Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1919. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1919
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Angenäherte Geradstreckung der Kreisbögen.

Von **Ludwig Burmester.**

Vorgetragen in der Sitzung am 6. Dezember 1919.

Die Konstruktion einer Strecke, die der Länge eines Kreisbogens angenähert gleich ist, nennen wir eine angenäherte Geradstreckung anstatt Rektifikation. Die angenäherte Geradstreckung für Kreisbögen bis 90°, welche wir betrachten wollen, wird sich aus den nachherigen Darlegungen ergeben und lautet:

Ist in Fig. 1 ein Kreisbogen as mit dem Mittelpunkt m gegeben und zu dem Halbkreis k bis zum Punkt b ergänzt, so halbiere man den Radius mb im Punkt $\mathfrak{m}$, beschreibe um ihn mit dem Radius $\mathfrak{m}a$ den Kreisbogen $\mathfrak{k}$ und ziehe seinen durch den Punkt s gehenden Radius $\mathfrak{m}\mathfrak{s}$; dann ist die Sehne $a\mathfrak{s}$ angenähert gleich dem Kreisbogen as.

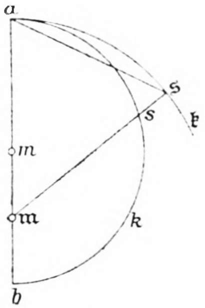

Fig. 1

Die uralte Annahme[1]), daß die Länge eines Kreises gleich der dreifachen Länge seines Durchmessers, also $\pi = 3$ sei, hat

[1]) Diese Annahme ist ausführlich erörtert in J. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik, Bd. II, S. 108 (1903), wo auch hingewiesen wird auf die Beschreibung des Tempels Salomons in der Bibel I. Könige, Kap. 7, v. 23—26. „Und er machte ein Meer, gegossen, von einem Rand zum anderen zehn Ellen weit, rund umher, und fünf Ellen hoch, und eine Schnur, dreißig Ellen lang, war das Maß ringsum. Es stund auf

in einer eigenartigen Weise Anlaß zu dieser vornehmlichen Geradstreckung gegeben. Denn es liegt der Gedanke nahe, daß aus dieser groben Annäherung, die wir als einen Grenzfall auffassen, durch Verallgemeinerung eine feinere Annäherung für Kreisbögen von mäßiger Länge hervorgehen könnte.

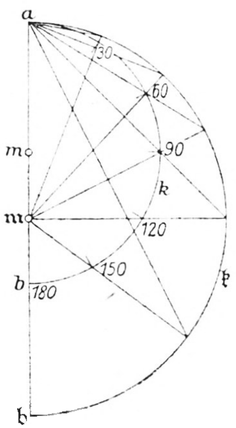

Fig. 2

Zu diesem Zweck verlängen wir in Fig. 2 den Durchmesser $a\,b$ des Halbkreises k um dessen Radius r bis zum Punkt $\mathfrak{b}$ und beschreiben über $a\,\mathfrak{b}$ als Durchmesser den Halbkreis $\mathfrak{k}$, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ ist. Nach jener Annahme ist dann $a\,\mathfrak{b} = 3\,r$ grob angenähert gleich der Länge des Halbkreises k. Wir nehmen nun an, der Punkt b werde auf dem Halbkreis k beispielsweise in die Lagen 150, 120, 90, 60, 30 Grade bewegt, die den vom Punkt a aus gemessenen Kreisbögen entsprechen. Dadurch werden die Lagen des mit dem Punkt b bewegten Radius $\mathfrak{m}\,\mathfrak{b}$ des Halbkreises $\mathfrak{k}$ und in ihm die von dem Punkt a ausgehenden Sehnen bestimmt.

