Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1920. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1920
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Zur Theorie der reziproken Radien.

Von A. Voss.

Vorgelegt in der Sitzung am 8. Mai 1920.

Die folgenden Betrachtungen beabsichtigen, die allgemeinsten Beziehungen zwischen zwei Flächen, die vermöge der Transformation R durch reziproke Radien auseinander entspringen, zu entwickeln. Dabei hat sich eine große Zahl interessanter invarianter Gleichungen ergeben, die bisher keine Beachtung gefunden zu haben scheinen, von denen einige der wichtigsten hier angeführt werden sollen.

§ I.

Invarianten bei den Transformationen R.

Wird die auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogene Fläche $f(x, y, z) = 0$ durch die Gleichungen der Reziprozität[1])

$$1)\qquad x = \frac{x_1}{r_1^2},\; y = \frac{y_1}{r_1^2},\; z = \frac{z_1}{r_1^2};\; x_1 = \frac{x}{r^2},\; y_1 = \frac{y}{r^2},\; z_1 = \frac{z}{r^2}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,\; r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,\; xx_1 + yy_1 + zz_1 = 1$$

in Bezug auf den Koordinatenanfang O transformiert, so entspricht jedem Punkte P von f mit den Koordinaten x, y, z ein Punkt P' mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 der Fläche f_1 $(x_1\, y_1\, z_1) = 0$, und es ist

[1]) Von imaginären Beziehungen wird nur, so lange nicht dies besonders bemerkt wird, abgesehen. Der Kürze wegen ist $rr_1 = 1$, nicht $rr_1 = a^2$ gewählt; die letztere Annahme würde allerdings der Homogenität der Formeln mehr entsprechen.

$$f_1(x_1\, y_1\, z_1) = f(x\, y\, z) = 0 \tag{2}$$

die Gleichung der letzteren. Die beiden Flächen f und f_1 werden im folgenden als Fläche P und Fläche P_1 bezeichnet.

Die aus 2) folgende Gleichung

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}$$

nebst den analogen für die Differentialquotienten nach y_1, z_1 liefert mit Hilfe der Gleichungen 1) sofort

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x} r^2 - 2\frac{x_1}{r^4}\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x} + y_1\frac{\partial f}{\partial y} + z_1\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

also für

$$S = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z},\quad S_1 = x_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial f_1}{\partial y_1} + z_1\frac{\partial f_1}{\partial z_1} \tag{3}$$

die Grundgleichungen der Transformation R

$$\text{I)}\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x} r^2 - 2Sx, \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_1} &= \frac{\partial f}{\partial y} r^2 - 2Sy, \\ \frac{\partial f_1}{\partial z_1} &= \frac{\partial f}{\partial z} r^2 - 2Sz, \end{aligned}\right.$$

also auch, da nach 1) $S_1 = -S$ ist,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} r_1^2 - 2S_1 x_1, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f_1}{\partial y_1} r_1^2 - 2S_1 y_1, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f_1}{\partial z_1} r_1^2 - 2S_1 z_1. \end{aligned}\right.$$

Setzt man $\Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = \Delta^2$, $\Sigma\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 = \Delta_1^2$, wobei die Summation sich auf x, y, z etc. erstreckt, so folgt aus I)

$$\Delta_1^2 = \Delta^2 r^4.$$

Führt man für die Flächennormalen in den Punkten P, P_1 die Bezeichnungen $X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1$ ein, und setzt

$$\Delta_1 = \Delta r^2,$$

so hat man auch aus I)

$$\text{I a)} \qquad \begin{cases} X_1 = X - 2 S_2 \dfrac{x}{r^2}, \\[2ex] Y_1 = Y - 2 S_2 \dfrac{y}{r^2}, \\[2ex] Z_1 = Z - 2 S_2 \dfrac{z}{r^2} \end{cases}$$

für $S_2 = xX + yY + zZ = \Sigma(xX)$.

In I a) ist damit eine bestimmte Richtung der Normalen des Punktes P_1 festgesetzt, die nicht immer zweckmäßig ist. Wählt man nämlich für die Koordinaten von P und P_1 die Parameter u, v ihrer Ausdrücke auf den Flächen P und P_1 und bezeichnet ihre Differentialquotienten nach den u resp. v, uu, uv etc. durch angehängte Indizes, so daß

$$x_{1u} = \frac{x_u}{r^2} - 2\frac{x r_u}{r^3},$$

so sind die Richtungscosinus der Normale in P den Unterdeterminanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{Vmatrix}$$

proportional, und die X_1, Y_1, Z_1 proportional den Faktoren von c_1, c_2, c_3 in der Determinante

$$\Sigma = \begin{vmatrix} x_{1u} & y_{1u} & z_{1u} \\ x_{1v} & y_{1v} & z_{1v} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Für Σ erhält man durch Ränderung mit der vierten Kolonne

$$\frac{r_u}{r^3}, \quad \frac{r_v}{r^3}, \quad 0, \quad 1$$

und geeignete Addition der Elemente derselben zu den drei ersten Kolonnen, wenn man darauf die mit $\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}$ multiplizierten drei ersten Kolonnen von der letzten abzieht,

$$\Sigma = \frac{1}{r^4}\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u & 0 \\ x_v & y_v & z_v & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & -\left(\frac{c_1 x + c_2 y + c_3 z}{r^2}\right) \\ 2x & 2y & 2z & -1 \end{vmatrix}$$

oder, wenn $x = y_u z_v - z_u x_v : \sqrt{eq - f^2}$ etc. gesetzt wird

$$\lambda X_1 = -\frac{1}{r^4} X \sqrt{eq - f^2} + \frac{2x}{r^6} \Sigma x X \cdot \sqrt{eq - f^2}$$

und es tritt an die Stelle von I a)

$$\text{I b)} \quad \begin{cases} X_1 = -X + 2x \Sigma \frac{xX}{r^2}, \\ Y_1 = -Y + 2x \Sigma \frac{xX}{r^2}, \\ Z_1 = -Z + 2x \Sigma \frac{xX}{r^2}. \end{cases}$$

In Bezug auf die Formeln I) ist vielleicht noch folgende Bemerkung am Platze, die sich auf die partiellen Differentialquotienten p, q; p_1, q_1 der Flächen P, P_1 bezieht, wobei

$$p \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad p_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \text{ etc. ist.}$$

Man erhält dann durch Division der beiden ersten Gleichungen I) durch die dritte

$$-p_1 = -\frac{pr^2 + 2x(px + qy - z)}{r^2 + 2z(px + qy - z)},$$

$$-q_1 = -\frac{qr^2 + 2y(px + qy - z)}{r^2 + 2z(px + qy - z)}.$$

Fügt man unter der Bezeichnung $w = px + qy - z$ die Identität

$$1 = \frac{r^2 + 2zw}{r^2 + 2zw}$$

hinzu, so erhält man

$$-w_1 = -(p_1 x_1 + q_1 y_1 - z_1) = w : r^2 + 2wz,$$

also durch weitere Umrechnung

$$-p = -\frac{p_1 r_1^2 + 2x_1 w_1}{r_1^2 + 2z_1 w_1}, \quad -q = -\frac{q_1 r_1^2 + 2y_1 w_1}{r_1^2 + 2z_1 w_1}.$$

Die Einführung der p, q jedoch würde für die Untersuchungen der folgenden Paragraphen sehr weitläufige Rechnungen mit sich bringen.

