Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1921. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1921
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Darstellung eines nahezu ebenen Geländes nach Fliegeraufnahmen bei spärlich vorhandenen Festpunkten.

Von **Ernst Rudel.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 8. Januar 1921.

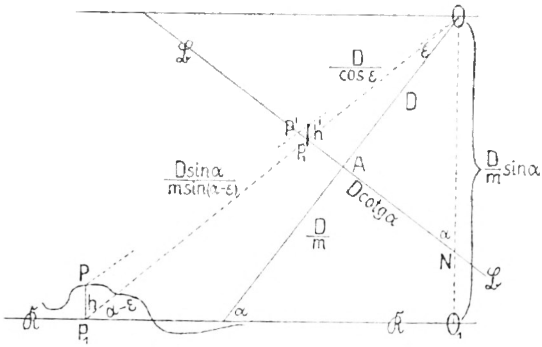
Bei der kriegsmäßigen Anwendung der Luftphotogrammetrie lag meistens, namentlich an der ganzen Westfront, etwa folgende Aufgabe vor: Das auf feindlicher Seite gelegene, also unzugängliche Gelände ist durch Flieger lückenlos und in mehrfacher Überdeckung aufgenommen Über die äußere oder innere Orientierung der einzelnen Aufnahmen ist außer dem rohen Werte der Bildweite meist nichts bekannt. Trigonometrische Festpunkte sind nur ganz vereinzelt vorhanden, so daß nur hin und wieder ein bis höchstens zwei Punkte auf einem Bild auffindbar sind, die meisten Bilder haben gar keinen Anschlußpunkt. Auf diesen Grundlagen soll die Herstellung einer Karte versucht werden.

Zunächst scheint die Lösung der Aufgabe angesichts der spärlichen Unterlagen nicht sehr aussichtsvoll zu sein. Indessen darf nicht übersehen werden, daß eine Luftaufnahme auch dann, wenn sie keinen Festpunkt enthält, doch schon allein durch den Umstand, daß sie eine Perspektive des Objektes darstellt, nutzbare Konstruktionsmöglichkeiten in sich birgt. Ist nun das Gelände in mehrfacher Überdeckung aufgenommen, so kann durch diese Häufung der Perspektiven ein und desselben Geländestückes der Mangel an Festpunkten zum Teil wieder ausgeglichen werden.

Im folgenden sei vorerst ein vollständig ebenes Gelände angenommen. Die Arbeit beginnt damit, daß die Festpunkte auf einem Zeichenblatt in dem beabsichtigten Maßstabe aufgetragen („Festpunktplan“), durch gerade Linien verbunden und diese Linien auch in sämtliche Bilder eingetragen werden. Zu diesem Zweck wählt man Reihen von Bildern aus, die sich gegenseitig etwa zur Hälfte übergreifen; auf den beiden äußersten Bildern der Reihe ist je ein Festpunkt vorhanden. Das Auffinden der Linien gelingt nun ohne Schwierigkeit durch planmäßige Annäherung. Man benützt dazu Glasplatten mit eingeritzter Geraden, die man auf die Platten oder Abzüge auflegt. Die richtige Lage der auf allen Zwischenbildern eingetragenen („abgesteckten“) Linien läßt sich mühelos daran erkennen, daß die Linien auf den übergreifenden Teilen durch dieselben Geländemarken gehen. Durch wiederholte Absteckung derselben Verbindungslinie unter Einschalten neuer Bilder konnte der mittlere Fehler der Absteckung, der naturgemäß in der Mitte am größten ist, ermittelt werden. Es ergab sich bei einer Länge von 5 km ein mittlerer Fehler von 2—3 m. Die Bilder waren meist aus 4—6000 m Höhe mit 50 cm (gelegentlich auch 25 cm) Brennweite und stets unter Verwendung eines Schlitzverschlusses aufgenommen. Da dieser erhebliche Verzeichnungen (über 1 mm) im Gefolge hat, so ist zu erwarten, daß der mittlere Fehler der Absteckungen bei Verwendung eines Zentral- oder wenigstens Lamellenverschlusses erheblich sinkt. Es empfiehlt sich nicht, die Länge der Linien über 10 km zu treiben; daher muß die nötige Verdichtung des Netzes auf andere Weise erreicht werden. Hiezu dienen die als Schnitte zweier abgesteckter Linien entstandenen Knotenpunkte und die hievon auslaufenden Strahlen. Selbstverständlich werden alle abgesteckten Linien auch auf dem Festpunktplan eingetragen. Diejenigen Bilder, die einen Festpunkt oder einen Knotenpunkt enthalten, ermöglichen eine wertvolle Ausgleichung der von diesem Punkt auslaufenden Richtungen, da die beiden Strahlbüschel auf Bild und Festpunktplan projektiv sein müssen, ein Umstand, der auch das erste Aufsuchen der abzusteckenden Linien wesentlich abkürzt. Bei dieser Ausgleichung sind den einzelnen Strahlen Gewichte umgekehrt proportional ihrer Länge beizulegen. Unter obigen Voraussetzungen ergab sich auf Grund solcher Ausgleichungen, daß der mittlere Winkelfehler einer abgesteckten Linie vor der Ausgleichung 10′ bis 20′ und nach der Ausgleichung 5′ bis 10′ beträgt. Einzelne der abgesteckten Linien, die infolge Verzeichnung durch den Schlitzverschluß krummlinig abgesteckt worden waren, ohne daß dies unmittelbar erkennbar war, konnten stets bei dieser Richtungsausgleichung nachträglich festgestellt und ausgemerzt werden. Nur dieser Durchbiegung infolge Verzeichnung ist es zuzuschreiben, daß die obigen Beträge für die Winkelfehler auftreten können; denn gemäß den Positionsfehlern beim Abstecken selbst müßten sie niedriger ausfallen.

