# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Klasse

der

## Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1920. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1920

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

# Die Beanspruchung eines Stabes von elliptischem Querschnitt auf Drillen bei behinderter Querschnittswölbung.

Von **A. Föppl.**

Vorgelegt in der Sitzung am 8. Mai 1920.

Bei der Beanspruchung auf Drillen erfährt ein Stab, wenn kein Hindernis im Wege steht, eine elastische Formänderung, bei der jeder Querschnitt in eine krumme Fläche übergeht, deren Gestalt von der Querschnittsgestalt abhängig ist. Nur wenn der Querschnitt kreisförmig ist, bleibt er bei der Formänderung eben. Im anderen Falle müssen die in der Richtung der Stabachse gerechneten Ordinaten $\xi$ der krummen Fläche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0$$

genügen, wenn $y$ und $z$ die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Querschnittsebene bedeuten und außerdem muß noch die Randbedingung erfüllt werden, die sich aus der Forderung ergibt, daß die im Stabquerschnitte übertragenen Schubspannungen längs der Umrißlinie überall nur tangential gerichtet sein können.

Im besonderen Falle des elliptischen Querschnitts, auf den sich unsere Betrachtung hier beschränken soll, obschon sich die Überlegungen, die wir anzustellen haben, sinngemäß auch auf andere Fälle übertragen lassen, geht die Querschnittsebene in ein hyperbolisches Paraboloid über, dessen Odinate $\xi$ durch die Formel

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3 G} M y z \tag{1}$$

dargestellt wird. Darin bedeuten $a$ und $b$ die große und die kleine Halbachse der Querschnittsellipse, $G$ den Gleitmodul und $M$ das verdrehende Moment.

Wesentliche Voraussetzung für die Gültigkeit dieser von de Saint-Venant aufgestellten Theorie der Stabdrillung ist jedoch, daß sich der Ausbildung der Querschnittswölbung kein Hindernis in den Weg stellt. Diese Voraussetzung ist aber bei zahlreichen praktischen Anwendungen, die man von der Verdrehungstheorie zu machen hat, keineswegs streng oder auch nur mit genügender Annäherung erfüllt. Man hat sich daher schon wiederholt bemüht, die Theorie so weit zu verallgemeinern, daß sie auch den Fall eines sich der Querschnittswölbung entgegen stellenden Widerstandes mit zu umfassen vermag, ohne daß es jedoch gelungen wäre, zu befriedigenden und allgemein brauchbaren Ergebnissen dabei zu gelangen.

Für die Anwendungen in der Technik erscheint es besonders erwünscht, eine hinreichend genaue Näherungslösung der Aufgabe für den Fall des doppel-$T$-förmigen Querschnitts zu erhalten und darauf haben sich auch die bisherigen Bestrebungen ausschließlich gerichtet. Zuerst ist dies von Timoschenko[1]) in verschiedenen größeren Abhandlungen über die Stabilität des elastischen Gleichgewichts mehr nebenbei geschehen. Timoschenko hat dabei die Formänderung der Trägerflanschen als eine Biegung aufgefaßt, auf die er die Differentialgleichung der elastischen Linie eines gebogenen Stabes anwenden zu können glaubte. Daß dies nicht streng zulässig ist, war ihm wohl bekannt; aber ich möchte einstweilen annehmen, daß er den Grad der Annäherung an das wirkliche

---

[1]) Timoschenko, Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Zeitschr. f. Math. und Physik, Bd. 58, S. 337, 1910, sowie ausführlicher in „Sur la stabilité des systèmes elastiques“. Annales des ponts et chaussées. Fasc. III, IV, V, 1913.

Verhalten, der sich mit dieser Voraussetzung erreichen läßt, viel zu günstig eingeschätzt hat. Jedenfalls kann diese Frage noch nicht als befriedigend gelöst angesehen werden. Ich habe mit Versuchen begonnen, die elastische Formänderung solcher Träger unmittelbar zu messen und hoffe damit zu einer Klärung der Frage beitragen zu können.

