Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1919. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1919
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über singuläre Punkte gleichmässiger Konvergenz.

Von Alfred Pringsheim.

Vorgetragen in der Sitzung am 6. Dezember 1919.

1. In seiner Abhandlung „Zur Funktionenlehre“ [1]) hat Weierstraß neben dem allgemein üblich gewordenen Begriff der gleichmäßigen Konvergenz *in einem Bereiche* denjenigen der gleichmäßigen Konvergenz *in der Nähe einer Stelle* eingeführt. Eine unendliche Reihe von der Form $\sum f_\nu(x)$, wo x eine komplexe Veränderliche bezeichnen mag, heißt danach *in der Nähe der Stelle a gleichmäßig* konvergent, wenn ein $\varrho > 0$ existiert derart, daß sie für den Bereich:

$$|x - a| \leqq \varrho$$

gleichmäßig konvergiert; d. h. es muß für eine zwar beliebig klein zu denkende, aber *feste* Umgebung $|x - a| \leqq \varrho$ zu *jedem* $\varepsilon > 0$ ein m_ε vorhanden sein, so daß für alle x dieser Umgebung

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} {}_\nu f_\nu(x)\right| < \varepsilon, \quad \text{wenn: } n \geqq m_\varepsilon.$$

Weierstraß zeigt sodann, daß eine Reihe, die *in der Nähe* jeder einzelnen, *im Innern* oder *auf der Begrenzung* eines zusammenhängenden Bereiches (B) gelegenen *Stelle* in dem obigen Sinne *gleichmäßig* konvergiert *im ganzen Bereiche* gleichmäßig konvergiert[2]).

[1]) Berl. Monatsber. 1880, S. 719 = Werke 2, S. 202.

[2]) Unzutreffend und irreführend erscheinen mir die Bemerkungen, die Herr Osgood in seinem Enzyklopädie-Artikel über analytische Funktionen (Enzykl. der Mathem. Wissenschaften II B 1) an die Weier-

Während der Weierstraßische Beweis auf dem Umstande beruht, daß die obere Grenze R jener Umgebungsradien ϱ mit der Stelle a sich *stetig* ändert und daher in (B) ein *Minimum*

straßischen Definitionen der gleichmäßigen Konvergenz knüpft. Nachdem er dort (S. 20) im Text, unter ausdrücklichem Hinweis auf die in unserer Fußnote 1) angeführte Stelle, die Weierstraßische Definition der gleichmäßigen Konvergenz *in einem Bereiche* erwähnt hat, fügt er in einer Fußnote (a. a. O. 32) folgendes hinzu: „Eine *andere* Definition der gleichmäßigen Konvergenz hat Weierstraß in seinen Vorlesungen gegeben, wonach $s(z, a)$ *in einem Punkte* $z = z_0$ gleichmäßig konvergieren soll, wenn a gegen α konvergiert, falls *in einer gewissen Umgebung* des Punktes z_0 die Bedingungen der im Text gegebenen Definition erfüllt sind." Hierzu ist vor allem zu bemerken: diese angeblich *„andere"* Vorlesungs-Definition ist ja genau *dieselbe*, die Weierstraß auch in jener *Abhandlung* (und zwar mit voller Absicht *neben* derjenigen der gleichmäßigen Konvergenz *in einem Bereiche*) gegeben hat, nur nennt er daselbst etwas zweckmäßiger *gleichmäßige Konvergenz in der Nähe von* z_0, was er in der *Vorlesung* als solche *im Punkte* z_0 bezeichnet haben soll. Herr Osgood, der dies sonderbarer Weise völlig übersehen zu haben scheint, sucht nun des weiteren ganz mit Unrecht einen Widerspruch zwischen jenen beiden Definitionen der gleichmäßigen Konvergenz zu konstruieren, indem er a. a. O. fortfährt: „Nach dieser letzten Definition konvergiert insbesondere eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzkreises stets gleichmäßig; nach der ersten Definition ist dies im allgemeinen nicht der Fall." Die *erste* dieser beiden Behauptungen ist aber in dem vorliegenden Zusammenhange durchaus hinfällig. Sie wäre nämlich nur dann richtig, wenn man auf Grund der Weierstraßischen Festsetzungen die gleichmäßige Konvergenz *in einem Bereiche* und diejenige *in der Nähe jeder einzelnen Stelle* (bzw. *in jedem Punkte*) des betreffenden Bereiches von vornherein als *gleichwertig* anzusehen hätte. Daß indessen hiervon keine Rede sein kann, geht ja unzweideutig daraus hervor, daß Weierstraß es (mit Recht) für notwendig hält, die *Äquivalenz* beider Definitionen für den Fall eines *abgeschlossenen* Bereiches – und *nur* für einen solchen — ausdrücklich zu *beweisen*. Im übrigen sind ja analoge Unterscheidungen für die Weierstraßische Terminologie geradezu charakteristisch. Danach braucht z. B. eine Funktion, die *an jeder Stelle* eines Bereiches *endlich* ist, noch nicht *im Bereiche* selbst *endlich* (d. h. *beschränkt* nach neuerer Ausdrucksweise) zu sein. Und eine *für jede Stelle* eines Bereiches *stetige* Funktion ist zwar *im Bereiche (gleichmäßig) stetig*, wenn derselbe ein *abgeschlossener* ist, braucht es aber im entgegengesetzten Falle wiederum *nicht* zu sein. (Vgl. Enzykl. d. Math. Wissensch. II A 1: Nr. 6 und 9, 1.)