Ist das Netz der abgesteckten Linien durch diese Kontrollen und Ausgleichungen genügend gefestigt und soweit verdichtet, daß in jedes zur Bearbeitung vorgesehene Fliegerbild mindestens vier projektiv unabhängige Linien hereinfallen, so ist die projektive Beziehung zwischen Fliegerbild und Festpunktplan eindeutig festgelegt, demnach die weitere Bearbeitung eine elementare Aufgabe. Sie erfolgt entweder durch die bekannten, rein graphischen Verfahren, oder, was für die Massenbearbeitung vorteilhafter ist, durch Benützung eines Umbildegerätes, das 4 Elemente der Perspektive stetig zu verändern erlaubt. Die Einstellung des Gerätes wird so vorgenommen, daß die in das Bild fallenden Teile der abgesteckten Linien sich mit den entsprechenden Linien des Festpunktplans decken. Da mit fortschreitender Verdichtung des Netzes die Länge der abzusteckenden Linien und die darauf zu verwendende Zeit rasch abnimmt, erweist es sich als vorteilhaft, 2 bis 3 mal soviel Linien in das einzelne Bild fallen zu lassen, als zur geometrischen Bestimmung notwendig sind. Hierdurch gewinnt man eine letzte Kontrolle der abgesteckten Linien und erleichtert die Einstellung des Bildgerätes.

Wenn das Verfahren auch zunächst für ebenes Gelände bestimmt ist, so lassen sich doch auch Gebiete einbeziehen, die mäßige Höhenunterschiede aufweisen, nur müssen dann die ungefähren Höhen bekannt sein. Für diesen Fall wurden Kurventafeln berechnet, die auf das Fliegerbild aufgelegt Richtung und Größe der durch die Unebenheit des Geländes bedingten Verschiebung eines Bildpunktes in einfacher Weise entnehmen lassen. Diese Tafeln erweisen sich auch sonst für die Darstellung hügeligen Geländes nach Fliegerbildern als zweckmäßig. Der zugrunde liegende Gedanke ist folgender: an Stelle des vorliegenden Fliegerbildes sucht man ein anderes auf, das eine richtige Perspektive der Karte ist und in einer passend gewählten mittleren Horizontalebene mit dem vorliegenden Fliegerbild übereinstimmt. Wie leicht ersichtlich, gelangt man von dem vorliegenden Fliegerbild zu der gesuchten Perspektive, indem man jeden Punkt des Bildes in Richtung auf den Nadirpunkt zu (oder von ihm weg) um einen kleinen Betrag verschiebt, der von der Erhebung des Geländepunktes über die Mittelebene und außerdem von den Elementen der inneren und äußeren Orientierung abhängt.