Von den verschiedenen Beweisen für die Invarianz der Krümmungslinien bei der Transformation R ist wohl der aus dem Dupinschen Satze folgende, auf das dreifache Orthogonalsystem, gebildet aus f, seinen Parallelflächen und den aus den Flächennormalen längs der Krümmungslinien bestehenden beiden Developpablen bezogene folgende besonders anschaulich. Darboux gibt (Théorie générale des surfaces, I, S. 208, vgl. auch Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 2. Auflage, 1910, S. 110) einen anderen auf den Grundgleichungen der Flächentheorie beruhenden Beweis. Endlich kann man sich auch des Satzes (vgl. Salmon-Fiedler, Anal. Geometrie des Raumes 1863, 3. Auflage, 1880, S. 40) bedienen, daß die Richtungen der Krümmungslinien diejenigen sind, nach denen eine Kugel die Fläche stationär berührt, d. h. in einer Kurve mit Spitze durchschneidet. Hier soll der Beweis durch den direkten Nachweis der Invarianz der Gleichung der Krümmungslinien erbracht werden.

Setzt man

$$D_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{d\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)}{dx_1} \end{vmatrix} \text{[1]},$$

[1] Von der Determinante D_1 und der analogen auf f bezogenen D ist nur die erste Kolonne hingeschrieben.

so daß $D_1 = 0$ die Gleichung der Krümmungslinien von $f_1 = 0$ darstellt, so hat man nach I)

$$4)\qquad d\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) = r^2 d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + 2 r\, d r \frac{\partial f}{\partial x} - 2 S\, d x - 2 x\, d S$$

$$d S = d f + \Sigma x\, d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \Sigma x\, d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Rändert man nun D_1 mit den Elementen der vierten Kolonne

$$S, \quad d S, \quad \frac{d r}{r^3}, \quad 1$$

und fügt dieselben mit $2x$, $2y$, $2z$ multipliziert den drei ersten Kolonnen hinzu, so wird

$$D_1 = \begin{vmatrix} d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + 2 r\, d r \frac{\partial f}{\partial x} - 2\, d x\, S & - & - & d S \\ \frac{\partial f}{\partial x} r^2 & - & - & S \\ \frac{d x}{r^2} & - & - & \frac{d r}{r^3} \\ 2 y & 2 y & 2 z & 1 \end{vmatrix}.$$

Zieht man jetzt die mit den $\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}$ multiplizierten drei ersten Kolonnen von der letzten ab, so erhalten die Elemente der letzteren, wie unmittelbar zu sehen, die Werte 0, 0, 0, -1, so daß

$$\text{II)}\qquad D_1 = - r^2 D \quad \text{oder} \quad r_1 D_1 + r D = 0$$

ist. Man findet übrigens für

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ d x \\ x \end{vmatrix}, \quad J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ d x_1 \\ x_1 \end{vmatrix},$$

$$J_1 = \frac{1}{r^2} J,$$

so daß auch

$$D_1 J_1 = -JD$$

eine bis aufs Vorzeichen absolute Invariante ist, zu der man noch

$$\frac{D_1}{\Delta_1} = -\frac{D}{\Delta}$$

hinzufügen kann.

Die Invariante D hat übrigens noch eine allgemeinere Bedeutung. Aus der bekannten Formel für den kürzesten Abstand δ zweier Strahlen mit den Richtungscosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und dem Neigungswinkel θ, welche von den Punkten x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 ausgehen,

$$\delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\theta}}$$

folgt für den Fall, daß $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ durch X, Y, Z; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ durch $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ ersetzt werden

$$\delta = \begin{vmatrix} dx \\ X \\ dX \end{vmatrix} : \Omega, \quad \text{wo } \Omega = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit der Determinante

$$|X \; X_u \; X_v| = \sqrt{EG - F^2},$$

wobei für die Koordinaten x, y, z der Ausgangsfläche und die Richtungscosinus die Parameter u, v gewählt sind, und

$$\Sigma x_u X_u = e, \quad \Sigma x_u X_v = f_1, \quad \Sigma x_v X_u = f, \quad \Sigma x_v X_v = g$$
$$\Sigma X_u^2 = E, \quad \Sigma X_u X_v = F, \quad \Sigma X_v^2 = G$$

gesetzt ist, so erhält man

$$\delta = -\begin{vmatrix} e\,du + f\,dv & f'\,du + g\,dv \\ E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \end{vmatrix} : \Omega \sqrt{EG - F^2}.$$

Diese Formel, die sich in E. Kummers Abhandlung über geradlinige Strahlensysteme (J. v. Crelle, Bd. 57) nicht findet, ist natürlich längst bekannt, aber ihre weitläufige Ableitung in Bianchis Vorlesungen über Differentialgeometrie läßt sich, wie gezeigt, durch die Multiplikation mit der Determinante sehr vereinfachen [1]).

Setzt man voraus, daß die Ausgangsfläche x, y, z zu den Strahlen normal steht, so hat man mit der Determinante $|X\, x_u\, x_v|$ zu multiplizieren und erhält dann sofort bei Benutzung der gebräuchlichen Bezeichnungen für die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung e, f, g; E, F, G [2]) die Gleichung

$$\delta = \begin{vmatrix} e\,du + f\,dv, & f\,du + g\,dv \\ E\,du + F\,dv, & F\,du + G\,dv \end{vmatrix} : \sqrt{eq - f^2}\,\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}.$$

Andererseits hat man aber auch

$$D = \Delta^2 \begin{vmatrix} X \\ dX \\ dx \end{vmatrix} = \frac{\Delta^2}{\sqrt{eq - f^2}} \begin{vmatrix} E\,du + F\,dv, & F\,du + G\,dv \\ e\,du + f\,dv, & f\,du + q\,dv \end{vmatrix},$$

also

$$\delta = \frac{D}{\Delta^2}\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}, \quad \delta_1 = \frac{D_1}{\Delta_1^2}\sqrt{dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2},$$

so daß auch

$$\frac{\delta}{\delta_1} = -r^2\sqrt{\frac{dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2}{dX^2 + dY^2 + dZ^2}}$$

oder, wenn man die Bogenelemente der sphärischen Abbildung der Normalensysteme der beiden durch die Transformation R zugeordneten Flächen durch Ω, Ω_1 bezeichnet,

$$\frac{\delta}{r}\,\Omega + \frac{\delta_1}{r_1}\,\Omega_1 = 0,$$

womit das Verhältnis der kürzesten Abstände je zweier unendlich benachbarter korrespondierender Normalenpaare der Flächen P und P_1 ausgedrückt ist.

---

[1]) Vgl. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig, Teubner, 2. Aufl., 1910, S. 131 und 263, 264.

[2]) Diese von R. Hoppe eingeführte Bezeichnung scheint mir immer noch zweckmäßiger als die gegenwärtig meist benutzte E, F, G; L, M, N; (bei Bianchi E, F, G; $D\, D_1\, D_{11}$).

§ II.

Das charakteristische Dreieck der Transformation R.

Aus den Gleichungen I) oder Ia) folgt sofort, was übrigens auch sehr leicht geometrisch zu ersehen ist, daß die Normalen N, N_1 der Punkte P, P_1 sich in einem Punkte Q mit den Koordinaten ξ, η, ζ schneiden, der gleich weit von P und P_1 entfernt ist[1]). Dies zeigt sich sofort auch analytisch. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} \xi &= x + \sigma X = x_1 + \sigma_1 X_1 \\ \eta &= y + \sigma Y = y_1 + \sigma_1 Y_1 \\ \zeta &= z + \sigma Z = z_1 + \sigma_1 Z_1 \end{aligned}$$

so folgt nach § I, Ia)

$$x + \sigma X = \frac{x}{r^2} + \sigma_1 \left(X - 2\,\frac{S_2 x}{r^2}\right)$$

und diese Gleichung wird zur Identität für $\sigma = \sigma_1$, wenn man zugleich $\sigma = \dfrac{1-r^2}{2\,S_2}$ setzt.

