

$$\delta = \frac{6\,\pi\, M}{\lambda^2\, a}.$$

Für einen anderen Planeten mit der mittleren Entfernung a_1 von der Sonne wird also die entsprechende Verrückung des Perihels

$$\delta_1 = \frac{6\,\pi\, M}{\lambda^2\, a_1} = \delta\, \frac{a}{a_1}.$$

Für den Merkur findet Bäcklund $\delta = 41''$ in Übereinstimmung mit Einstein und mit der Erfahrung. Die Exzentrizitäten von Venus, Erde und Mars sind so gering und infolge dessen die Lage der Perihele dieser Planeten so wenig genau festzustellen, daß sich für sie eine Prüfung durch die Erfahrung nicht machen läßt.

---

[1]) S. 38 f. in der oben zitierten Abhandlung.

Für die im vorstehenden gemachte Annahme einer die Drehung bewirkenden äußeren Kraft kann durch einen Vergleich mit den anderen Planeten eine Entscheidung nicht getroffen werden, denn die Konstante ω in (20) ist nicht (wie λ^2 bei Einstein) notwendig eine universelle Konstante; sie kann vielmehr für jeden Planeten einen andern Wert haben. Man könnte sich nämlich die Tatsache, daß die eine Komponente der ergänzenden Kraft proportional der Geschwindigkeit senkrecht zum Radiusvektor gesetzt wurde, etwa dadurch zu erklären versuchen, daß Ströme von Massenteilchen oder Gasen aus dem Weltraum auf die Sonne stürzen und dabei die Bewegung des Planeten beeinflussen; die andere Komponente der Kraft würde entsprechend auf solche rechtwinklig zum Radiusvektor gerichtete Ströme deuten; beide zusammen auf schräg gegen die Sonne gerichtete Ströme. Je größer die Zahl solcher Ströme ist, die den Planeten auf seiner Bahn trifft, je stärker wird diese Einwirkung ausfallen; sie würde daher der Geschwindigkeit des Planeten proportional sein müssen.

Ohne auf derartige Gedanken Wert zu legen, könnte man andererseits das in den Formeln (7) zu Grunde gelegte Anziehungsgesetz rein formal als eine Ergänzung des Newtonschen Gesetzes ansehen, nur darauf fußend, daß es im Stande ist, die Bewegung des Perihels zu begründen, wie man auch andere Erweiterungen des Newtonschen Gesetzes zu dem Zwecke vorgeschlagen hat[1]).

Wie Bäcklund in seiner Darstellung der Einsteinschen Gravitationstheorie zeigt, führt letztere, übertragen in die Sprache der klassischen Dynamik, auch auf eine Erweiterung des Newtonschen Gesetzes; denn wenn man als Zeit die Eigenzeit des bewegten Planeten zu Grunde legt, ergeben sich die Einsteinschen Formeln, indem man im Gravitationsgesetze der im umgekehrten Quadrate der Entfernung wirkenden Kraft

[1]) Vgl. darüber v. Seeliger, Das Zudiakallicht und die empirischen Glieder in der Bewegung der inneren Planeten, Sitzungsberichte der Münchener Akademie der Wissenschaften, mathem.-physikal. Klasse, Bd. 36, S. 595 ff., 1906.

ein Glied hinzufügt, das der vierten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist.

Gemeinsam ist der obigen Darstellung und der Behandlung durch Einstein das Auftreten elliptischer Integrale; bei letzterem aber ist φ durch ein Integral erster Gattung als Funktion von r dargestellt, r also eine eindeutige, doppelt periodische Funktion von φ. Oben aber in (11) tritt ein Integral dritter Gattung auf, dessen Umkehrung nicht so einfach geschehen kann; für reelle Variable kann man die umgekehrte Funktion nach Weierstraß[1]) durch eine trigonometrische Reihe darstellen.

Nachtrag.