In vorstehender Zeichnung sei O der Ort des Flugzeuges und zugleich der Mittelpunkt der Perspektive, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}$ ist die orientierte Bildebene, D die Bildweite der Aufnahme, $\mathfrak{K}\mathfrak{K}$ die Ebene der Karte für den beabsichtigten Maßstab, α der Neigungswinkel der Aufnahme gegen den Horizont. Über der Kartenebene sei das Gelände räumlich im Maßstab der Karte aufgebaut, P sei ein überhöhter Geländepunkt, P_1 seine Projektion, $PP_1 = h$ seine Erhebung über die Mittelebene, P' ist das Bild des Geländepunktes in der Fliegeraufnahme, P_1' die korrigierte Lage dieses Bildes. Liegt der fragliche Geländepunkt nicht in der durch die Hauptsenkrechte gehenden Lotebene, so sind die Punkte P, P', P_1, P_1' als die Projektionen der oben aufgeführten Punkte in die Zeichnungsebene aufzufassen. $y = A P_1'$ ist die auf dem Fliegerbild von der Hauptwagrechten an gemessene Ordinate des korrigierten Geländepunktes. Ist H die Flughöhe und M die Maßstabszahl der Karte, so ist $m = \frac{D \sin \alpha}{H} \cdot M$ das auf der Hauptwagrechten gültige Maßstabsverhältnis des Fliegerbildes zur Karte. Wir ziehen noch $h' \| h$ und führen zur Berechnung den Winkel $\varepsilon = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{D}$ ein, dann gilt

$$h' = h \cdot \frac{D}{\cos \varepsilon} \cdot \frac{m \sin(\alpha - \varepsilon)}{D \sin \alpha} = m h (1 - \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{tg} \varepsilon) = m h \left(1 - \frac{y}{D \operatorname{tg} \alpha}\right).$$

Zur Berechnung der Korrektur $\Delta = P_1' P'$, die man an dem Bild des Punktes P anzubringen hat, suchen wir zunächst die durch eine verschwindend kleine Erhebung h bewirkte Verschiebung Δ. Dann besteht die weitere Beziehung

$$\begin{aligned} \Delta = h' \frac{\cos(\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon} &= m h \frac{\cos(\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon} \left(1 - \frac{y}{D \operatorname{tg} \alpha}\right) \\ &= m h \left(\cos \alpha + \frac{y}{D} \sin \alpha\right) \left(1 - \frac{y}{D \operatorname{tg} \alpha}\right). \end{aligned}$$

Bis hieher wurde so gerechnet, als ob P' in die Hauptsenkrechte fiele, allgemein wird

$$\Delta = m h \left(\cos \alpha + \frac{y}{D} \sin \alpha\right) \left(1 - \frac{y}{D \operatorname{tg} \alpha}\right) \cdot \frac{1}{\cos \varphi},$$

worin φ den Winkel bedeutet, den der vom Nadirpunkt N des Bildes nach P' gezogene Strahl mit der Hauptsenkrechten einschließt. Schreibt man zur Abkürzung $\Delta = m h \varrho$, so erscheint die gesuchte Verschiebung als Produkt dreier Faktoren: m ist für das ganze Bild fest und wird entweder aus Flughöhe und Neigung der Aufnahme bestimmt, wofür die Angaben von Barometer und Neigungsmesser bei richtiger Behandlung genügende Näherungswerte geben, oder man ermittelt m unmittelbar durch Vergleich des Fliegerbildes mit einer vorhandenen Karte; ϱ ist eine Größe, die von Ort zu Ort auf dem Fliegerbild wechselt. Die Kurventafeln, die zur Aufsuchung von Δ aus h dienen sollen, enthalten die Kurvenschar $\varrho = c$ in geeigneten Intervallen, wobei der Zahlwert für c so beigeschrieben wird, daß sich Δ in mm ergibt, wenn h in Metern eingesetzt wird. Liegt die fertige Tafel auf dem Fliegerbild auf, so liest man durch Einschaltung zwischen die Nachbarkurven den jedem Geländepunkt zukommenden ϱ-Wert ab und hat diese Zahl dann noch mit mh zu multiplizieren. In mäßig unebenem Gelände genügt es, den Zahlwert für ϱ kurzerhand an der Stelle des Geländepunktes P' abzulesen, andernfalls gilt die Mitte von $P' P_1'$ als maßgebend für die schärfere Berechnung von Δ. Aus diesem Grunde ist die Verwendung der Kurventafeln in stark bergigem Gelände (d. h. mit Höhenunterschieden von mehreren 100 m innerhalb eines Fliegerbildes) für genauere Arbeiten nicht mehr zu empfehlen, doch sind sie auch hier zur raschen Ermittelung von guten Näherungswerten geeignet.