besitzen muß[1]), welches dann auf Grund der Voraussetzung von Null verschieden ist, habe ich späterhin einen anderen

[1]) Ich möchte diese Gelegenheit benützen, um zu völliger Klarstellung dieser auch für andere ähnliche Zwecke verwendeten Beweismethode folgendes zu bemerken. Im zunächst vorliegenden Falle geht Weierstraß von der Voraussetzung aus, daß auch für jeden der *Begrenzung* des Bereiches (B) angehörigen Punkt eine *vollständige* d. h. *kreisförmige* Umgebung gleichmäßiger Konvergenz existiert; mit anderen Worten, daß der abgeschlossene Bereich (B) im *Innern* eines anderen Bereiches liegt, dessen *Innenpunkte* ausnahmslos die fragliche Eigenschaft besitzen. In diesem Falle ist jene obere Grenze R der Umgebungsradien eine *eindeutig definierte* Funktion der Punkte a (die sich dann mit a stetig ändert). Anders liegt aber die Sache, wenn für die Punkte der *Begrenzung* als *Umgebung*, innerhalb deren die gleichmäßige Konvergenz bzw. irgend eine andere Voraussetzung besteht, nur derjenige *Teil* einer Kreisfläche in Betracht kommt, *welcher zum Bereiche* (B) *gehört*, wie dies z. B. bei dem bekannten Lürothschen Beweise für die gleichmäßige Stetigkeit einer Funktion zweier reeller Variablen der Fall ist (Math. Ann. 6 [1873], S. 318). Daselbst findet sich sogar eine Bemerkung, deren Form zunächst geeignet erscheint, an der Haltbarkeit der ganzen Schlußweise gewisse Zweifel aufkommen zu lassen. Nachdem nämlich die Stetigkeit von $f(x, y)$ in der Weise definiert ist, daß im Innern eines um den Punkt (x, y) mit einem gewissen Radius $\varrho\,(x, y)$ beschriebenen *Kreises* die Schwankung der Funktion einen gewissen Kleinheitsgrad ε nicht übersteigt, heißt es weiter: „Auch für Punkte *in der Nähe* oder auf der Grenze des Bereiches, für welchen die Funktion definiert ist, läßt sich die Definition anwenden, wenn man nur diejenigen Teile eines Kreises betrachtet, welche in den Bereich fallen." Damit ist aber ein Dualismus geschaffen, der zu folgender Schwierigkeit führt. Hält man sich zunächst an die für *„nicht in der Nähe"* der Grenze liegende Punkte (x, y) gültige Definition und bezeichnet die obere Grenze der Radien $\varrho\,(x, y)$ mit $R\,(x, y)$, so würde als *Minimum* der $R\,(x, y)$ für den gesamten Bereich die *Null* erscheinen. Um diesem Übelstande zu entgehen, muß man also *„in der Nähe"* der Grenze zu jener *zweiten*, erweiterten Definition übergehen. Aber wo *beginnt* nun eigentlich die fragliche *„Nähe"* der Grenze? Mit anderen Worten, bei dieser Fassung der erforderlichen Definitionen ist $R\,(x, y)$ überhaupt gar nicht als *eindeutige* Funktion von (x, y) definiert. Um dies zu erzielen, hat man *ohne Unterschied* $R\,(x, y)$ zu definieren als obere Grenze für die Radien $\varrho\,(x, y)$ solcher um (x, y) beschriebenen Kreise, deren *zum Bereich gehörige Innenpunkte* Funktions-Schwankungen vom Kleinheitsgrade ε liefern. (Dabei können diese Kreise also nach Bedarf auch über den Bereich hinausragen.)