Nun mußte vermittelst einer sehr genau ausgeführten Zeichnung, in der für den Halbkreis k der Radius $r = 100$ mm ist, geprüft werden, ob und wie weit sich diese Verallgemeinerung als zweckmäßig erweise. In der sechsmal kleineren Fig. 3 wollen wir die Ausführung dieser Zeichnung beschreiben. Zuvörderst bestimmen wir nach der sehr angenäherten Konstruktion von Kochanski[1]) die Länge des Halbkreises k, dessen

zwölf Rinder. Seine Dicke aber war eine Hand breit, und sein Rand war wie eines Bechers Rand, wie eine aufgegangene Lilie.“ Hiernach war es eine mit Wasser gefüllte, große, eherne Schale. Ferner auch II. Chronika, Kap. 4, v. 2. „Und ein Maß von dreißig Ellen machte es umher begreifen.“

[1]) Die hier ausgeführte, bekannte Konstruktion folgt etwas vereinfacht aus der in Acta Eruditorium 1685, p. 397 von Adam Kochanski mitgeteilten Konstruktion.

Radius r ist. Indem wir im Punkt b an den Halbkreis k die Tangente legen und vermittels des Winkeldreieckes die unter 30^0 gegen den Durchmesser ba geneigte Gerade mh ziehen, welche die Tangente im Punkt H schneidet, und auf ihr die dem Radius gleichen Strecken $H\mathrm{I}$, $\mathrm{I}\,\mathrm{II}$, $\mathrm{II}\,J$ abtragen, also $HJ = 3r$ machen, ergibt sich die Strecke Ja sehr angenähert gleich der Länge $r.\pi$ des Halbkreises.

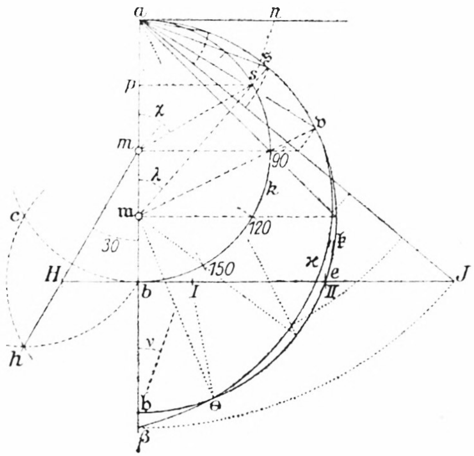

Fig. 3.

Die Gerade mh wird auch bestimmt durch die um die Punkte b, c mit dem Radius r beschriebenen beiden Kreisbögen, die sich in dem Punkt h schneiden; und demnach ist die Kochanskische Konstruktion dadurch ausgezeichnet, daß sie zu ihrer Ausführung nur eine einzige Zirkelöffnung gleich dem Radius des Kreises erfordert.

Durch Rechnung ergibt sich die Strecke

$$Ja = \sqrt{(2r)^2 + (3r - r\tan 30^0)^2} = r\sqrt{4 + (3 - \tan 30^0)^2}$$
$$= r.3{,}14153;$$

und die Zahl 3,14153 stimmt in vier Dezimalen mit der Zahl $\pi = 3{,}14159$ überein.

Ferner sei noch erwähnt, wenn e den Schnittpunkt des Halbkreises $\mathfrak{k}$ mit der Tangente HJ bezeichnet, daß die Strecke be $= \sqrt{\left(\frac{3}{2}r\right)^2 - \left(\frac{1}{2}r\right)^2} = r\sqrt{2}$, und die Strecke $He = r \tan 30^0$ $+ r\sqrt{2} = r\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}\right) = r.1{,}9915$ ist. Mithin ist die Strecke He angenähert gleich der Strecke $Hu = 2r$, folglich lich fallen die Punkte e, u zeichnerisch zusammen, und es ist $\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}$ angenähert gleich 2.