Zur Berechnung dieser Kurvenschar seien Hauptwagrechte und Hauptsenkrechte als Koordinatenachsen zugrunde gelegt, dann ist:

$$\varrho = \left(\cos\alpha + \frac{y}{D}\sin\alpha\right)\left(1 - \frac{y}{D\operatorname{tg}\alpha}\right)\frac{1}{\cos\varphi}$$

$$\varrho\cos\varphi = -\left(\frac{y}{D}\right)^2\cos\alpha + \frac{y}{D}\left(\sin\alpha - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\right) + \cos\alpha$$

$$\left(\frac{y}{D}\right)^2 + 2\,\frac{y}{D}\operatorname{cotg} 2\,\alpha - 1 + \frac{\varrho\cos\varphi}{\cos\alpha} = 0$$

$$y = \frac{D}{\sin 2\,\alpha}\left(-\cos 2\,\alpha \pm \sqrt{1 - 2\,\varrho\sin\alpha\sin 2\,\alpha\cos\varphi}\right)$$

$$x = (y + D\operatorname{cotg}\alpha)\operatorname{tg}\varphi,$$

demnach lautet die Parametergleichung der Kurvenschar

$$x = \frac{D \operatorname{tg} \varphi}{\sin 2\alpha} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2\varrho \sin\alpha \sin 2\alpha \cos\varphi}\right)$$

$$y = \frac{D}{\sin 2\alpha} \left(-\cos 2\alpha \pm \sqrt{1 - 2\varrho \sin\alpha \sin 2\alpha \cos\varphi}\right).$$

Durch Elimination von φ erhält man eine algebraische Gleichung 4. Grades, doch ist die Parameterform für die Berechnung der Kurventafeln vorzuziehen. Für steile Winkel α nähern sich die Kurven der Kreisform, daher empfiehlt sich das Zeichnen der Kurven aus Krümmungskreisen. In den Schnittpunkten der ϱ-Kurven mit der Hauptsenkrechten ($\varphi = 0, \pi$) werden die Krümmungsradien:

$$r_{0,\pi} = \frac{D\sqrt{1 \mp 2\varrho \sin\alpha \sin 2\alpha}\left(1 - \sqrt{1 \mp 2\varrho \sin\alpha \sin 2\alpha}\right)^2}{\varrho \sin\alpha \sin^2 2\alpha}.$$

In den Schnittpunkten der Kurvenschar mit der durch den Nadierpunkt gehenden Parallelen zur Hauptwagrechten $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ wird der Krümmungsradius:

$$r_{\frac{\pi}{2}} = \frac{D\left(1 + \left(\frac{\varrho}{2} \sin\alpha \sin 2\alpha\right)^2\right)^{3/2}}{\varrho \sin\alpha \sin^2 2\alpha + \frac{1}{\varrho \sin\alpha}}.$$

Im ersteren Falle liegt der Krümmungsmittelpunkt auf der Hauptsenkrechten, im letzteren Falle auf einer Geraden mit dem Richtungsfaktor $-\frac{\varrho}{2} \sin\alpha \sin 2\alpha$ durch den für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ berechneten Kurvenpunkt.

Für $\alpha = 90^0$ werden die Kurven konzentrische Kreise mit den Radien $r = D\varrho$. Für den vorliegenden Zweck genügt es, wenn die Tafeln für α von 5^0 zu 5^0 entworfen werden, etwa für $D = 500$ mm. Die zu $D = 250$ mm passenden Tafeln erhält man dann durch photographische Verkleinerung auf die Hälfte, ohne an den Zahlwerten für ϱ etwas zu ändern.

Nachdem die (durchsichtige) Tafel auf das Bild oder die Platte aufgelegt ist, wird die Verschiebung $\Delta = h m \varrho$ gruppen-weise vom Rechenschieber abgelesen. Beim Abstecken nimmt man den Betrag Δ in den Stechzirkel; die eine Spitze kommt an den Strich der Platte, die andere an die Bildmarke. Meist erweist es sich als vorteilhafter, mit fester Zirkelöffnung von 1,0 mm zu arbeiten und die Bruchteile zu schätzen.