Beweis gegeben[1]), der, auf dem Schlußverfahren des sogenannten Heine-Borelschen Satzes beruhend, insofern über die Weierstraßische Voraussetzung hinausgeht, als dabei nicht die Existenz eines (zwar von a abhängigen, aber) für jedes einzelne a *festen*, d. h. *von* ε *unabhängigen* ϱ gefordert, vielmehr nur angenommen wird, daß für jede Stelle a zu jedem einzelnen ε ein gewisses $\varrho > 0$ vorhanden ist, wobei es also keineswegs ausgeschlossen ist, daß gleichzeitig mit ε auch ϱ *unbegrenzt* abnehmen könnte. Es erscheint zweckmäßig, den durch diese herabgeminderte Bedingung charakterisierten, also *weiteren* Konvergenztypus nach dem Vorgange des Herrn W. H. Young[2]) als *gleichmäßige Konvergenz im Punkte* a[3]), also allgemein als *punktweise gleichmäßige* Konvergenz zu bezeichnen. Herr Fr. Rieß[4]) bedient sich in dem nämlichen Sinne der Bezeichnung *gleichmäßige Konvergenz an der Stelle* a bzw. *stellenweise gleichmäßige* Konvergenz (welche letztere Bezeichnung mir aber etwas weniger ausdrucksvoll erscheint, da durch den landläufigen Sprachgebrauch das Wort „stellenweise" allzusehr an Prägnanz verloren hat).

2. Setzt man:

$$\sum_0^n {}^{\nu} f_\nu(x) = F_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

läßt man also an die Stelle der Summe der konvergenten Reihe $\sum_0^\infty {}^{\nu} f_\nu(x)$ den Grenzwert der Funktionenfolge $F_0(x)$, $F_1(x), \ldots, F_\nu(x), \ldots$, etwa:

$$\text{(A)} \qquad \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

treten, so heißt jetzt die Funktionenfolge der $F_\nu(x)$ ($\nu = 0$,

1) Math. Ann. 44 (1894), S. 80.

2) Proc. London Math. Soc. (2), [1903], 1, S. 90.

3) Die Bezeichnung „*im Punkte*" erscheint also hier in wesentlich prägnanterer Bedeutung, als bei der in Fußnote 2) erwähnten gelegentlichen Anwendung.

4) Jahresb. der D. M. V. 22 [1908], S. 199.