Es sind daher die Koordinaten des Punktes Q

$$1)\qquad \begin{aligned} \xi &= x + \frac{1-r^2}{2\,S_2}\,X = x + \frac{1-r^2}{2\,S}\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta \\ \eta &= y + \frac{1-r^2}{2\,S_2}\,Y = y + \frac{1-r^2}{2\,S}\,\frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta \\ \zeta &= z + \frac{1-r^2}{2\,S_2}\,Z = z + \frac{1-r^2}{2\,S}\,\frac{\partial f}{\partial z}\,\Delta, \end{aligned}$$

der mit den Punkten P und P_1 das charakteristische Dreieck bildet. Daraus folgt:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 + \frac{(1-r^2)^2}{4\,S_2^2}$$

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \frac{(1-r^2)^2}{4\,S_2^2}$$

---

[1]) Diese einfache Bemerkung scheint bis jetzt übersehen zu sein. Nur in E. Pascals Repertorium, Leipzig 1902, II. S. 514 finde ich die Angabe „Bemerkenswert ist das Theorem, die Normale zu einer Kurve

oder

2) $$(OQ)^2 = 1 + (QP)^2.$$

Die um Q mit dem Radius QP beschriebene Kurve schneidet also die Einheitskugel um den Mittelpunkt O orthogonal, so daß in jedem der allerdings nicht notwendig reellen Schnittpunkte T das Dreieck OTQ bei T rechtwinklig ist.[1]) Für den Winkel $PQP_1 = \theta$ erhält man

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{S}{r\varDelta}.$$

Ist daher $S : r\varDelta$ eine Konstante, was für die bekannte Klasse von Flächen $P\cdot(P^1)$, bei denen die Normale einen konstanten Winkel mit dem Radiusvektor r bildet, stattfindet, so ist auch θ konstant.[2])

Im allgemeinen mag übrigens S als von Null verschieden vorausgesetzt werden. Ist S beständig gleich Null, so reduzieren sich die Flächen P, P_1 auf Kegelflächen mit der Spitze O. Ist S an einer bestimmten Stelle gleich Null, so sind die Normalen in P, P_1 parallel, d. h. der Punkt Q unendlich ferne und für $r^2 = 1$ fällt Q mit P und P_1 zusammen. Die Gleichung der Ebene PQP_1 ist in den laufenden Koordinaten Ξ, H, Z

3) $$\begin{vmatrix} \Xi & H & Z \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0.$$

---

in einem Punkte P und die Normale zu ihrer inversen Kurve in dem entsprechenden Punkte P_1 schneiden sich in einem Punkte des im Mittelpunkt von PP_1 auf PP_1 errichteten Lotes".

1) Aus der Betrachtung des Dreiecks OQP folgt noch im reellen Gebiet
$$OQ - PQ \leq r \leq OQ + PQ,$$
also für den speziellen weiter unten betrachteten Fall
$$OQ = \sqrt{1+k^2},\ PQ = k,\ \sqrt{1-k^2} - k \leq r \leq \sqrt{1+k^2} + k,$$
auf S. 239.

2) Diese von Monge zuerst untersuchten Flächen, die übrigens auch in neuester Zeit noch weiter untersucht sind, sollen hier als Mongesche Flächen bezeichnet werden.

In sehr einfacher Weise läßt sich auch die partielle Differentialgleichung

$$4)\qquad (1-r^2)^2\frac{\Delta^2}{S^2}=4k^2,\ k=\text{konst.},$$

oder $\qquad (1-r^2)^2(1+p^2+q^2)=4k^2(px+qy-z)^2$

lösen. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich

$$5)\qquad (OQ)^2=1+k^2,\quad (PQ)^2=k^2.$$

Die Punkte Q liegen daher auf einer Kugel (Q), die um O mit dem Radius $\sqrt{1-k^2}$ beschrieben ist, und die Entfernung jeden Punktes P (resp. P^1) von Q ist gleich k. Nun sind drei Fälle möglich. Entweder gibt es auf (Q) zweifach unendlich viele Punkte Q dieser Art. Dann ist die Kugel (Q) Parallelfläche der Fläche P (P_1); letztere also selbst eine mit (Q) konzentrische Kugel vom Radius $k+\sqrt{1+k^2}$ resp. $\sqrt{1+k^2}-k$. Oder es fallen alle Punkte Q mit einem einzigen Punkte von (Q) zusammen. Dann liegen die Punkte P und P_1 auf einer um diesen Punkt mit dem Radius k beschriebenen Kugel. Oder endlich die Punkte Q bilden eine Kurve C auf (Q). Die Fläche P (P^1) ist dann eine Röhrenfläche, die durch die Enveloppe der Kugeln vom Radius k, deren Mittelpunkte auf C liegen, entsteht.

Setzt man in der Tat

$$6)\qquad \begin{aligned} f=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2-k^2=0\\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1+k^2,\end{aligned}$$

so ist die Differentialgleichung 5) erfüllt, da der Ausdruck S gleich $1-r^2$ wird. Im zweiten Falle hat man daher die vollständige Lösung mit den drei Konstanten c_1, c_2, c_3, zwischen denen die Gleichung

$$c_1^2+c_2^2+c_3^2=1+k^2$$

stattfindet, $f=(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+(z-c_3)^2-k^2$. Der erste Fall stellt die singuläre Lösung vor; der dritte endlich gibt als allgemeine Lösung durch den gewöhnlichen Prozeß der Enveloppenbildung die Röhrenflächen vom konstanten Radius k.

Die Gleichung 2) gestattet eine von Interesse erscheinende Umkehrung. Die Enveloppe der von den Punkten ξ, η, ζ der willkürlichen Fläche Q mit dem Radius $R^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1$ beschriebenen Kugeln erzeugt die beiden durch das Prinzip der reziproken Radien verbundenen Punkte P, P_1 von 2 Flächen P, P_1.

Es ist nämlich für die Koordinaten x, y, z eines Punktes der Enveloppe des Systems 2) oder

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1$$

immer

7) $$x^2 + y^2 + z^2 - 2(\xi x + \eta y + \zeta z) + 1 = 0.$$

Setzt man jetzt ξ, η, ζ als abhängig von den Parametern u, v voraus, so hat man

7a) $$\begin{aligned} \xi_u x + \eta_u y + \zeta_u z &= 0 \\ \xi_v x + \eta_v y + \zeta_v z &= 0. \end{aligned}$$

Demnach ist $\lambda x = \Xi$, $\lambda y = H$, $\lambda z = Z$, wo Ξ, H, Z die Richtungscosinus der Normale der Fläche Q sind, also

$$\lambda^2 = \frac{1}{r^2}.$$

Setzt man dies endlich in 7) ein, so erhält man die Gleichung

8) $$\lambda^2 - 2\lambda(\xi \Xi + \eta H + \zeta Z) + 1 = 0$$

deren Wurzeln λ_1, λ_2 durch die Gleichung $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ miteinander verbunden sind. Bezeichnet man die zugehörigen Werte der x y z durch x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 so ist

$$x_1 = \frac{\Xi}{\lambda_1},\ x_2 = \frac{\Xi}{\lambda_2} = x_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = x_1 \lambda_1^2 = \frac{x_1}{x_1^2} + y_1^2 + z_1^2$$

wie gezeigt werden sollte. Dann und nur dann, wenn $(\xi \Xi + \eta H + \zeta Z)^2 - 1$ ein Quadrat ist, zerfällt die Enveloppe in zwei völlig getrennte Mäntel; dies ist in den bisher betrachteten Untersuchungen der Fall. Im allgemeinen aber ist diese Enveloppe eine **anallagmatische Fläche.**[1])

Es ist übrigens leicht zu zeigen, daß diese Betrachtung wieder auf die Gleichung 1) zurückführt.