Zu erwähnen ist ferner noch eine Arbeit von Senft[1]), der sich auf eine ähnliche Annahme stützt wie Timoschenko und wiederum die Differentialgleichung der elastischen Linie eines gebogenen Stabes auf die Mittellinie des Trägerflansches anwendet, obschon diese Differentialgleichung auf der Voraussetzung beruht, daß die Stabquerschnitte eben bleiben, während sie hier zweifellos gekrümmt werden.

Ich habe mich von diesen früheren Arbeiten jedenfalls nicht befriedigt gefühlt und mich daher bemüht, eine besser zutreffende Lösung zu finden. Da es sich nur um eine Näherungslösung handeln kann, erschien es angezeigt, zunächst durch unmittelbare Messungen einen Überblick darüber zu erlangen, wie sich ungefähr die Formänderung bei der Verdrehung in solchen Fällen tatsächlich vollzieht. Darauf werden sich dann geeignete Näherungsannahmen stützen lassen, die einer praktisch brauchbaren Theorie zu Grunde gelegt werden können. Da diese Messungen schwierig und sehr mühsam sind, werden sie freilich nicht so bald zum Abschlusse gebracht werden können.

Außer dem experimentellen ist aber auch noch ein anderer Weg möglich, der wenigstens für den einfachsten Fall des elliptischen Stabquerschnitts zu einer Lösung führt, für die es nicht nötig erscheint, sie durch Versuchsergebnisse erst noch besonders zu stützen. Diese Lösung wird zugleich auch ein Muster dafür abgeben können, nach dem man sich für andere Fälle richten kann und aus diesem Grunde will ich sie hier veröffentlichen, ohne zuvor den Abschluß der Versuche mit den Doppel-$T$-Trägern abzuwarten.

---

[1]) A. Senft, Über die Beanspruchung durch Drehmomente. Zeitschr. f. Bauwesen, Bd. 69, S. 683, 1919.

Eine Hinderung der Querschnittswölbung kann auf verschiedene Arten herbeigeführt werden. Im einfachsten Falle geschieht dies, indem ein Stabende derart befestigt wird, daß es als vollkommen eingespannt gelten kann, in demselben Sinne, in dem man von einer Einspannung bei der Biegung eines Stabes redet, so nämlich, daß kein Punkt des Einspannquerschnitts eine Verschiebung $\xi$ in der Richtung der Stabachse ausführen kann. Dieser Fall liegt z. B. vor bei Guß- oder Schmiedestücken, die aus einem stabförmigen Körper bestehen, der an einem Ende in eine starke Platte ausläuft, die senkrecht zur Stabachse steht und hinreichend steif ist, um jede merkliche Krümmung der Stabquerschnitte in ihrer unmittelbaren Nachbarschaft zu verhindern.

Ein anderer Fall liegt vor, wenn ein Stab durch drei drillende Kräftepaare belastet wird, von denen zwei an den beiden Enden angreifen, im gleichen Sinne drehen und gleich groß sind, während das dritte Kräftepaar in der Stabmitte angebracht ist, im entgegengesetzten Sinne dreht und doppelt so groß ist wie eins der vorigen. In diesem Falle können sich zwar die Endquerschnitte wölben, nicht aber der Mittelquerschnitt, der aus Symmetriegründen notwendig eben bleiben muß. Darauf hat schon Timoschenko hingewiesen. Jede der beiden Stabhälften verhält sich dann genau so wie ein Stab, der am einen Ende eingespannt und am freien Stabende durch ein verdrehendes Kräftepaar belastet wird.

Dann möge noch ein dritter Fall angeführt werden, nämlich ein Stab, der so lang ist, daß man ihn als unendlich lang ansehen kann und an dem in zwei Querschnitten, die nicht zu weit von der Stabmitte entfernt sind, zwei im entgegengesetzten Sinne drehende Kräftepaare von gleicher Größe angreifen. Nach dem Prinzip von de Saint-Venant in seiner allgemeinsten Fassung können die in größeren Abständen von dem Mittelstück liegenden Stabteile keine merkliche Formänderung durch die angegebenen Lasten erfahren. Die Querschnitte bleiben also dort eben und erst bei Annäherung an das Mittelstück gelangt man zu Querschnitten, die sich mehr und mehr krümmen.