1, 2, . . .) *im Punkte* x' *gleichmäßig* konvergent, wenn zu jedem einzelnen $\varepsilon > 0$ die Bedingung:

$$\text{(B)} \qquad |F(x) - F_\nu(x)| < \varepsilon$$

durch Wahl von $\nu \geqq n_\varepsilon$ für alle Stellen einer gewissen Umgebung von x', etwa:

$$|x - x'| < \varrho_\varepsilon(x')$$

befriedigt werden kann. Besitzt dann $\varrho_\varepsilon(x')$ bei unbegrenzt abnehmendem ε ein gewisses von Null verschiedenes *Minimum*, so ist die Folge der $F_\nu(x)$ zugleich *in der Nähe von* x' *gleichmäßig* konvergent. Hat hingegen $\varrho_\varepsilon(x')$ für $\varepsilon \longrightarrow 0$ die untere Grenze *Null*, so ist die Folge der $F_\nu(x)$ wirklich *nur im Punkte* x' (nicht *in der Nähe* von x') *gleichmäßig* konvergent. Ich will dann x' als *singulären Punkt gleichmäßiger Konvergenz* bezeichnen. Die Umgebung einer solchen Stelle x' kann also nicht *ausschließlich* aus Stellen selbst nur *punktweise* gleichmäßiger Konvergenz bestehen, denn diese würden ja nach dem in Nr. 1 erwähnten Satze einen die Stelle x' umgebenden *Bereich* gleichmäßiger Konvergenz konstituieren. Somit müssen *in beliebiger Nähe* eines (dem Konvergenzbereiche der Funktionenfolge angehörigen) *singulären Punktes gleichmäßiger* Konvergenz Stellen *ungleichmäßiger* Konvergenz liegen. Dabei kann sogar der Fall eintreten, daß die Umgebung von x' *ausschließlich* aus Stellen *ungleichmäßiger* Konvergenz besteht, so daß also x' geradezu als *isolierter Punkt gleichmäßiger* Konvergenz erscheint. Diese Verbindung der Eigenschaften „*isoliert*“ und „*gleichmäßig* konvergent“ klingt zunächst paradox, findet aber ihr vollkommenes Analogon in der Tatsache, daß auch *Stetigkeits*punkte völlig *isoliert* auftreten können[1]). Da, soviel mir bekannt, arithmetische Ausdrücke mit solchen *singulären Punkten gleichmäßiger Konvergenz* bisher nicht bemerkt worden sind, so mag es vielleicht nicht ganz überflüssig erscheinen, wenn ich

[1]) S. die französische Ausgabe der Enzyklopädie: II, 1 (Principes fondamentaux de la théorie des Fonctions), Fußnote 110. Vgl. auch den Schluß von Nr. 4 dieser Mitteilung.

im folgenden einige Beispiele dieser Art mitteile und schließlich den Nachweis hinzufüge, daß bei Folgen *analytischer* Funktionen das Auftreten singulärer Stellen gleichmäßiger Konvergenz *im Innern* ihres Konvergenzbereiches ausgeschlossen ist.

3. Es werde gesetzt:

$$(1) \qquad \varphi(x) = \cos^2 \frac{\pi}{|x| + E\left(\frac{1}{1+|x|}\right)},$$

also:

$$(2) \qquad \varphi(0) = \cos^2 \pi = 1, \quad \varphi(x) = \cos^2 \frac{\pi}{|x|} \quad \text{für } x \neq 0.$$

Definiert man sodann die Funktionenfolge $F_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) durch die Beziehung:

$$(3) \qquad F_\nu(x) = |x| \cdot \varphi(x)^\nu,$$

so hat man:

$$(4) \qquad 0 \leq F_\nu(x) \begin{cases} = |x| & \text{für } |x| = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \text{ und } x = 0, \\ < |x| & \text{für jedes andere endliche } x. \end{cases}$$

Die $F_\nu(x)$ sind also insgesamt in jedem endlichen Bereich *beschränkt* und überdies *stetig*, auch an der Stelle $x = 0$, in deren Umgebung jedes $F_\nu(x)$ unendlich oft den Maximalwert $|x|$ annimmt.