Teilen wir nun die Strecke Ja beispielsweise in sechs gleiche Teile, so sind die Strecken von dem Punkt a bis an die Teilpunkte sehr angenähert gleich den entsprechenden um je 30^0 zunehmenden Kreisbögen. Diese Strecken übertragen wir durch um a beschriebene Kreisbögen auf die entsprechenden Sehnen des Halbkreises $\mathfrak{k}$. Dadurch wird eine Kurve $\varkappa$ bestimmt, die wir die Abweichkurve von dem Halbkreis $\mathfrak{k}$ nennen. Die Zeichnung mit dem Maß $r = 100$ mm ergibt, daß die Abweichkurve für die Kreisbögen bis 90^0 mit dem Bogen $a\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{d}$ auf dem Halbkreis $\mathfrak{k}$ zeichnerisch zusammenfällt, wobei die Sehne $a\,\mathfrak{d}$ dem Viertelkreis auf k entspricht. Bei der theoretischen Fortsetzung der Abweichkurve $\varkappa$ erreicht die innere Abweichung von $\mathfrak{k}$ ungefähr für 150^0 ein auf der Sehne gemessenes Maximum von 6 mm, verkleinert sich bis zu dem Schnittpunkt θ, den die Abweichkurve $\varkappa$ mit dem Halbkreis $\mathfrak{k}$ bildet, und die äußere, negative Abweichung von ihm ist für 180^0 zeichnerisch, $\mathfrak{b}\beta = -14$ mm. Dem Schnittpunkt θ entspricht sehr nahe ein Bogen von 168^0, dessen Länge also wieder sehr angenähert gleich der Sehne $a\theta$ ist.

Hiernach hat die Zeichnung ergeben, daß die Geradstreckung in einer Reichweite für Kreisbögen bis 90^0 und Radien bis 100 mm sich praktisch bewährt. Durch diese Darlegungen ist nun der Gedankengang gekennzeichnet, der zu dieser vornehmlichen Geradstreckung geführt hat.

Um die Annäherung der durch die Geradstreckung bestimmten Längen der Sehnen in dem Halbkreis $\mathfrak{k}$ an die Längen der um je 10^0 zunehmenden Kreisbögen des Halbkreises k zu berechnen, nehmen wir dessen Radius in Fig. 3 als Einheit an, setzen den Winkel $a m s = \chi$, der dem Kreisbogen $\overset{\frown}{as}$ entspricht, ferner den Winkel $a \mathfrak{m} \mathfrak{s} = \lambda$ und fällen auf ab die Senkrechte sp.

Danach ist $sp = \sin\chi$ und $\mathfrak{m}p = \cos\chi + \frac{1}{2} = \cos\chi + \cos 60^0$, folglich

$$\tan\lambda = \frac{\sin\chi}{\cos\chi + \cos 60^0} = \frac{\sin\chi}{2\cos\frac{\chi + 60^0}{2}\cos\frac{\chi - 60^0}{2}}.$$

Wegen $\mathfrak{m}\mathfrak{s} = \frac{3}{2}$ ist die Sehne

$$a\mathfrak{s} = 3\sin\frac{\lambda}{2}.$$

Vermittelst dieser beiden Gleichungen wird die konstruktiv bestimmte Sehne $a\mathfrak{s}$ für die um je 10^0 zunehmenden Winkel χ berechnet; sodann werden die berechneten Längen der zugehörigen Kreisbögen aus der Tabelle in Ludwig Schröns „Siebenstelligen Logarithmen 1877“ entnommen. Hiernach ergeben sich in der Rechnungsfolge für die Werte des Winkels χ die entsprechenden Annäherungswerte der Sehnen $a\mathfrak{s}$, ferner die Längen der Kreisbögen as, die Abweichungen oder die Fehler $f = \overline{a\mathfrak{s}} - \overset{\frown}{as}$, und auch die relativen Fehler $v = \dfrac{\overline{a\mathfrak{s}} - \overset{\frown}{as}}{\overset{\frown}{as}}$.

Diese Werte sind der theoretischen Vollständigkeit halber bis für $\chi = 180^0$ in der Tabelle I zusammengestellt, deren Spalten mit den Werten f und v bei den Annäherungen in Betracht kommen. Dabei sind die Annäherungswerte der Sehnen $\overline{a\mathfrak{s}}$ des Halbkreises $\mathfrak{k}$ bis zum Punkt θ um die Fehler f länger als die Kreisbögen. Die Fehlerstrecken sind proportional den Radien dieser Kreisbögen, also gleich $r.f$; und bei dem Radius $r = 100$ mm, wie in jener Zeichnung angenommen wurde, ist z. B. für 90^0 die berechnete Fehlerstrecke $r.f = 100 \cdot 0{,}00639 = 0{,}639$ mm, für 70^0 gleich $0{,}177$ mm, also ungefähr $^1/_5$ Millimeter. Bei genauester Ausführung einer solchen Zeichnung kann ein Konstruktionsfehler von ungefähr einem halben Millimeter entstehen, der zeichnerisch kaum bemerkbar ist.