Hier wird also die wenigstens teilweise Behinderung der mit einer einfachen und reinen Verdrehungsbeanspruchung verbundenen elastischen Formänderung auch in dem mittleren Stabteile durch den Zusammenhang mit dem sich nach außen hin anschließenden unbelasteten und im übrigen völlig freien Stabteile herbeigeführt.

Der Einfachheit halber wollen wir uns hier auf die Behandlung des zuerst angeführten Falles eines an einem Ende eingespannten Stabes beschränken, da ohnehin leicht ersichtlich ist, daß sich die übrigen Fälle in ganz ähnlicher Weise erledigen lassen. Nach dem Prinzip von de Saint-Venant läßt sich hier wiederum schließen, daß sich der Einfluß der Einspannung nur in den nicht zu weit vom Einspannquerschnitte entfernten Stabteilen bemerklich machen kann. Wir wollen voraussetzen, daß der Stab lang genug ist, um schon in der Stabmitte und darüber hinaus diesen Einfluß vernachlässigen zu können. In diesen Stabteilen kann sich dann die elastische Formänderung nicht mehr merklich von jener unterscheiden, die der gewöhnlichen Theorie der Drillung, also der von de Saint-Venant gegebenen Lösung entspricht.

Die $X$-Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems, auf das sich die vorher schon angeschriebenen Gleichungen bezogen, möge mit der Stabachse zusammenfallen und die $YZ$-Ebene mit dem Einspannquerschnitte. In Anlehnung an Gl. (1) machen wir dann für die Verschiebungskomponente $\xi$ den Ansatz

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3 G} M y z (1 - e^{-\gamma x}), \tag{2}$$

worin $\gamma$ ein „Freiwert“ ist, der seine nähere Bestimmung späterhin noch finden wird. Jedenfalls ist er unabhängig von den Koordinaten $x\, y\, z$. Der Ansatz entspricht einerseits dem Prinzip von de St.-V., indem das Zusatzglied für $x = \infty$ zu Null wird und andererseits der Grenzbedingung für den Einspannquerschnitt.

Ferner dürfen wir erwarten, daß ebenso wie in der gewöhnlichen Theorie der Drillung auch hier die Spannungskomponenten

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

zu setzen sind. Dagegen kann in unserem Falle die in der Richtung der Stabachse gehende Spannungskomponente $\sigma_x$ nicht mehr gleich Null sein; vielmehr ergibt sich dafür

$$\sigma_x = E\frac{\partial \xi}{\partial x} = \gamma\,\frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3}\cdot\frac{2(m+1)}{m}\,Myz\,e^{-\gamma x}. \tag{3}$$

Die Bedeutung der Buchstaben ergibt sich schon aus dem Zusammenhange und stimmt mit der in der Technik und auch in meinen Lehrbüchern gebrauchten Beziehungsweise hier und in der Folge überein. Zuletzt ist von der bekannten Beziehung zwischen den Elastizitätskonstanten

$$G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

Gebrauch gemacht worden.

Wir haben jetzt die Schubspannungskomponenten $\tau$ so zu wählen, daß sie mit den bereits festgestellten Normalspannungen $\sigma$ überall Gleichgewicht herstellen. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten hier

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0\\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0\\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ihnen läßt sich genügen, indem man zunächst

$$\tau_{yz} = k(a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2)^2 \cdot e^{-\gamma x} \tag{5}$$

setzt und sich vorbehält, $\tau_{xy}$ und $\tau_{xz}$ dementsprechend zu bestimmen. Für $x = \infty$ verschwindet, wie es sein muß, dieser Wert von $\tau_{yz}$ bei allen Werten von $y$ und $z$ in Übereinstimmung mit der Lösung von de St.-V. und im Querschnittsumfange verschwindet außerdem $\tau_{yz}$ auch für jeden Wert von $x$, wie es die dort bestehende Grenzbedingung verlangt. Unter

$k$ ist ein vom Verdrehungsmomente $M$ abhängiger Festwert zu verstehen, der sich nachher ergeben wird.