Des weiteren ergibt sich:

$$(5) \qquad F(x) \equiv \lim_{\nu \to \infty} F_\nu(x) \begin{cases} = |x| \text{ für } |x| = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \text{ und } x = 0, \\ = 0 \text{ für jedes andere endliche } x. \end{cases}$$

Die Grenzfunktion $F(x)$ ist also *unstetig* für $|x| = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, im übrigen, insbesondere auch für $x = 0$ stetig (und zwar $= 0$).

Der für die Gleichmäßigkeit bzw. Ungleichmäßigkeit der Konvergenz maßgebende Wert von $|F(x) - F_\nu(x)|$ unterscheidet sich von $|F_\nu(x)|$ nur dadurch, daß er an den Stellen $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ eine *hebbare* Unstetigkeit aufweist, indem daselbst statt des Wertes $|x|$ für jedes ν der Wert 0 resultiert, dagegen, wie groß man auch ν annehmen mag, in hinlänglicher Nähe jener Stellen $|F(x) - F_\nu(x)|$ dem Werte $|x|$ beliebig nahe kommt.

Die Stellen $\frac{1}{\mu}$ ($\mu = 1, 2, 3, \ldots$) sind also Stellen *ungleichmäßiger* Konvergenz, während die Folge der $F_\nu(x)$ in der Nähe jeder einer Bedingung von der Form $\frac{1}{\mu+1} < |x| < \frac{1}{\mu}$ genügenden Stelle *gleichmäßig* konvergiert. Die 0 erscheint also als Häufungsstelle *beider Kategorien.* Da aber für jedes ν:

$$F(0) - F_\nu(0) = 0$$

und andererseits:

$$|F(x) - F_\nu(x)| < \varepsilon, \quad \text{wenn: } |x| < \varepsilon,$$

so ist $x = 0$ eine *singuläre Stelle gleichmäßiger Konvergenz.*

4. Setzt man:

$$\varphi(x, a) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + n(|x| - a)^2}, \tag{6}$$

so hat man für jedes reelle a:

$$\varphi(x, a) \begin{cases} = 1, & \text{wenn: } |x| = a, \\ = 0 & \text{für jedes andere } x. \end{cases} \tag{7}$$

Nun bedeute $a_1, a_2, \ldots a_\varkappa, \ldots$ irgend eine Folge *positiver* Zahlen und es werde die Funktionenfolge $F_\nu(x)$ definiert durch die Beziehung:

$$F_\nu(x) = x \cdot \sum_1^\nu {}_\varkappa\, \varphi(x, a_\varkappa), \tag{8}$$

so ergibt sich:

$$F_\nu(x) \begin{cases} = x & \text{für } |x| = a_1, a_2, \ldots a_\nu, \\ = 0 & \text{für jedes andere } x, \end{cases} \tag{9}$$

und sodann:

$$F(x) \equiv \lim_{\nu \to \infty} F_\nu(x) \begin{cases} = x & \text{für } |x| = a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots, \\ = 0 & \text{für jedes andere } x. \end{cases} \tag{10}$$

Da hiernach, wie groß man auch ν annehmen mag:

$$|F(x) - F_\nu(x)| = |x| \text{ für } |x| = a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, a_{\nu+3}, \ldots, \tag{11}$$

so ist jede *von $x = 0$ verschiedene Häufungsstelle* der $a_\varkappa$ eine Stelle *ungleichmäßiger* Konvergenz für die Folge der $F_\nu(x)$.