Zum Schlusse mögen noch einige mittels des Absteckverfahrens erzielte praktische Ergebnisse mitgeteilt werden. Während des Krieges wurden in Nordfrankreich nach diesem Verfahren seit August 1917 insgesamt etwa 400 qkm bearbeitet. Hieran beteiligten sich außer dem Verfasser insbesondere die Herren Dr. Gürtler und Dr. Lagally. Die fertige Karte wies dort, wo genügend überdeckende Bilder vorlagen, mittlere Lagenfehler bis zu 5 m auf. Trotz der sehr spärlichen trigonometrischen Festpunkte gelang es in 2 Fällen, fehlerhafte Koordinatenwerte der unzugänglichen Punkte aufzudecken. Ihre mutmaßlichen Werte ließen sich dann durch Übertragen der nach ihnen hinlaufenden abgesteckten Linien aus den Fliegerbildern in den Festpunktplan ermitteln. Nachträglich aufgefundene Koordinatenverzeichnisse bestätigten in durchaus befriedigender Weise die so erhaltenen Koordinatenwerte. Der genannte Lagenfehler von 5 m wird zweifellos herabgedrückt werden, wenn die ungünstigen Voraussetzungen der feldmäßig gewonnenen Fliegeraufnahmen — Schlitzverschluß, fehlende Neigungsmesser, großer zeitlicher Zwischenraum (über 2 Jahre!) zwischen den einzelnen Aufnahmen mit unterdessen erfolgter Änderung in der Bebauung oder Zertrommelung des Geländes, häufige Störung durch schlechte Sicht oder Wolkenfetzen, ungünstige Tageszeit — bei planmäßiger Aufnahmearbeit entfallen. Es darf erwartet werden, daß dann der mittlere Fehler 3 m nicht übersteigt.

Bemerkungen und Ergänzungen zu der vorstehenden Abhandlung.

Von S. Finsterwalder.

Wenn man die in vorstehender Abhandlung auseinandergesetzte Methode der Fliegeraufnahme eines ebenen Geländes ihrer mehr zufälligen Anwendung entäußert und ihren geometrischen Kern hervorzuheben sucht, so bemerkt man bald, daß das dabei verwendete Verfahren des Absteckens gerader Linien und der Benutzung projektiver Beziehungen zwischen entsprechenden Punktreihen und Strahlenbüscheln in Bild und Karte auch so verwertet werden kann, daß man von einem willkürlich gewählten Bild ausgeht und den Inhalt der übergreifenden Nachbarbilder projektiv an das ausgewählte Bild anreiht, wodurch dieses entsprechend erweitert wird. Es stellt dann das projektive Abbild eines größeren Geländeabschnittes als des ursprünglichen dar und diese Erweiterung kann theoretisch solange fortgesetzt werden, als neue Bilder zur Verfügung stehen, die in den bereits erweiterten Bereich „genügend" übergreifen. Für die wirkliche Anwendung bedeutet dieses „genügend", daß annähernd die Hälfte des neuen Bildes in dem bereits erfolgten Zusammenschluß der übrigen Bilder enthalten ist. Zu einer Kartendarstellung des Geländes führt das so erweiterte Gruppenbild immer dann, wenn es schließlich vier bekannte nicht zu dritt in einer Geraden liegende Kartenpunkte enthält. Es kann dann nach dem Viereck dieser vier Kartenpunkte projektiv entzerrt werden, wodurch eben die richtige Karte entsteht. Auch wenn zunächst noch keine, oder weniger als vier Kartenpunkte in einer Gruppe von gegenseitig genügend übergreifenden Bildern wiedergegeben sind, so wird doch ihr projektiver Zusammenschluß zu einem einheitlichen Gruppenbilde von Nutzen sein, sei es daß eine weitere Verdichtung des Netzes der bekannten Kartenpunkte oder eine Erweiterung der Gruppe auf ein größeres Gebiet in Aussicht steht. Man wird dann besser so vorgehen, daß man nicht ein willkürlich gewähltes Bild der Gruppe, wie vorhin angenommen, mit Zuziehung der übrigen erweitert, sondern, daß man die gegenseitige Lage von vier ausgezeichneten, am Rande des von der Gruppe umfaßten Geländes gelegenen Punkten nach Gutdünken wählt und dann die Seiten und Diagonalen des durch sie bestimmten Viereckes in die Bilder überträgt. Die projektiven Halbierungspunkte jeder Seite dieses Viereckes können dann von den Enden der gegenüberliegenden Seite aus auf den Bildern abgesteckt werden, wofür die drei von einem solchen Ende bereits ausgehenden abgesteckten Richtungen die projektive Grundlage abgeben. Proben für die Richtigkeit dieser Absteckung liefern einmal die Notwendigkeit, daß sich die beiden von den Enden der gegenüberliegenden Seite ausgehenden abzusteckenden Linien schließlich auf einer schon abgesteckten Linie, dem Bilde der projektiv zu halbierenden Seite nämlich, schneiden müssen, dann die weitere Notwendigkeit, daß die Bilder der projektiven Mittelpunkte gegenüberliegenden Viereckseiten mit dem Bild des Diagonalschnittpunktes auf einer Flucht liegen müssen, was durch das Abstecken dieser Flucht nach zweien von den drei Punkten geprüft wird. Stimmen diese Proben, so hat man bereits 9 Punkte mit 8 Verbindungslinien, die je drei Punkte enthalten. In ähnlicher Weise kann die Verdichtung des Netzes der abgesteckten Punkte und Verbindungslinien weiter geführt werden, bis schließlich jedes der benutzten Bilder die nötige oder besser noch eine überschüssige Zahl von abgesteckten Punkten und Linien enthält, wie sie zur Entzerrung erforderlich oder nützlich ist. Durch diese Überlegungen überzeugt man sich schließlich, daß alle möglichen projektiven Konstruktionen auf einem ebenen Gelände in einer Gruppe von übergreifenden Bildern dieses Geländes vorweg genommen werden können.