Umgekehrt wird in Fig. 1 zu einer gegebenen, als Sehne $a\mathfrak{s}$ in den Halbkreis $\mathfrak{k}$ gelegten Strecke der ihr angenähert gleiche Kreisbogen as auf dem Halbkreis k konstruiert; dabei darf diese Strecke nicht länger als dessen Viertelkreis sein. Wenn ein Kreisbogen gegeben ist, zu dem ein angenähert gleicher Kreisbogen auf einem gegebenen Kreis bestimmt werden soll, so wird jener Kreisbogen erst geradgestreckt und dann zu der erhaltenen Strecke der zugehörige Kreisbogen wie vorhin konstruiert.

Um noch diese Geradstreckung mit der bekannten Geradstreckung zu vergleichen, die in Fig. 3 ausgeführt lautet:

„Man mache $b\mathfrak{b} = bm$, ziehe an den Halbkreis k im Punkt a die Tangente, ferner die Gerade $\mathfrak{b}s$, welche sie in einem Punkt n schneidet; dann ist die Strecke an angenähert gleich dem Kreisbogen as“.

Bezeichnet ν den Winkel $a\mathfrak{b}n$, so ist, wenn wir den Radius r als Einheit annehmen:

$$\tan\nu = \frac{\sin\chi}{2+\cos\chi} \quad \text{und} \quad an = \frac{3\sin\chi}{2+\cos\chi}.$$

Hiernach ergeben sich für die um je 10^0 bis 90^0 zunehmenden Werte des Winkels χ die berechneten Annäherungswerte $\overline{an}$, die kleiner als die Kreisbögen sind. In der Tabelle II sind die Werte der Fehler $f = \widehat{as} - \overline{an}$ und der relativen Fehler $v = \dfrac{\widehat{as} - an}{\widehat{as}}$ zusammengestellt.

Da die Fehler f und v in der ersten Tabelle bedeutend kleiner sind als in der zweiten, so folgt, daß jene vornehmliche Geradstreckung in Annäherung und Reichweite diese andere Geradstreckung sehr übertrifft.

Tabelle I.

χ	f	v	$\overline{a\mathfrak{z}}$	$\widehat{a s}$
10^0	0,00000	0,00000	0,17453	0,17453
20^0	0,00001	0,00001	0,34907	0,34906
30^0	0,00002	0,00005	0,52362	0,52360
40^0	0,00011	0,00015	0,69824	0,69813
50^0	0,00032	0,00037	0,87299	0,87267
60^0	0,00081	0,00077	1,04801	1,04720
70^0	0,00177	0,00145	1,22350	1,22173
80^0	0,00351	0,00251	1,39977	1,39626
90^0	0,00639	0,00407	1,57719	1,57080
100^0	0,01093	0,00626	1,75626	1,74533
110^0	0,01765	0,00919	1,93751	1,91986
120^0	0,02692	0,01285	2,12132	2,09440
130^0	0,03858	0,01700	2 30751	2,26893
140^0	0,05072	0,02076	2,49418	2,44346
150^0	0,05741	0,02192	2,67540	2,61799
160^0	0,04506	0,01614	2,83759	2,79253
170^0	— 0,01132	— 0,00381	2,95574	2,96706
180^0	— 0,14159	— 0,04507	3,00000	3,14159

Tabelle II.

χ	f	v	$\overline{a n}$	$\widehat{a s}$
10^0	0,00000	0,00000	0,17453	0,17453
20^0	0,00002	0,00008	0,34904	0,34906
30^0	0,00023	0,00044	0,52337	0,52360
40^0	0,00097	0,00139	0,69716	0,69813
50^0	0,00308	0,00353	0,89659	0,87267
60^0	0,00797	0,00761	1,03923	1,04720
70^0	0,01803	0,01476	1,20370	1,22173
80^0	0,03706	0,02654	1,35920	1,39626
90^0	0,07080	0,04507	1,50000	1,57080