Damit die letzten beiden der Gleichungen (4) erfüllt werden, hat man zu setzen

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x} \cdot 4 k a^2 z (a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2) + \frac{2M}{\pi a b^3} z \\ \tau_{xz} &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x} \cdot 4 k b^2 y (a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2) - \frac{2M}{\pi a^3 b} y. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Bei der Ausführung der Integration nach $x$, die zur Ableitung dieser Formeln nötig ist, hat man die letzten Glieder als von $x$ unabhängige Integrationskonstanten beizufügen, so wie sie der Theorie von de St.-V. entsprechen. Die ersten Glieder verschwinden bei jedem Werte von $x$ am Querschnittsumfange, so daß die Grenzbedingungen überall erfüllt sind.

Die Rechtfertigung für den in Gleichung (5) gewählten Ansatz für $\tau_{yz}$ ergibt sich jetzt daraus, daß die erste der Gleichungen (4) durch alle diese Werte identisch erfüllt wird, falls man die bisher unbestimmt gebliebene Konstante $k$ entsprechend wählt. Eine einfache Rechnung lehrt, daß man zu diesem Zwecke

$$k = \gamma^3 \frac{a^2 - b^2}{8 \pi a^5 b^5} \cdot \frac{m+1}{m} M \quad (7)$$

zu setzen hat.

Der durch die aufgestellten Formeln beschriebene Spannungszustand genügt streng allen statischen Anforderungen mit Einschluß der Grenzbedingungen. Dabei kann der Konstanten $\gamma$ noch jeder beliebige Wert beigelegt werden und um diesen Umstand ausdrücklich hervorzuheben, wurde $\gamma$ vorher schon als ein „Freiwert“ bezeichnet.

Mit den aus dem elastischen Verhalten des Körpers hervorgehenden Anforderungen ist dieser Spannungszustand freilich nicht vereinbar. Die ihm entsprechenden Formänderungskomponenten müßten nämlich, wenn die Lösung streng richtig sein sollte, den „Verträglichkeitsgleichungen“ genügen und man überzeugt sich leicht, daß diese Bedingung nicht erfüllt ist.

Wir hatten aber von vornherein schon auf eine strenge Lösung der Aufgabe verzichtet und wollten uns mit einer hinreichend gut zutreffenden Näherungslösung begnügen. Wir dürfen erwarten, zu einer solchen zu gelangen, wenn wir den Freiwert $\gamma$ nachträglich so bestimmen, daß er die in dem Stabe aufgespeicherte Formänderungsarbeit zu einem Minimum macht. Dieses Verfahren wurde zuerst von Ritz benutzt und wird gewöhnlich nach ihm benannt. In dem von mir gemeinschaftlich mit L. Föppl herausgegebenen Buche „Drang und Zwang" ist es ausführlich besprochen und begründet und auf zahlreiche Beispiele angewendet worden. Hier soll es genau in derselben Weise gehandhabt werden, wie es dort geschehen ist.

Wir gehen aus von der Formel für die auf die Raumeinheit bezogene Formänderungsarbeit $\mathsf{A}$, nämlich

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2G}\left[\tfrac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1}{2(m+1)}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \right.$$
$$\left. + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right],$$

die sich aber in unserem Falle wegen $\sigma_y = \sigma_z = 0$ vereinfacht zu

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2G}\left[\frac{m}{2(m+1)}\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right].$$

Die im ganzen Stabe aufgespeicherte Formänderungsarbeit $A$ folgt daraus durch eine Integration über den Querschnitt und über die Stablänge von $x = 0$ bis $x = l$. Hierbei wollen wir annehmen, daß der Stab so lang ist, daß sich die in der Nähe des eingespannten Querschnitts auftretenden Spannungsstörungen nur auf einen kleinen Teil der ganzen Stablänge erstrecken. Unter dieser Voraussetzung kann man genau genug

$$\int_0^l e^{-\gamma x}\,dx = \int_0^\infty e^{-\gamma x}\,dx = \frac{1}{\gamma}$$

setzen. Wir bilden zuerst

$$\iint \sigma_x^2\,dF\,dx = c^2\gamma^2 \int_0^\infty e^{-2\gamma x}\,dx \int y^2 z^2\,dF. \qquad (8)$$

wobei der Buchstabe $c$ zur Abkürzung für den Ausdruck

$$c = \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3} \cdot \frac{2(m+1)}{m} M \tag{9}$$

dient. Führt man die Integrationen aus, so erhält man

$$\int\int \sigma_x^2 \, dF \, dx = c^2 \gamma \cdot \frac{\pi a^3 b^3}{48}. \tag{10}$$