Anschließend an diese Betrachtungen ergeben sich einige Fragen von theoretischem Belange, die aber auch von Bedeutung für die Anwendung sind. Wie steht es mit der Wiederherstellung eines ebenen Geländes aus einer Gruppe von einfach überdeckenden, nicht übergreifenden Bildern? Praktisch sind damit Bilder gemeint, die nur auf schmalen Streifen übergreifen, welche für eine wirksame Verwendung der projektiven Beziehungen quer zur Streifenrichtung nicht ausreichen. Mit solchen allein ist kaum etwas Ersprießliches zu leisten. Anders liegt die Sache dann, wenn unter der Gruppe einfach überdeckender Bilder ein oder mehrere Paare übergreifender vorkommen. Ein solches Paar kann zunächst zu einem Bilde vereinigt werden. Hat nun dieses vereinigte Bild eine einspringende Ecke und grenzt an die in ihr zusammenlaufenden Seiten ein einfach überdeckendes Bild an, so kann auch dieses projektiv in das vorhin vereinigte Bildpaar einbezogen werden, da ja zwei von der einspringenden Ecke ausgehende Punktreihen auf dem einzupassenden Bild ihre projektiven Abbilder haben, was zur Übertragung seines Inhalts in das vereinigte Bildpaar ausreicht. Hat das so erweiterte Bild wieder eine einspringende Ecke, so läßt sich diese mit einem weiteren nicht übergreifenden Bild ausfüllen und das geht solange weiter, bis entweder die zur Verfügung stehende Bildgruppe erschöpft ist, oder die von den vereinigten Bildern gedeckte Fläche einen überall konvexen Umriß zeigt. Es läßt sich demnach ein Paar übergreifender Bilder unter günstigen Umständen zur projektiven Vereinigung einer ganzen Gruppe einfach überdeckender Bilder ausnutzen. Haben zwei in solcher Weise vereinte Gruppen von Bildern ein Bild gemeinsam, so sind beide Gruppen wieder zu einer einzigen zusammenzufassen, wodurch die Möglichkeit, sie zu einer Karte des Geländes umzuformen, erhöht wird.