Haben die $a_\varkappa$ nur die *einzige* Häufungsstelle 0, ist also $\lim_{\varkappa \to \infty} a_\varkappa = 0$, so ist die Folge der $F_\nu(x)$ durchweg *gleichmäßig* konvergent. Denn wird $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben und darauf n so fixiert, daß $a_\varkappa < \varepsilon$ für $\varkappa \geqq n$, so hat man nach (11):

$$(12\,\mathrm{a}) \qquad |F(x) - F_\nu(x)| \leqq a_n < \varepsilon \text{ für } |x| \leqq a_n,$$

während für $|x| > a_n$ geradezu

$$(12\,\mathrm{b}) \qquad |F(x) - F_\nu(x)| = 0$$

wird (übrigens ein ganz lehrreiches Beispiel dafür, daß die aus Ungl. (12 a) zunächst nur zu entnehmende *punktweise gleichmäßige* Konvergenz an der Stelle $x = 0$ in Verbindung mit dem Umstande, daß in der Nähe von $x = 0$ *keine* Stellen ungleichmäßiger Konvergenz liegen, die *vollkommen gleichmäßige* Konvergenz in der Nähe von $x = 0$ nach sich zieht, wie es ja nach dem in Nr. 1 erwähnten Satze tatsächlich der Fall sein muß).

Wählt man dagegen für die $a_\varkappa$ irgend eine abzählbare Menge positiver Zahlen, die in irgend einem bei $x = 0$ beginnenden Intervall *überall dicht* liegen, so finden sich in der Nähe von $x = 0$ nur Stellen *ungleichmäßiger* Konvergenz, während die Stelle $x = 0$ auf Grund der Beziehung (12 a) als *singuläre*, nämlich *isolierte* Stelle *gleichmäßiger* Konvergenz erscheint. Versteht man z. B. unter den $a_\varkappa$ die Menge der *positiven rationalen* Zahlen (in welchem Falle $F(x)$ bei Beschränkung auf reelle x offenbar die mit x multiplizierte, total unstetige Dirichletsche Funktion vorstellt), so besitzt die Folge der $F_\nu(x)$ überhaupt keine andere Stelle *gleichmäßiger* Konvergenz, als jene *singuläre* und zwar *isolierte* Stelle $x = 0$, welche übrigens auch den *einzigen Stetigkeitspunkt* der Grenzfunktion $F(x)$ bildet.

5. Eine besonders anschauliche Modifikation des zuletzt angeführten Beispiels gewinnt man in folgender Weise. Unter Beibehaltung der in Gl. (6) angegebenen Bedeutung der Funktion $\varphi(x, a)$ werde gesetzt:

$$(13\,\mathrm{a}) \qquad F_\nu(x) = x \cdot \sum_{1}^{2^\nu - 1} {}_\varkappa\, \varphi\left(x, \frac{\varkappa}{2^\nu}\right).$$

Mit Rücksicht auf den zu vollziehenden Grenzübergang $\nu \longrightarrow \infty$ läßt sich dieser Ausdruck zunächst folgendermaßen ordnen:

$$(13\,b) \qquad F_\nu(x) = x \cdot \sum_1^{\nu}{}_\lambda \sum_1^{2^{\lambda-1}}{}_\varkappa\, \varphi\left(x, \frac{2\varkappa - 1}{2^\lambda}\right),$$

so daß also:

$$(14) \qquad F_\nu(x) \begin{cases} = x \text{ für } x = \dfrac{2\varkappa - 1}{2^\lambda} & \varkappa = 1, 2, \ldots 2^{\lambda-1}, \\ = 0 \text{ für } x \neq \dfrac{2\varkappa - 1}{2^\lambda} & \lambda = 1, 2, \ldots \nu. \end{cases}$$

Die Werte x, für welche $F_\nu(x) = x$ und somit (abgesehen von $x = 0$) *unstetig* wird, sind hiernach die sämtlichen dyadischen Brüche mit $1, 2, \ldots \nu$ Stellen, in dyadischer Schreibweise:

$$\begin{array}{l} 0{,}1 \\ 0{,}01 \quad 0{,}11 \\ 0{,}001 \quad 0{,}011 \quad 0{,}101 \quad 0{,}111 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underbrace{0{,}00 \ldots 01}_{\nu \text{ Stellen}} \quad 0{,}00 \ldots 11 \ldots 0{,}11 \ldots 1 \end{array}$$

Die mit wachsendem ν zunehmende Verdichtung dieser Unstetigkeitspunkte geschieht also durch fortgesetzte Halbierung der vorhandenen Stetigkeits-Intervalle in der Weise, daß beim Übergange von $F_\nu(x)$ zu $F_{\nu+1}(x)$ zu den in obigem Schema enthaltenen die dyadischen Brüche mit $\nu + 1$ Stellen hinzutreten.