Wir kommen jetzt zur Berechnung des Integrals

$$\int\int \tau_{xy}^2 \, dx \, dF = \frac{8 k^2 a^4}{\gamma^3} \int z^2 (a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2)^2 \, dF$$
$$- \frac{16 M k a}{\gamma^2 \cdot \pi b^3} \int z^2 (a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2) \, dF + \frac{4 M^2 l}{\pi^2 a^2 b^6} \int z^2 \, dF.$$

Die hierin noch vorkommenden Integrale über den elliptischen Querschnitt berechnet man am einfachsten, indem man die Ellipse als rechtwinkelige Projektion eines Kreises ansieht und die Integrale aus den für die Kreisfläche gültigen ableitet. Man erhält auf diesem Wege leicht

$$\int z^2 (a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2)^2 \, dF = \frac{\pi a^5 b^7}{24}$$

$$\int z^2 (a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2) \, dF = \frac{\pi a^3 b^5}{12}$$

und im ganzen ergibt sich bei Benutzung dieser Formeln

$$\int\int \tau_{xy}^2 \, dx \, dF = \frac{\pi k^2 a^9 b^7}{3 \gamma^3} - \frac{4 M k a^4 b^2}{3 \gamma^2} + \frac{M^2 l}{\pi a b^3}. \tag{11}$$

Genau ebenso kann man auch das folgende Integral berechnen und erhält dafür

$$\int\int \tau_{xz}^2 \, dx \, dF = \frac{\pi k^2 a^7 b^9}{3 \gamma^3} + \frac{4 M k a^2 b^4}{3 \gamma^2} + \frac{M^2 l}{\pi a^3 b}. \tag{12}$$

Das letzte Integral läßt sich einfacher ausrechnen und man findet dafür

$$\int\int \tau_{yz}^2 \, dx \, dF = \frac{k^2}{2\gamma} \int (a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2)^4 \, dF = \frac{k^2}{2\gamma} \cdot \frac{\pi a^9 b^9}{5}. \tag{13}$$

Die ganze Formänderungsarbeit A läßt sich aus diesen Gliedern bilden, nämlich

$$A = \frac{1}{2G}\left[\frac{m}{2(m+1)}c^2\gamma\cdot\frac{\pi a^3 b^3}{48}+\frac{\pi k^2 a^7 b^7}{3\gamma^3}(a^2+b^2)\right.$$
$$\left.-\frac{4Mka^2b^2}{3\gamma^2}(a^2-b^2)+\frac{M^2 l}{\pi a^3 b^3}(a^2+b^2)+\frac{k^2}{10\gamma}\cdot\pi a^9 b^9\right].$$

Hier sind nun noch die Werte von $c$ und von $k$ einzusetzen. Dabei kann man aber die Glieder durch Herausheben gemeinschaftlicher Faktoren erheblich zusammenziehen, so daß man auf einen verhältnismäßig einfach gebauten Ausdruck gelangt. Er lautet

$$A=\frac{1}{2G}\cdot\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 M^2\cdot\frac{(a^2-b^2)^2}{8\pi a^3 b^3}\left[\gamma^5\cdot\frac{a^2b^2}{80}+\gamma^3\cdot\frac{a^2+b^2}{24}-\frac{m}{m+1}\gamma\right]$$
$$+\frac{1}{2G}\cdot\frac{M^2(a^2+b^2)}{\pi a^3 b^3}l. \tag{14}$$

Diesen Ausdruck differentiieren wir nach $\gamma$ und setzen den Differentialquotienten gleich Null. Damit erhalten wir für $\gamma$ die Bestimmungsgleichung

$$\gamma^4 a^2 b^2 + 2\gamma^2(a^2+b^2) = \frac{16m}{m+1}. \tag{15}$$

Durch Auflösen ergibt sich zunächst

$$ab\gamma^2 = -\frac{a^2+b^2}{ab}\pm\sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b^2}+\frac{16m}{m+1}}.$$

Für $\gamma$ ist nur eine Wurzel brauchbar, da den Bedingungen der Aufgabe gemäß $\gamma$ notwendig reell und positiv sein muß.