Differenziiert man nämlich die Gleichung 7) unter Beachtung von 7a) vollständig nach u und v, so erhält man

$$\begin{aligned}
\xi x_u + \eta y_u + \zeta z_u &= r r_u \\
\xi x_v + \eta y_v + \zeta z_v &= r r_v \\
\xi x + \eta y + \zeta z &= \frac{r^2+1}{2}; \quad r^2 = x^2+y^2+z^2.
\end{aligned}$$

Setzt man zur Berechnung der ξ, η, ζ jetzt

$$\xi c_1 + \eta c_2 + \zeta c_3 = C,$$

so daß die ξ, η, ζ die partiellen Differentialquotienten von C nach den c sind, und multipliziert die Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u & r r_u \\ x_v & y_v & z_v & r r_v \\ x & y & z & \dfrac{r^2+1}{2} \\ c_1 & c_2 & c_3 & C \end{vmatrix} = 0$$

mit der Determinante $|X x_u x_v| = \sqrt{eg - f^2}$, so entsteht, wenn man die ersten drei Kolonnen, mit den x, y, z multipliziert, von der letzten abzieht

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u & 0 \\ x_v & y_v & z_v & 0 \\ x & y & z & \dfrac{1-r^2}{2} \\ c_1 & c_2 & c_3 & C-(c_1 x + c_2 y + c_3 z) \end{vmatrix} = 0,$$

[1]) Diese Bestimmung der anallagmatischen Flächen mit Hilfe von 8) scheint einfacher, als die von Darboux, Sur une classe remarquable de Courbes et de surfaces algébriques, Paris, 2. Aufl., 1896, S. 120—124. Für die Fläche

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$$

erhält man so unmittelbar

$$(1+x^2+y^2+z^2)^2 = 4(x^2 a^2 + y^2 b^2 + z^2 c^2).$$

welche Gleichung durch nochmalige Multiplikation mit der eben genannten Determinante $\sqrt{cq - f^2}$ sofort übergeht in

$$(C - (c_1 x + c_2 y + c_3 z)) \Sigma (x X) - \frac{1 - r^2}{2} \Sigma c X$$

aus der durch Vergleichung der Koeffizienten

$$(\xi - x) \Sigma (x X) = \frac{1 - r^2}{2} X,$$

also die Gleichungen 1) entstehen.

§ III.

Invariante Beziehungen zwischen den Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung der Flächen P und P_1.

Für die Beziehung zwischen den Fundamentalgrößen erster Ordnung $e, f, g; e_1, f_1, g_1$ der Flächen P, P_1 erhält man unmittelbar

$$e_1 = e : r^2, \; f_1 = f : r^2, \; g_1 = g : r^2.$$ [1])

Aus den Gleichungen

$$x'_u = \frac{x_u}{r^2} - 2 \frac{x r_u}{r^3}, \quad x'_v = \frac{x_v}{r^2} - 2 \frac{x r_v}{r^3}$$

erhält man

$$x'_{uv} = \frac{x_{uv}}{r^2} - 2 \frac{x_u r_v}{r^3} - 2 \frac{x_v r_u}{r^3} - 2 \frac{x r_{uv}}{r^3} + 6 \frac{x r_u r_v}{r^4}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit der entsprechenden Ib) des § I und summiert über die Koordinaten x, y, z, so erhält man für die Fundamentalgrößen F und F_1 die Beziehung

$$F_1 = -\frac{F}{r^2} - 2 \frac{S_2}{r^4} (r r_{uv} + r_u r_v - \Sigma x x_{uv}),$$

wobei $$S_2 = x X + y Y + z Z = \Sigma x X$$

gesetzt ist.

---

[1]) Eine Verwechselung der Fundamentalgrößen f, f_1 mit der Beziehung für die Flächen f, f_1 des § I ist wohl ausgeschlossen.

Aus der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

folgt aber

$$\Sigma x x_{uv} + f = r r_{uv} + r_u r_v,$$

so daß

$$F_1 = -\left(\frac{F}{r^2} + 2\,\frac{S_2 f}{r^4}\right) \text{ wird.}$$

Die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung von P_1 sind also durch die in sich reziproken Formeln (wie leicht zu sehen, wird $\frac{S_2'}{r_1} = \frac{S_2}{r}$) gegeben:

$$\text{I)} \qquad \begin{aligned} E_1 &= -\left(\frac{E}{r^2} + 2\,\frac{S_2}{r^4}\,e\right) \\ F_1 &= -\left(\frac{F}{r^2} + 2\,\frac{S_2}{r^4}\,f\right) \\ G_1 &= -\left(\frac{G}{r^2} + 2\,\frac{S_2}{r^4}\,g\right), \end{aligned}$$

aus denen sich manche weitere Folgerungen herleiten lassen. Zunächst erhält man die wichtige Gleichung

$$\text{II)} \qquad \begin{aligned} E_1\,du^2 + 2\,F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2 = -\Bigg\{&\frac{E\,du + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}{r^2} \\ &+ 2\,S_2\,\frac{(e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2)}{r^4}\Bigg\} \end{aligned}$$

oder, wenn man durch

$$e_1\,du^2 + 2\,f_1\,du\,dv + g_1\,dv^2 = \frac{e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2}{r^4}$$

dividiert, und mit Bianchi, a. a. O. S. 101, den Krümmungshalbmesser R des den du, dv entsprechenden Normalschnittes von f durch die Gleichung

$$\frac{1}{R} = -\,\frac{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}{e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2}$$

definiert,

$$\text{III)} \qquad -\frac{1}{R^1} = \frac{r^2}{R} - 2\,S_2,$$

die man auch in der Form

$$\frac{r_1}{R_1} + \frac{r}{R} = 2\frac{S_2}{r} = 2\frac{S_2'}{r_1}$$

schreiben kann.

Für die bereits erwähnten Mongeschen Flächen, bei denen $\frac{S_2}{r} = \frac{1}{r}\Sigma x X$ eine Konstante k ist, ist daher insbesondere

$$\frac{r^1}{R_1} + \frac{r}{R} = 2k.$$

Allgemein besteht aber für irgend zwei Krümmungshalbmesser R_1 und R_2 von Normalschnitten, denen durch die Transformation R_1' und R_2' entsprechen, nach III) die invariante Beziehung:

$$r_1\left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_2'}\right) + r\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = 0,$$

und den Haupttangentenrichtungen auf P entsprechen immer nach III) gleiche Krümmungen der entsprechenden Normalschnitte auf P_1 (und umgekehrt).

Wendet man Formel III) auf die Hauptkrümmungshalbmesser ϱ_1, ϱ_2; ϱ_1', ϱ_2' für P und P_1 an, so folgt

$$\frac{1}{\varrho_1'} = -\frac{r^2}{\varrho_1} + 2S_2, \quad \frac{1}{\varrho_2'} = -\frac{r^2}{\varrho_2} + 2S_2$$

oder

$$\frac{1}{\varrho_1'\varrho_2'} = \frac{r^4}{\varrho_1'\varrho_2'} - 2S_2 r^2\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) + 4S_2^2,$$

also wenn man das Krümmungsmaß für P und P_1 mit K und K_1 bezeichnet,

IV) $$K_1 = Kr^4 - 2S_2 r^2 H + 4S_2^2$$

für H als mittlere Krümmung $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$.

Für eine Minimalfläche (allgemeiner für jeden Punkt P, dessen mittlere Krümmung gleich Null ist) ist also immer

$$K_1 > Kr^4.^{1)}$$

---

[1]) Das Gleichheitszeichen gilt nur für die besonderen Stellen, wo $S_2 = 0$ ist.

Aus der Gleichung III) erhält man ferner

V) $$-H_1 = +Hr^2 - 4S_2$$

oder $$H_1 r_1 + Hr = 4\frac{S_2}{r},$$

was wieder eine besondere Eigenschaft der Mongeschen Flächen ist.