Als Grenzfunktion für $\nu \longrightarrow \infty$ erscheint also, analog wie am Schlusse der vorigen Nummer, eine bis auf den einzigen Stetigkeitspunkt $x = 0$ *total unstetige Funktion*:

$$(15) \quad F(x) = x \cdot \sum_1^{\infty}{}_\lambda \sum_1^{2^{\lambda-1}}{}_\varkappa\, \varphi\left(x, \frac{2\varkappa-1}{2^\lambda}\right) \begin{cases} = x \text{ für } x = \dfrac{2\varkappa-1}{2^\lambda} & \varkappa = 1, 2, \ldots 2^{\lambda-1}, \\ = 0 \text{ für } x \neq \dfrac{2\varkappa-1}{2^\lambda} & \lambda = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Des weiteren ergibt sich:

$$(16)\quad \begin{aligned} F(x) - F_\nu(x) &= x \cdot \sum_{\nu+1}^{\infty}{}_{\lambda} \sum_{1}^{2^{\lambda-1}}{}_{\varkappa}\, \varphi\left(x, \frac{2\varkappa - 1}{2^\lambda}\right) \\ &\begin{cases} = x \text{ für } x = \dfrac{2\varkappa - 1}{2^\lambda} \begin{pmatrix} \varkappa = 1, 2, \ldots 2^{\lambda-1} \\ \lambda = \nu + 1, \nu + 2, \ldots \end{pmatrix}, \\ = 0 \text{ für jedes andere } x. \end{cases} \end{aligned}$$

Wie *groß* man auch ν annehmen möge, so liegen die Punkte x, für welche

$$(17)\qquad F(x) - F_\nu(x) = x$$

wird, im Bereiche $0 < |x| < 1$, insbesondere in der Umgebung von $x = 0$, *überall dicht*, und man hat daher in keinem zusammenhängenden Teilbereiche:

$$(18)\qquad |F(x) - F_\nu(x)| < \varepsilon$$

außer in der Umgebung von $x = 0$, sofern $|x| < \varepsilon$ ist. Es findet somit an der Stelle $x = 0$ *punktweise gleichmäßige*, sonst durchweg *ungleichmäßige* Konvergenz statt.

6. Es sei jetzt $F_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine zum mindesten *im Innern* eines Bereiches (B) *konvergierende* Folge eindeutiger *analytischer* Funktionen regulären Verhaltens und es werde wieder gesetzt:

$$(19)\qquad \lim_{\nu \to \infty} F_\nu(x) = F(x).$$

Dann soll gezeigt werden, daß es im Innern von (B) *keinen singulären Punkt gleichmäßiger Konvergenz* geben kann.

Angenommen, x' sei ein im Innern von (B) gelegener Punkt, von dem also zum mindesten feststehen würde, daß bei beliebig vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$:

$$(20)\qquad |F(x) - F_\nu(x)| < \varepsilon \text{ für } \nu > n \text{ und: } |x - x'| < \varrho_\varepsilon.$$