Im wesentlichen ist hiermit die Aufgabe bereits gelöst. Nachdem $\gamma$ bekannt ist, findet man nämlich nicht nur alle Spannungskomponenten nach den dafür aufgestellten Formeln, sondern auch der Verdrehungswinkel des Stabes, auf den es für die weitere Verwendung der Theorie hauptsächlich ankommt, kann nachträglich ebenfalls leicht daraus berechnet werden. Bezeichnet man diesen Winkel mit $\Delta\varphi$, wobei durch das Zeichen $\Delta$ darauf hingewiesen werden soll, daß der Winkel jedenfalls als klein anzusehen sein wird, so folgt $\varDelta\varphi$ aus der Arbeitsgleichung

$$\tfrac{1}{2} M \varDelta\varphi = A, \tag{16}$$

in die man $A$ aus Gleichung (14) einzusetzen hat.

Es bleibt nur noch übrig, an einigen Zahlenbeispielen zu zeigen, was man ungefähr zu erwarten hat. Hierfür soll, wie üblich, die Poissonsche Konstante $m = 4$ gesetzt werden. Für den kreisförmigen Querschnitt, also für $a = b$ folgt aus Gleichung (15)

$$\gamma = 1{,}45 \cdot \frac{1}{a}.$$

Freilich handelt es sich dabei nur um einen Grenzfall, in dem unsere Formeln ihre Bedeutung verlieren. Mit $a = b$ wird nämlich $k$ nach Gleichung (7) zu Null und hiermit verschwinden alle Glieder in den Spannungskomponenten, in denen $\gamma$ vorkommt, so daß nur noch die von de St.-V. gegebene Lösung übrig bleibt.

Als zweites Zahlenbeispiel betrachten wir den Fall $a = 10b$, der einer schon recht stark abgeplatteten Querschnittsellipse entspricht. Hierfür ergibt sich

$$\gamma = 0{,}265 \cdot \frac{1}{a} = 0{,}265 \cdot \frac{1}{b}.$$

Für die Berechnung von $A$ ziehen wir die in der eckigen Klammer von Gleichung (14) vorkommenden Glieder zusammen zu

$$\gamma\left[\gamma^4 \cdot \frac{a^2 b^2}{80} + \gamma^2 \cdot \frac{a^2 + b^2}{24} - \frac{4}{5}\right] = \gamma\left[\frac{0{,}49}{80} + \frac{7{,}07}{24} - 0{,}8\right] = -0{,}50\,\gamma.$$

Der von $\gamma$ abhängige Teil des Ausdruckes für $A$ wird hiernach negativ und man überzeugt sich auch leicht, daß er bei allen überhaupt in Betracht kommenden Abplattungen negativ ausfallen wird. Das ließ sich von vornherein erwarten, da die Einspannung des Anfangsquerschnitts eine Erschwerung der elastischen Formänderung mit sich bringt, die nur eine Verminderung, aber keine Vermehrung der elastischen Formänderungsarbeit zur Folge haben kann.