Multipliziert man die Gleichung IV) mit $\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}\,du\,dv = \frac{\sqrt{eg - f^2}}{r^4}\,du\,dv$, so erhält man, falls die Gaußsche Kurvatura integra durch k, k_1 bezeichnet wird

VI) $$k_1 = k - 2\int \frac{S_2 H}{r^2}\,dw + 4\int \frac{S_2^2}{r^4}\,dw,$$

wobei dw das Flächenelement bezeichnet. Für die Minimalflächen ist daher insbesondere (abgesehen vom trivialen Falle $S_2 = 0$)
$$k_1 > k.$$

Endlich ist auch, wenn man die Gleichung V) mit den korrespondierenden Flächenelementen $dw_1 = \frac{dw}{r^4}$ multipliziert

VII) $$\int \frac{H_1}{r_1}\,dw_1 + \int \frac{H}{r}\,dw = 4\int \frac{S_2\,dw}{r^3}.$$

In dieser Gleichung, die für eine Minimalfläche P wieder besonders einfach wird, hat das Integral rechter Hand eine aus der Potentialtheorie wohl bekannte Bedeutung. Denn es ist
$$\frac{S_2}{r^3} = \frac{1}{r^2}\cos(N, r),$$

so daß es sich um die Kegelöffnung des Flächenstückes auf P für den Punkt O handelt.

Für eine developpable Fläche P folgt aus IV)
$$K_1 = -2S_2 Hr^2 + 4S_2^2,$$

insbesondere also für die der Kugel vom Radius c umschriebenen Developpabelen $S_2 = \text{konst.} = k$
$$K_1 = -2cHr^2 + 4c^2.$$

Hiernach kann K_1 sowohl positiv als negativ für die verschiedenen Punkte ausfallen. In der Tat liefert ja auch schon ein Kreiszylinder eine Kanalfläche, die sowohl Stellen von positiver Krümmung als auch von negativer enthält. Zur Untersuchung des Zeichens von K_1 kann man sich der folgenden Betrachtung bedienen.

Die beiden für jede Wahl der u, v absoluten Invarianten

$$K = \frac{EG - F^2}{eg - f^2} = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}, \quad H = \frac{2fF - gE - eG}{eg - f^2} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$$

zeigen, daß

$$H^2 - 4K \geqq 0 \text{ ist.}$$

Für einen Flächenpunkt negativer Krümmung ist dies selbstverständlich. Setzt man aber $K = -\varkappa$, so ist nach IV)

$$K_1 = -\left(\sqrt{\varkappa r^2} + \frac{HS_2}{\sqrt{\varkappa}}\right)^2 + \left(\frac{H^2}{\varkappa} + 1\right) S_2^2.$$

Ist dagegen K an einer Stelle positiv, so ist $|H| = 2\sqrt{\varkappa} + \delta$, wo δ positiv ist, und dann folgt

$$K_1 = |r^2 \sqrt{K} \mp 2 S_2|^2 \mp 2 S_2^2 \delta r^2$$

und von dem Werte der rechten Seiten in diesen beiden Formeln wird das Vorzeichen von K_1 abhängen, womit zugleich auch die Lage der parabolischen Kurve der transformierten Fläche gegeben ist.

Es sei endlich noch eine Bemerkung über die geodätischen Torsionsradien T, T_1 entsprechender Kurven hinzugefügt. In der Gleichung

$$\frac{1}{T} = \frac{(fE - eF)\,du^2 + (gE - eG)\,du\,dv + (gF - fG)\,dv^2}{(e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2)\sqrt{eg - f^2}}$$

setze man nach I)

$$fE - eF = -r^6 (f_1 E_1 - e_1 F_1),$$
$$gE - eG = -r^6 (g_1 E_1 - e_1 G_1),$$
$$gF - fG = -r^6 (g_1 F_1 - f_1 G_1),$$

woraus sofort die invariante Beziehung

$$\frac{r_1}{T_1} + \frac{r}{T} = 0$$

entsteht.

Für die geodätischen Linien resp. Haupttangentenkurven auf den Flächen P ergeben sich keine einfachen Beziehungen bei der Transformation. Dies beruht darauf, daß die Schmiegungsebene einer Kurve auf P bei der Transformation nicht so übersichtlich umgeformt wird. Die Transformation des Ausdruckes

$$\begin{vmatrix} \xi - \lambda \\ x_u \\ x_{uu} \end{vmatrix},$$

bei dem $x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = e$ gesetzt ist, liefert nämlich den Ausdruck

$$r^6 \begin{vmatrix} \xi - x_1 \\ x_{1u} \\ x_{1uu} \end{vmatrix} = -r^2 \begin{vmatrix} \xi - x \\ x_u \\ x_{uu} \end{vmatrix} - 2e \begin{vmatrix} \xi - x \\ x_u \\ x \end{vmatrix}$$

$$+ 2\left(\xi x + \eta y + \zeta z - \frac{1 + r^2}{2}\right) \begin{vmatrix} x \\ x_u \\ x_{uu} \end{vmatrix}.$$

Hiernach besteht die Gleichung der Schmiegungsebene der transformierten Kurve C_1 von C aus drei Gliedern. Von diesen bezieht sich das erste auf die Schmiegungsebene von C, das dritte auf eine Ebene E, die senkrecht zum Radiusvektor OP durch den Mittelpunkt von PP_1 geht. Das mittlere Glied gehört zu einer Ebene, die den Radiusvektor OP und die Tangente von C enthält. Eine Vereinfachung findet nur statt für die Minimalkurven $e = 0$ statt; hier ist die Schmiegungsebene von C_1 immer die durch den Punkt P_1 gehende Ebene des Büschels, das aus E und der Schmiegungsebene in P besteht. Der Faktor $|x\, x_u\, x_{uu}|$ verschwindet nur dann, wenn der Radiusvektor in der Schmiegungsebene von P liegt. Soll das überall stattfinden, so hat man nur den trivialen Fall, daß die Kurve C eben ist und ihre Ebene durch den Pol O geht.

Das ergibt sich auch aus den Formeln von Frenet. Denn man hat jetzt, wenn etwa u die Bogenlänge von C bedeutet,

$$\Sigma x \lambda = 0,$$

woraus durch Differentiation $\frac{1}{\tau} \Sigma (x \xi) = 0$ entsteht. Ist die Kurve C eine Raumkurve, so folgt

$$\Sigma (x \xi) = 0$$

und eine weitere Differentiation liefert dann

$$\Sigma (a \xi) - \Sigma x \left(\frac{a}{\varrho} + \frac{\lambda}{\tau} \right) = 0 \text{ oder } \Sigma (a x) = 0.$$

Daraus folgt aber $x = y = z = 0$, d. h. Raumkurven dieser Art gibt es überhaupt nicht. Einer geradlinigen Minimalkurve entspricht aber immer wieder eine geradlinige Minimalkurve.

Es besteht übrigens die allgemeine Gleichung

$$r^6 \begin{vmatrix} x_1 \\ x_{1u} \\ x_{1uu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ x_u \\ x_{uu} \end{vmatrix}.$$

Führt man hier noch die Richtungen b, b_1 der Binormalen ein, so hat man

$$\frac{r}{\varrho} \cos (OP, b) = \frac{r_1}{\varrho_1} \cos (OP_1, b_1)$$

als invariante Beziehung zwischen den Krümmungshalbmessern und der Richtung der Binormalen.

§ IV.

Über die zu der Transformation R gehörigen Strahlensysteme.