Eine weitere wichtige Frage tritt dann auf, wenn man von der Ebenheit des dargestellten Geländes abzusehen hat. In den Ausführungen des Herrn Rudel wird die Wiederherstellung des Grundrisses für den Fall behandelt, daß man über die Höhenverhältnisse einigermaßen Bescheid weiß. Die gegebene Lösung setzt neben der genäherten Kenntnis der innern und äußern Orientierung der verwendeten Bilder für die ersprießliche Anwendung außerdem noch voraus, daß die Aufnahmen möglichst senkrecht nach unten erfolgen, so daß in der Regel der Nadierpunkt mit auf die Platte abgebildet wird. Trifft letztere Voraussetzung zu und darf man annehmen, daß die Neigungszeiger die Stellung des Aufnahmegeräts gegen das Lot bis auf einige Grade angeben, so läßt sich das vom Fliegerfußpunkt ausgehende Strahlenbüschel aus dem vom Nadirpunkt des Bildes ausgehenden entwickeln und zwar bis auf Größen 2. Ordnung genau einerseits was die Unsicherheit der Neigungsanzeige, andererseits was das Verhältnis der Geländehöhenunterschiede zu der Flughöhe betrifft. Dieser Umstand läßt sich in folgender Weise ausnützen. Man bildet durch passende Verbindungslinien der Fliegerfußpunkte ein trigonometrisches Netz, das man auf den übergreifenden Bildern zwischen den entsprechenden Nadirpunkten absteckt. Aus den von den benützten Nadirpunkten ausgehenden abgesteckten Strahlen werden nun die Winkel in den zugehörigen Fliegerfußpunkten abgeleitet und so Werte zur Berechnung oder Zeichnung des Netzes erhalten, wobei die Seiten- und Winkelbedingungen durch passende Änderungen der unmittelbar abgeleiteten Werte erfüllt sein müssen. Die dabei nötigen Änderungen gestatten ein Urteil über die Zulässigkeit der gemachten Voraussetzungen. Zunächst kann das Netz nur in einem willkürlichen Maßstab ermittelt werden. Man kann es aber beliebig verdichten und auf alle abgebildeten Punkte ausdehnen, indem man deren Bildpunkte mit dem Nadirpunkt des zugehörigen Bildes verbindet und diesen Strahl in das trigonometrische Netz der Fliegerfußpunkte einträgt. So erhält man jeweils einen Vorwärtsschnitt für diesen Punkt. Auf diese Weise können Punkte gefunden werden, die zur Maßstabbestimmung und Orientierung des Netzes der Fliegerfußpunkte dienen und von welchen grundsätzlich zwei genügen. Dieses Verfahren benützt im Gegensatz zu dem Rudelschen außer dem Abstecken keine projektiven Beziehungen und das Abstecken nur von den Nadirpunkten aus, wobei es fast unabhängig von den Höhenunterschieden des Geländes ist. Dafür werden höhere Anforderungen an die Richtigkeit der Bilder gestellt und die Fehler des Schlitzverschlusses gehen in vollem Betrag in dieses Verfahren ein, während sie beim Rudelschen Verfahren nur soweit schaden, als sie eine Krümmung der Geradenbilder bewirken. Für Heeresfliegeraufnahmen hätte diese Methode bei der Anwendung versagt.