Für das allgemeinere räumliche Problem, das v. Seeliger a. a. O. näherungsweise, soweit es für das Störungsproblem nötig war, behandelt hat, treten an Stelle der Gleichungen (7) die drei Gleichungen:

$$(22)\quad x'' = -\frac{Mx}{R^3} + 2wy' - 2vz', \quad y'' = -\frac{My}{R^3} + 2uz' - 2wx',$$
$$z'' = -\frac{Mz}{R^3} + 2vx' - 2uy',$$

wo R die Entfernung des bewegten Punktes vom Anfangspunkte bezeichnet. Da man u, v, w als Komponenten einer Drehung um eine gewisse Axe auffassen kann, wird man diese Axe als neue Z-Axe einführen, und dann lauten die Differentialgleichungen:

$$(23)\quad x'' = -\frac{Mx}{R^3} - 2\omega y', \quad y'' = -\frac{My}{R^3} + 2\omega x', \quad z'' = -\frac{Mz}{R^3}$$

Bezeichnet wieder U die Kräftefunktion der Newtonschen Anziehung $\left(U = \frac{M}{R}\right)$, so gilt der Satz von der lebendigen Kraft:

$$(24)\qquad \tfrac{1}{2}v^2 = U + h,$$

wie vorhin in (8); und der Flächensatz in Bezug auf die Z-Axe ergibt wieder:

$$xy' - yx' = r^2\varphi' = \omega r^2 + C. \tag{25}$$

Multipliziert man die Gleichungen (23) bzw. mit x, y, z und addiert, so wird:

$$\begin{aligned} xx'' + yy'' + zz'' &= -\frac{M}{R} - 2\omega(y'x - x'y) \\ &= -U - 2\omega[\omega(x^2 + y^2) + C], \end{aligned}$$

oder:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2R^2}{dt^2} - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = -U - 2\omega^2(R^2 - z^2) - 2\omega C$$

und in Folge von (24):

$$\frac{1}{2}\frac{d^2R^2}{dt^2} - U - 2h + 2\omega^2R^2 + 2\omega C = 2\omega^2 z^2, \tag{26}$$

also:

$$\sqrt{2}\cdot\omega\cdot z = \sqrt{V}, \tag{27}$$

wenn V die linke Seite von (26) bezeichnet. Durch Differentiation folgt wegen der dritten Gleichung (23):

$$\sqrt{2}\cdot\omega\cdot z'' = \frac{1}{2}\frac{V''}{\sqrt{V}} - \frac{1}{4}\frac{V'^2}{V^{3/2}} = -\omega\sqrt{2}\frac{M}{R^3}z = -\frac{M}{R^3}\sqrt{V},$$

oder:

$$2V''V - V'^2 = -\frac{4M}{R^3}V^2. \tag{28}$$

Es ist dies eine Differentialgleichung vierter Ordnung zur Bestimmung von R; z ergibt sich dann aus (26), r findet man aus der Relation $R^2 = r^2 + z^2$, endlich φ aus (25) durch Quadratur. Durch Integration von (28) werden 4 Konstante eingeführt; dazu kommt die Konstante h aus (24) und C aus (25), ferner eine 7. Konstante durch die Quadratur zur Berechnung von φ. Zwischen diesen 7 Konstanten muß eine Relation bestehen.

Ist ω sehr klein, so daß $\omega^2 (R^2 - z^2) = \omega^2 r^2$ vernachlässigt werden kann, so wird (26):

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 R^2}{d t^2} \sim \frac{M}{R} + 2 h - 2 \omega C$$

oder:

$$\left(\frac{d R^2}{d t}\right) \sim 8 (M R + h R^2 - \omega C R^2 + C'),$$

also:

$$t \sim \int \frac{R \, d R}{\sqrt{2 C' - 2 \omega C R^2 + 2 h R^2 + M R}} + C''$$

in Übereinstimmung mit (10) für kleine Werte von ω; ebenso ergibt sich dann φ analog zu (11); es kann dann aber (26) nicht zur Bestimmung von z benutzt werden; dazu wird die dritte Gleichung (23) dienen können, durch welche zwei neue Konstante eingeführt würden. Für kleine Werte von ω müssen sich aus diesen Formeln wieder die Gleichungen v. Seeligers ergeben, von denen einige auch schon Anding aufgestellt hatte.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1919

Band/Volume: 1919

Autor(en)/Author(s): Lindemann Ferdinand

Artikel/Article: Zur Theorie der Planetenbahnen 407-418