Die Tangentenebenen der Flächen f und f_1 in den Punkten P, P_1 haben nach § I, I) die Gleichungen

$$\Sigma (\xi - x) \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

$$\Sigma \left(\xi - \frac{x}{r^2}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial x} r^2 - 2 S x\right) = 0$$

oder

$$\Sigma \xi \frac{\partial f}{\partial x} = S,$$

1)
$$\Sigma \xi x = \frac{1 + r^2}{2}.$$

Die Schnittlinien derselben bilden ein Strahlensystem Σ, dessen Brennfläche in einfacher Beziehung zu den Flächen P, P_1 steht. Aus 1) folgt durch Differentiation, unter Voraussetzung, daß ξ, η, ζ ungeändert bleiben, für die Koordinaten ξ, η, ζ eines Punktes der Brennfläche

2)
$$\Sigma \xi d \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = d S,$$
$$\Sigma \xi \, d x = r \, d r.$$

Durch Elimination der ξ, η, ζ folgt hieraus die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & - & - & S \\ d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) & - & - & d S \\ d x & - & - & r \, d r \\ x & - & - & \frac{1 + r^2}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

also durch Subtraktion der drei ersten mit x, y, z multiplizierten Kolonnen, wie in § I

$$\frac{1 - r^2}{2} D = 0.$$

Das heißt: Die Brennfläche von Σ ist stets reell und die Developpabelen des Systems Σ entsprechen den sich schneidenden Normalen längs der Krümmungslinien von f oder f_1.

Ist insbesondere $r^2 = 1$, so ist nach 1)

$$\Sigma(\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \Sigma(\xi - x)x = 0$$

d. h. jeder Strahl, der zu einem benachbarten Punkte von P gehört, geht durch diesen Punkt P. Ein solcher Strahl ist singulär.

Der zu P, P_1 gehörende Strahl trifft die Ebene PQP_1 in einem Punkte C seiner Ausgangsfläche, dessen Koordinaten sind nach § II, 3

3)
$$\begin{aligned} \xi_1 &= px + qX, \\ \eta_1 &= py + qY, \\ \zeta_1 &= pz + qZ, \end{aligned}$$

woraus

4)
$$\begin{aligned} pS_2 + q &= S_2, \\ pr^2 + qS_2 &= \frac{1 + r^2}{2} \end{aligned}$$

oder

$$p - 1 = \frac{r^2 - 1}{2} : S_2^2 - r^2,$$

$$q = \frac{1 - r^2}{2} S_2 : S_2^2 - r^2$$

folgt. Der Punkt C ist wieder gleichweit von P und P_1 entfernt, liegt daher auf der Halbierungslinie des Winkels PQP_1.

Wir untersuchen nun zunächst die Lage der Brennpunkte selbst. Mit Hilfe der Koordinaten von C kann man sie durch die Gleichungen

5)
$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 + \mu(yZ - zY), \\ \eta &= \eta_1 + \mu(zX - xZ), \\ \zeta &= \zeta_1 + \mu(xY - yX), \end{aligned}$$

wobei $\mu\sqrt{r^2 - S_2^2} = \sigma$ ($r^2 - S_2^2$ ist als Summe von Quadraten immer positiv) die Entfernung des Brennpunktes vom Punkte C bezeichnet, darstellen. Setzt man in den Gleichungen 1) für die ξ, η, ζ, welche auch die Form

$$\begin{aligned} \Sigma\xi X &= S_2, \\ \Sigma\xi x &= \frac{1+r^2}{2}, \\ \Sigma\xi\, dX &= dS_2, \\ \Sigma\xi\, dx &= r\,dr \end{aligned}$$

annehmen, die Werte 5) ein, so ergibt sich, da die beiden ersten schon von selbst erfüllt sind,

$$\Sigma\xi_1\, dX + \mu \begin{vmatrix} dX \\ x \\ X \end{vmatrix} = dS_2,$$

$$\Sigma\xi_1\, dx + \mu \begin{vmatrix} dx \\ x \\ X \end{vmatrix} = r\,dr.$$

Da nach 3)

$$\begin{aligned} \Sigma\xi_1\, dX &= p\,d\,\Sigma(xX) = p\,dS_2, \\ \Sigma\xi_1\, dx &= p\,r\,dr \end{aligned}$$

ist, so erhält man

$$\mu \begin{vmatrix} dX \\ x \\ X \end{vmatrix} = dS_2(1-p), \quad \mu \begin{vmatrix} dx \\ x \\ X \end{vmatrix} = r\,dr(1-p).$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit der Determinante

$$|X\, x_u\, x_v| = \sqrt{eg - f^2},$$

so hat man

$$6) \qquad \mu \begin{vmatrix} \Sigma(x_u\, dX), & \Sigma(x_v\, dX) \\ r\,r_u & r\,r_v \end{vmatrix} = dS_2(1-p)\sqrt{eg-f^2},$$

$$\mu \begin{vmatrix} \Sigma(x_u\, dx), & \Sigma(x_v\, dx) \\ r\,r_u & r\,r_v \end{vmatrix} = r\,dr(1-p)\sqrt{eg-f^2}.$$

In diesen Gleichungen ist noch dS_2 durch seinen Wert zu ersetzen. Man findet ihn durch die folgende Betrachtung. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}\Sigma x\, dX &= dS_2,\\ \Sigma x_u\, dX &= -(E\,du + F\,dv),\\ \Sigma x_v\, dX &= -(F\,du + G\,dv),\\ \Sigma X\, dX &= 0\end{aligned}$$

ergibt sich durch Multiplikation mit der eben genannten Determinante mit dem aus den vorstehenden Gleichungen folgenden Eliminationsresultat

$$\begin{vmatrix} x & - & - & dS_2 \\ x_u & - & - & -(E\,du + F\,dv) \\ x_v & - & - & -(F\,du + G\,dv) \\ X & - & - & 0 \end{vmatrix} = 0$$

die noch mehrfach zu benutzende Gleichung

7) $$(eg - f^2)\, dS^2$$
$$= -\{(E\,du + F\,dv)(r_u g - r_u f) - (F\,du + G\,dv)(r_u f - r_v e)\}\, r,$$

Setzt man diesen Wert von dS_2 in die Gleichungen 6) ein, so hat man zwei Gleichungen zwischen den Differentialen. Eliminiert man μ, so entsteht eine quadratische Gleichung in du, dv, welche nur die der Krümmungslinien von P sein kann, so daß es unnötig erscheint, dies zu verifizieren, was durch wirkliche Ausrechnung geschehen kann. Eliminiert man dagegen die du, dv, so entsteht eine quadratische Gleichung für μ, welche die beiden Brennpunkte auf dem Strahle bestimmt. Zur Vereinfachung der Formeln wird man voraussetzen, daß die Parameter u, v schon den Krümmungslinien von P entsprechen, also $f = 0$, $F = 0$ ist. Man hat dann nach 7)

$$dS_2 = r\left(r_u \frac{du}{\varrho_1} + r_v \frac{dv}{\varrho_2}\right)^{1)},$$

---

[1]) Aus den auf die Krümmungslinien von P bezogenen Gleichungen

$$\frac{\partial S_2}{\partial u} = \frac{r r_u}{\varrho_1}, \quad \frac{\partial S_2}{\partial v} = \frac{r r_v}{\varrho_2}$$

falls wieder mit ϱ_1 und ϱ_2 die beiden Hauptkrümmungsradien in P bezeichnet werden. Die Gleichungen 6) werden nun für

$$\frac{\mu}{1-p} = \nu$$

$$-\nu\, E r_v\, du - G r_u\, dv) = \sqrt{eg}\left(r_u \frac{du}{\varrho_1} + r_v \frac{dv}{\varrho_2}\right)$$

$$\nu\,(e r_v\, du - g r_u\, dv) = \sqrt{eg}\,(r_u\, du + r_v\, dv).$$

Eliminiert man jetzt die ν, so bleibt

$$\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right)(r_v^2\, e - r_u^2\, g)\, du\, dv = 0,$$

womit zugleich gezeigt ist, daß, wie schon bemerkt wurde, die Krümmungslinien $du = 0$, $dv = 0$ entstehen. Eliminiert man dagegen die du, dv, so folgt

$$\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\left[\nu^2\, r_u r_v - \nu\left(\frac{r_u^2\, g - e\, r_v^2}{\sqrt{eg}}\right) - r_u r_v\right] = 0.$$