Wir zeigen zunächst, daß dann $F(x)$ für eine gewisse Umgebung von x' *beschränkt* ist. Man hat identisch:

$$\begin{aligned} F(x) - F(x') = (F_n(x) - F_n(x')) &+ (F(x) - F_n(x)) \\ &- (F(x') - F_n(x')) \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x')| &< |F_n(x) - F_n(x')| + |F(x) - F_n(x)| \\ (21) \qquad + |F(x') - F_n(x')| &< |F_n(x) - F_n(x')| + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Da $F_n(x)$ regulär, also *stetig* an der Stelle x', so läßt sich ein $\varrho < \varrho_\varepsilon$ so fixieren, daß:

$$(22) \qquad |F_n(x) - F_n(x')| < \varepsilon \text{ für } |x - x'| \leq \varrho < \varrho_\varepsilon,$$

und es geht somit Ungleichung (21) in die folgende über:

$$(23) \qquad |F(x) - F(x')| < 3\varepsilon \text{ für } |x - x'| \leq \varrho,$$

welche zeigt, daß $F(x)$ für $|x - x'| \leq \varrho < \varrho_\varepsilon$ *beschränkt* ist. Das gleiche gilt dann, wie aus Ungl. (20) hervorgeht, für die *Gesamtheit* der $F_\nu(x)$ zunächst, falls $\nu \geq n$, schließlich aber, mit Hinzunahme der (als regulär) gleichfalls *beschränkten* Funktionen $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_{n-1}(x)$, für die *Gesamtheit aller* $F_\nu(x)$. Daraus folgt aber mit Benützung eines bekannten von Herrn Vitali herrührenden Satzes[1]), daß nach Annahme von $\varrho' < \varrho$ die Folge der $F_\nu(x)$ *im Bereiche* $|x - x'| \leq \varrho'$ *gleichmäßig* konvergiert. Hiermit ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen, der man im übrigen mit Benützung der in Nr. 1 erklärten Terminologie auch die folgende Fassung geben kann: Liegt x' im Innern des Konvergenzbereiches der regulären Funktionenfolge $(F_\nu(x))$ und steht nur soviel fest, daß die $F_\nu(x)$ *im Punkte* x' *gleichmäßig* konvergieren, so konvergieren sie auch *in der Nähe* von x' *gleichmäßig*.

Es kann hiernach, ebensowenig wie einzelne *singuläre Punkte gleichmäßiger* Konvergenz, auch keine *singulären Linien* dieser Art geben, weder solche, die ganz *in das Innere* des Konvergenzbereiches fallen, noch solche, die sich bis an die *Begrenzung* erstrecken. In dieser Hinsicht liegen also hier die Verhältnisse etwas anders, wie bezüglich des etwaigen Auftretens von Stellen *ungleichmäßiger* Konvergenz in analogem Zusammenhange. Allerdings ist auch, wie zuerst von Herrn

---

[1]) Annali di Mat. (3), 10 (1904), p. 65. Vgl. den sehr schönen und einfachen Beweis des fraglichen Satzes von E. Lindelöf: Bull. Soc. Math. de France 41 (1913), p. 171.

Runge[1]) bewiesen wurde, das Vorkommen von einzelnen *Punkten* oder *Linien ungleichmäßiger* Konvergenz *im Innern* des Konvergenzbereiches einer im übrigen gleichmäßig konvergierenden, regulären Funktionenfolge ausgeschlossen, dagegen können derartige *Linien* vorhanden sein, die sich bis an die *Begrenzung* erstrecken, und zwar ohne den Charakter der *Grenzfunktion* als einer analytischen Funktion regulären Verhaltens zu beeinträchtigen[2]).

---

[1]) Acta Math. 6 (1885), S. 247. Der Rungesche Beweis beruht auf der Darstellung von $F_{\nu+p}(x) - F_{\nu}(x)$ durch ein über eine geschlossene Linie gleichmäßiger Konvergenz erstrecktes Randintegral. Noch etwas einfacher gelangt man zu dem gleichen Ziele durch Anwendung des Satzes, daß das *Maximum* von $|F_{\nu+p}(x) - F_{\nu}(x)|$ für den von einer solchen geschlossenen Linie begrenzten Bereich auf dieser Begrenzung liegen muß.

[2]) Ebendas. S. 248.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1919

Band/Volume: 1919

Autor(en)/Author(s): Pringsheim Alfred

Artikel/Article: Über singuläre Punkte gleichmäßiger Konvergenz 419-430