Hierauf ergibt sich beim weiteren Ausrechnen von $A$ nach Gleichung (14)

$$A = \frac{M^2}{2\,G\,\pi\,b^3}\left(1{,}01\,\frac{l}{a} - 0{,}25\right)$$

und für den Verdrehungswinkel $\varDelta\varphi$ folgt aus Gleichung (16), wenn man den Wert von $\pi$ einsetzt und $a$ durch $b$ ersetzt

$$\varDelta\varphi = \frac{M}{G\,b^3}\left(0{,}032\,\frac{l}{b} - 0{,}08\right).$$

Das erste Glied in der Klammer entspricht dem Verdrehungswinkel für den Fall ungehinderter Querschnittswölbung und das zweite Glied der Verminderung, die durch die Einspannung des Anfangsquerschnitts herbeigeführt wird. Diese Verminderung ist eben so groß, als wenn die Stablänge $l$ um $2{,}5\,b$ verkürzt wäre. Für einen Abstand $x = 2{,}5\,b$ vom Einspannquerschnitte wird andererseits $\gamma x = 0{,}66$ und $e^{-\gamma x} = 0{,}41$. Bis zu dieser Stelle hin haben sich daher die in den Gleichungen (3) bis (6) für die Spannungskomponenten auftretenden, mit $\gamma$ behafteten Glieder bereits auf 0,41 ihres Wertes im Einspannquerschnitt vermindert.

Wir berechnen weiter die Normalspannung $\sigma_x$ im Einspannquerschnitt. Für den Fall $a = 10\,b$ erhält man dafür nach Gleichung (3)

$$\sigma_x = 0{,}021\,\frac{y\,z}{b^5}\,M.$$

Der größte Wert, den $\sigma_x$ annimmt, sei mit $\sigma_{\max}$ bezeichnet. Diese Spannung tritt am Umfange des Einspannquerschnitts an jener Stelle auf, für die $y\,z$ den größtmöglichen Wert $\frac{a\,b}{2}$ oder jetzt $5\,b^2$ erreicht. Hiermit folgt

$$\sigma_{\max} = 0{,}105\,\frac{M}{b^3}.$$

Wir vergleichen diesen Wert mit der größten Schubspannung $\tau_{\max}$, die im Stabe vorkommt. Diese entspricht der von de St.-V. aufgestellten Formel, da im Einspannquerschnitt oder in seiner Nähe keine Vergrößerung von $\tau$ über das im völlig freien Stabe vorkommende Maß hinaus stattfindet. Man hat daher

$$\tau_{\max} = \frac{2M}{\pi a b^2} = 0{,}0637 \frac{M}{b^3}.$$

Der Vergleich lehrt, daß die absolut größte Spannung im im Einspannquerschnitt auftritt und daß $\sigma_{\max}$ für den Fall $a = 10\,b$ das 1,65-fache von $\tau_{\max}$ ausmacht. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß für die meisten Baustoffe die Schubbeanspruchung an sich gefährlicher ist als eine gleich große Zug- oder Druckbeanspruchung. In der Regel wird daher keine besondere Erhöhung der Bruchgefahr durch die Einspannung zu erwarten sein.

Endlich kann man auch noch den Grenzfall ins Auge fassen, daß $a$ als unendlich groß gegen $b$ angesehen werden kann. Praktisch ist dieser Fall insofern von Bedeutung, als er zugleich auch eine ungefähre Abschätzung dafür ermöglicht, wie die Verhältnisse bei einem rechteckigen Querschnitt von dem gleichen Seitenverhältnisse ungefähr liegen dürften. Für diesen Fall erhält man als Lösung von Gleichung (15)

$$a\gamma = \sqrt{\frac{8m}{m+1}} = 2{,}53$$

und wenn man diesen Wert in Gleichung (14) einführt und hierauf $\Delta\varphi$ nach Gleichung (16) berechnet, ergibt sich

$$\Delta\varphi = \frac{M}{G\pi b^3}\left(\frac{l}{a} - 0{,}26\right),$$

was mit dem Falle $a = 10\,b$ fast ganz übereinstimmt. Endlich erhält man noch für $\sigma_{\max}$ in derselben Weise wie vorher

$$\sigma_{\max} = 3{,}16 \frac{M}{\pi a b^2}$$

oder das 1,58-fache von $\tau_{\max}$ für denselben Fall.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1920

Band/Volume: 1920

Autor(en)/Author(s): Föppl August

Artikel/Article: Die Beanspruchung eines Stabes von elliptischem Querschnitt auf Drillen bei behinderter Querschnittswölbung 261-273