---

läßt sich noch eine Beziehung von allgemeinerem Interesse herleiten. Man hat sofort

$$\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial (r r_u)}{\partial v} - \frac{1}{\varrho_2}\frac{\partial (r r_v)}{\partial u} + r r_u \frac{\partial \frac{1}{\varrho_1}}{\partial v} - r r_v \frac{\partial \frac{1}{\varrho_1}}{\partial u} = 0.$$

Aus der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ folgt aber

$$\frac{\partial (r r_u)}{\partial v} = \frac{\partial (r r_v)}{\partial u} = \Sigma\, x \cdot x_{uv}.$$

Nun ist nach den Gleichungen der Flächentheorie

$$\Sigma\, x x_{uv} = B r r_u + B_1 r r_v, \quad \text{wo } 2eB = e_v,\ \ 2gB_1 = g_u,$$

so daß nach Beseitigung des Faktors r ($r \neq 0$)

$$r_u \left\{\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{e_v}{e} + 2\,\frac{\partial \frac{1}{\varrho_1}}{\partial v}\right\} = r_v \left\{\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\frac{g_u}{g} + 2\,\frac{\partial \frac{1}{\varrho_2}}{\partial u}\right\}$$

wird. In dieser für jede Fläche gültigen Gleichung wird das Verhältnis $r_u : r_v$ nur von den Fundamentalgrößen abhängig; r ist dabei ganz herausgefallen. Das gleiche findet übrigens, wovon man sich durch direkte Ausrechnung überzeugen kann, für *jedes* System von Parametern statt.

Diese Gleichung hat die Wurzeln

$$r_1 = \sqrt{\frac{g}{e}\frac{r_u}{r_v}}; \quad r_2 = -\sqrt{\frac{e}{g}\frac{r_v}{r_u}},$$

so daß $r_1 r_2 = -1$ ist. Die Stellen, wo die Brennpunkte symmetrisch zu C liegen, sind durch die Gleichung

$$r_u^2 g - r_v^2 e = 0$$

gegeben. Bei dieser Betrachtung ist $\varrho_1 \neq \varrho_2$ vorausgesetzt. Für einen Nabelpunkt der Fläche P ist die Lage der Brennpunkte unbestimmt; den Nabelpunkten entsprechen singuläre Strahlen, die von allen benachbarten getroffen werden.

Man kann das an dem Beispiel der Kugel

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0$$

oder

$$r^2 - 2T - A - R^2 = 0$$

für

$$T = ax + by + cz, \quad A = a^2 + b^2 + c^2$$

unmittelbar sehen. Denn das Strahlensystem ist hier durch die Gleichungen

$$\Sigma \xi (x-a) = r^2 - T, \quad \Sigma \xi x = \frac{1+r^2}{2}$$

definiert, aus denen

$$-\Sigma \xi a = \frac{R^2 - A - 1}{2}$$

folgt. Alle Strahlen sind jetzt singulär, weil sie in einer Ebene liegen. Diese steht senkrecht zu der Verbindungslinie von O mit dem Mittelpunkt der Kugel; sie geht insbesondere durch O, wenn die Kugel die Einheitskugel orthogonal schneidet.

Ein zweites Strahlensystem entsteht, wenn man durch die Punkte Q als Ausgangsfläche die Parallelen zu den Radienvektoren OP zieht. Da die Koordinaten ξ, η, ζ des Punktes Q sich in der Form

$$\xi = x + \lambda X$$
$$\eta = y + \lambda Y$$
$$\zeta = z + \lambda Z$$

für $\lambda = 1 - r^2 : 2 S_2$ schreiben lassen, hat man

$$d\xi = dx + \lambda\, dX - \frac{r\,dr}{S_2} X - \frac{\lambda}{S_2} d S_2$$

also unter Beachtung der schon oft benutzten Gleichung

$$d S_2 = \Sigma x\, dX$$
$$\Sigma (d\xi\, x) = 0.$$

Die Tangentenebene der Fläche Q steht demnach senkrecht zum Radiusvektor; sie geht zugleich, wie man leicht sieht, durch den Mittelpunkt der Strecke $P\,P_1$. Das Strahlensystem Q hat also die Fläche der Zentra der Fläche Q zur stets reellen Brennfläche.

Man erhält die negativen Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der Ausgangsfläche Q, wenn man die partiellen Differentialquotienten der ξ, η, ζ nach u und v mit den Differentialen der Richtungscosinus $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ multipliziert, d. h. wenn man die Summen der Produkte

$$\xi_u = x_u + \lambda X_u - \frac{rX}{S_2}\left(r_u + \lambda \frac{\partial S_2}{\partial u}\right)$$
$$\xi_v = x_v + \lambda X_v - \frac{rX}{S_2}\left(r_v + \lambda \frac{\partial S_2}{\partial v}\right)$$

mit den Werten

$$\frac{x_u}{r} - \frac{x\,r_u}{r^2},\quad \frac{x_v}{r} - \frac{x\,r_v}{r^2}$$

bildet. So ergibt sich unter Beachtung der Gleichung $d S_2 = \Sigma x\, dX$ aus der Gleichung

$$-\bar{F} = \frac{f}{r} - \lambda \frac{F}{r} - r\frac{r_u r_v}{r^2} - \frac{\lambda}{r^2}\Sigma(x X_u) + \frac{r}{r^2}\left(r_u r_v + \lambda \frac{\partial S_2}{\partial u}\right)$$

$$
10)\qquad
\begin{aligned}
-\overline{E} &= \frac{e}{r} - \frac{\lambda E}{r}\\
-\overline{F} &= \frac{f}{r} - \frac{\lambda F}{r}\\
-\overline{G} &= \frac{g}{r} - \frac{\lambda G}{r}.
\end{aligned}
$$

Die Gleichung der Haupttangenten von Q ist daher

$$0 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 - \lambda(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2);$$

sie entsprechen also den Richtungen, für die der Krümmungshalbmesser R des Normalschnittes bei P gleich $-\lambda$ ist. Setzt man wieder u, v als Parameter der Krümmungslinien voraus, so hat man aus 10)

$$
11)\qquad
\begin{aligned}
-\overline{E} &= \frac{e}{r}\left(1 + \frac{\lambda}{\varrho_1}\right)\\
-\overline{G} &= \frac{g}{r}\left(1 + \frac{\lambda}{\varrho_2}\right)\\
\overline{F} &= 0.
\end{aligned}
$$

Den Krümmungslinien von P entspricht also ein konjugiertes System auf Q. Aus 11) folgt

$$\overline{E}\,\overline{G} = \frac{eg}{r^2}(1 + H\lambda + K\lambda^2)$$

oder

$$\overline{E}\,\overline{G} = \frac{eg}{r^2}\left((1 + \frac{H}{2}\lambda)^2 - \frac{\lambda^2}{4}(H^2 - 4K)\right),$$

woraus hervorgeht, daß die Haupttangenten von Q nicht notwendig reell sind, da der Faktor von λ^2 negativ ist.

Zur Bestimmung des Krümmungsmaßes selbst muß man das Quadrat des Längenelementes bei Q entwickeln. Man erhält sofort

$$
12)\qquad
\begin{aligned}
\overline{e} &= e - 2\lambda E + \lambda^2\Sigma(X_u^2) + \frac{1}{S_2^2}\left(rr_u + \lambda\frac{\partial S_2}{\partial u}\right)^2\\
\overline{f} &= f - 2\lambda F + \lambda^2\Sigma(X_u X_v) + \frac{1}{S_2^2}\left(rr_u + \lambda\frac{\partial S_2}{\partial u}\right)\left(rr_v + \lambda\frac{\partial S_2}{\partial v}\right)\\
\overline{g} &= g - 2\lambda G + \lambda^2\Sigma(X_v) + \frac{1}{S_2^2}\left(rr_v + \lambda\frac{\partial S_2}{\partial v}\right)^2
\end{aligned}
$$

oder wenn für die Krümmungsparameter u, v nach 8)

$$\frac{\partial S_2}{\partial u} = \frac{r_u r}{\varrho_1} \quad \frac{\partial S_2}{\partial v} = \frac{r_v r}{\varrho_2}$$

gesetzt wird, für die drei letzten Glieder in den Formeln 12) die Werte

$$\frac{1}{S_2^2} r_u^2 r^2 \left(1 + \frac{\lambda}{\varrho_1}\right)^2, \frac{1}{S_2^2} r_u r_v r^2 \left(1 + \frac{\lambda}{\varrho_1}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\varrho_2}\right), \frac{1}{S_2^2} r_v^2 r^2 \left(1 + \frac{\lambda}{\varrho_2}\right).$$

Es ist ferner

$$\Sigma(X_u^2) = -(eK + HE) = -\left(e\frac{EG}{eg} - \left(\frac{eG + gE}{eg}\right)E\right) = + \frac{E^2}{e}$$

$$\Sigma(X_u X_v) = 0$$

$$\Sigma(X_v)^2 = \frac{G^2}{g},$$

also

$$\bar{e} = \left(1 + \frac{\lambda}{\varrho_1}\right)^2 \left(e + \frac{r^2 r_u^2}{S_2^2}\right)$$

$$\bar{f} = \left(1 + \frac{\lambda}{\varrho_1}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\varrho_2}\right)\left(r^2 \frac{r_u r_v}{S_2^2}\right)$$

$$\bar{g} = \left(1 + \frac{\lambda}{\varrho_2}\right)^2 \left(g + \frac{r^2 r_v^2}{S_2^2}\right),$$

so daß

$$\bar{e}\bar{g} - \bar{f}^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \left(eg + r^2 \left(\frac{r_v^2 e + r_u^2 g}{S_2^2}\right)\right)$$

wird, wenn man

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\lambda}{\varrho_1}, \quad \lambda_2 = 1 + \frac{\lambda}{\varrho_2}$$

setzt. Dieser Ausdruck läßt sich noch vereinfachen, denn es ist

$$S_2 = \Sigma(xX) = \frac{1}{\sqrt{eg}} \left| x\, x_u\, x_v \right|,$$

also

$$S_2^2 = \frac{1}{eg}(r^2 eg - r^2 r_u^2 g - r^2 r_v^2 e)$$

oder $$eg\,(S_2^2 + r^2\,(r_u^2 g + r_v^2 e) = r^2 eg.$$

Es ist daher

$$\bar e \bar g - \bar f^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 r^2 \frac{e g}{S_2^2}.$$

Hiernach ergiebt sich für das Krümmungsmaß im Punkte Q

$$\bar K = \frac{S_2^2}{r^4 \lambda_1 \lambda_2}.$$

Da auch

$$\bar e \bar G + \bar g \bar E = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{r}\left(\lambda_1 g \left(e + \frac{r^2 r_u^2}{S_2^2}\right) + \lambda_2 e \left(g + \frac{r^2 r_v^2}{S_2^2}\right)\right),$$

so hat man zur Bestimmung der Hauptkrümmungsradien $\bar\varrho$ im Punkte Q die Gleichung

$$\left(\frac{\bar\varrho}{r}\right)^2 e g \lambda_1 \lambda_2 - \frac{\bar\varrho_1}{r} \lambda_1 \lambda_2 \left(\lambda_1 g \left(e + \frac{r^2 r_u^2}{S_2^2}\right) + \lambda_2 e \left(g + \frac{r^2 r_v^2}{S_2^2}\right)\right)$$

14)
$$+ \lambda_1^2 \lambda_2^2 \frac{r^2 e q}{S_2^2} = 0.$$

Läßt man den Faktor $\lambda_1 \lambda_2$ fort, so wird für einen Nabelpunkt in P $\varrho_1 = \varrho_2$, also auch $\lambda_1 = \lambda_2$ und die Gleichung 14) oder

$$\left(\frac{\bar\varrho}{r}\right)^2 - \frac{\bar\varrho_1}{r} \lambda_1 \left(\frac{r^2}{S_2^2}\right) + \lambda_1^2 \frac{r^2}{S_2^2} = 0$$

zerfällt in die Faktoren

$$\left(\frac{\bar\varrho}{r} - \lambda_1 \frac{r^2}{S_2^2}\right)\left(\frac{\bar\varrho}{r} - \lambda_1\right) = 0.$$

Einem Nabelpunkte in P wird daher nicht notwendig wieder ein Nabelpunkt bei Q entsprechen.

Die Gleichung der Fläche Q ist im allgemeinen nicht einfach. Ist P die Kugel $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0$, so hat man für $\xi - a = \xi_1$, $\eta - b = \eta_1$, $\zeta - c = \zeta_1$

$$\xi_1 = \frac{(x-a)N}{r^2 + R^2 - A}, \quad \eta_1 = \frac{(y-b)N}{r^2 + R^2 - A}, \quad \zeta_1 = \frac{(z-c)N}{r^2 + R^2 - A},$$

falls $N = 1 + R^2 - A$ gesetzt wird. Für $N = 0$, wo die Kugel die Einheitskugel orthogonal schneidet, reduziert sich die Fläche auf den Mittelpunkt der ersteren. Im allgemeinen Falle ist aber

$$\Sigma(\xi_1 a) = \frac{(r^2 - A - R^2) N}{2 (r^2 + R^2 - A)}.$$

Setzt man nun $N = 2n$, so ist

$$\Sigma(\xi_1 a) = n \left(1 - \frac{2 R^2}{r^2 + R^2 - A}\right), \quad \Sigma \xi_1^2 = \frac{4 R^2 n^2}{(r^2 + R^2 - A^2)},$$

also $$(\Sigma(\xi_1 a) - n)^2 = \frac{4 R^4 n^2}{(r^2 + R^2 - A)^2} = R^2 \Sigma \xi_2^1.$$

Das ist die Gleichung einer Fläche zweiten Grades, bei der die Koeffizienten der quadratischen Glieder

$R^2 - a^2$, $R^2 - b^2$, $R^2 - c^2$, $-2ab$, $-2ac$, $-2bc$ sind.

Die Wurzeln der charakteristischen Determinantengleichung dritten Grades in λ sind gegeben durch

$$(R^2 - \lambda)^2 (R^2 - \lambda - A) = 0.$$

Es entsteht also eine Rotationsfläche zweiten Grades, deren Axenrichtung die Richtungscosinus

$$\frac{a}{\sqrt{A}}, \quad \frac{b}{\sqrt{A}}, \quad \frac{c}{\sqrt{A}}$$

hat, also der Verbindungslinie des Pols mit dem Mittelpunkt der Kugel parallel läuft. Die Koordinaten des Mittelpunktes der Fläche sind (abgesehen von dem Falle, wo er ins Unendliche fällt)

$$\xi_1^1 = -\frac{na}{R^2 - A}, \quad \eta_1^1 = -\frac{nb}{R^2 - A}, \quad \zeta_1^1 = -\frac{nc}{R^2 - A}$$

und die Gleichung der Fläche Q in Bezug auf ihre Hauptaxen und den Mittelpunkt

$$(\Xi_1^2 + H_1^2) R^2 + Z_1^2 (R^2 - A) = \frac{n^2 R^2}{R^2 - A},$$

deren Zentrafläche dann die Brennfläche des Strahlensystems Q ist.

Berichtigung.

Auf S. 242, § III muß es heißen $e_1 = e : r^4$ etc.