Beide Methoden bieten schließlich einen Grundriß des dargestellten Geländes. Wie steht es nun mit den Höhen? Was leisten die Bilder für diese? Da ist zunächst daran festzuhalten, daß die Bilder, die für den Grundriß die besten sind, nämlich die annähernd senkrecht nach unten aufgenommenen, für die Höhen am wenigsten leisten. Für diese sind Schrägaufnahmen am günstigsten, da bei solchen die Höhen am besten zum Ausdruck kommen. Um zu erkennen, was eine Schrägaufnahme zur Kenntnis der Höhen beiträgt, wollen wir der Einfachheit halber ein Gelände mit im Vergleich zur Aufnahmehöhe geringen Höhenunterschieden voraussetzen. Wir denken uns ferner die Schrägaufnahme mit Neigungs- und Kantungszeigern versehen, so daß eine genäherte Orientierung gegen das Lot gegeben ist. Mit dieser passen wir die Aufnahme in den Grundriß ein. Es sei das soweit gelungen, daß das auf die wagrechte Ebene projizierte Büschel von Nadirstrahlen durch die zugehörigen Grundrißpunkte hindurch geht. Auf Grund dieser Einpassung können nun zu den einzelnen Grundrißpunkten Höhen gerechnet werden, bei welchen eine additive Konstante unbestimmt bleibt. Die zu einem Grundrißpunkte mit den Koordinaten x, y gehörige so gefundene Höhe sei mit z bezeichnet. Wir denken uns nun die äußere Orientierung der Aufnahme innerhalb der Unsicherheit der Zeigerangaben etwas verändert und mit dieser neuen Orientierung das Einpassen wiederholt. Es entstehen dann neue, veränderte Höhen, von welchen die zu den Koordinaten x, y gehörige mit z' bezeichnet sei. Daß eine Einpassung mit etwas veränderter Orientierung noch möglich ist und wie die den beiderlei Orientierungen entsprungenen Höhen z und z' zusammenhängen, geht aus folgender kinematischen Betrachtung hervor. Wir denken uns das Bündel der zur Schrägaufnahme gehörigen Raumstrahlen durch die entsprechenden Geländepunkte gelegt und in diesen Punkten auch die Projektionslote gezogen. Nun wird das Bündel um eine beliebige, in der mittleren Geländeebene gelegene Achse ein wenig gedreht. Dabei verändern sich seine Strahlen, aber jeder gleitet dabei an dem Projektionslot des zugehörigen Geländepunktes entlang, so daß der Grundriß des Bündels bei dieser Bewegung nicht außer Zusammenhang mit dem Grundriß der Geländepunkte kommt. Um das einzusehen, brauchen wir nur die Drehung von vorhin unter Festhaltung des Bündels mit der Geländefläche vorzunehmen. Dabei bewegt sich jeder Geländepunkt, da er der gemachten Voraussetzung nach wenig von der mittleren Geländeebene, in der die Drehachse liegen soll, abweicht, senkrecht zu dieser Ebene, also auf einem Projektionslot. Wir schließen daraus: Bei einer kleinen relativen Drehung von Geländefläche und Raumstrahlenbündel um eine in der mittleren Geländeebene gelegenen Achse bleibt das Raumstrahlenbündel mit dem Parallelstrahlenbündel der Projektionslote in Zusammenhang. Jeder solchen Drehung entspricht nur eine Änderung der äußeren Orientierung der zugehörigen Schrägaufnahme und umgekehrt. Es muß also, wenn das Bündel für eine bestimmte Orientierung in den Grundriß einpaßbar ist, dies auch für benachbarte Orientierungen gelten und die Höhen z und z', die für beiderlei Orientierung gelten, müssen auseinander durch Drehung um eine in der mittleren Geländeebene gelegenen Achse hervorgehen, das heißt, es besteht zwischen ihnen der Zusammenhang: $z' = z + \alpha + \beta x + \gamma y$, wobei α, β und γ beliebig, die beiden letzteren aber sehr klein sind. Liegt nun eine zweite Schrägaufnahme vor und verwenden wir diese auf Grund ihrer Zeigerorientierung in gleicher Weise wie die vorige zur Höhenbestimmung, so liefert sie Höhen z_1, die von den Höhen z der früheren Schrägaufnahme verschieden sind. Auch diese sind wegen der unvollkommenen äußeren Orientierung noch um einen Betrag $\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y$ unsicher; sie können jedoch den Werten z angepaßt werden, sobald für wenigstens drei nicht im Grundriß in einer Geraden liegende Punkte die Höhen z und z_1 bekannt sind. Man bestimmt dann die Werte α_1, β_1, γ_1 aus drei Gleichungen von der Art: $z = z_1 + \alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y$ und reduziert mit diesen Werten das System der Höhen z_1 auf das der Höhen z. Sind mehr als 3 zusammengehörige Wertepaare z, z_1 vorhanden, so ergeben sich überschüssige Gleichungen, aus welchen die Werte α_1, β_1, γ_1 nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt werden. Auf solchem Wege können die Höhen jeder neu zutretenden Schrägaufnahme auf ein gemeinsames System gebracht werden, sobald unter ihnen wenigstens drei vorkommen, für welche schon Höhen z bekannt sind. Die Höhen z sind aber immer noch nicht die richtigen Höhen Z; sie sind aber mit diesen wieder in dem Zusammenhange: $Z = z + \alpha x + \beta y + \gamma z$. Kennt man nun von drei Punkten, die im Grundriß nicht in einer Geraden liegen, aber keineswegs auf ein und derselben Aufnahme abgebildet sein müssen, die wahren Höhen, so kann man aus drei Gleichungen der vorigen Art die Größen α, β, γ bestimmen, mittels welcher dann alle Höhen z auf wahre Höhen Z umgerechnet werden. Die Lösung der Ausgleichungsaufgabe im Falle, daß mehr als drei wahre Höhen bekannt sind, liegt auf der Hand. Man erkennt aus diesen Überlegungen, daß die Verhältnisse bei der Höhenbestimmung ganz ähnlich liegen, wie bei der Grundrißaufnahme. Sowie übereinander greifende Schrägaufnahmen vorliegen, kann man die aus ihnen sich ergebenden Höhen auf ein gemeinsames System bringen und dieses durch Anschluß neuer Schrägaufnahmen erweitern, bis die nötige Zahl von wahren Anschlußhöhen erreicht wird. Wenn aber zwei Schrägaufnahmen nicht übergreifen, sondern nur an einem Rande einen schmalen Streifen gemeinsam haben, versagt der Zusammenschluß. Erst, wenn eine solche Aufnahme mit zwei andern, deren Höhen schon in ein gemeinsamen System gebracht sind, einen schmalen Streifen gemeinsam hat, wird auch sie an jenes System angeschlossen werden können.

Fehlt es bei einer Höhenaufnahme an jeglichen Anschlußpunkten, so kann man einen meist ganz brauchbaren Ersatz durch die Forderung schaffen: unter den mit dem photogrammetrischen Zusammenhang verträglichen Höhen eines Systems, jene heraus zu suchen, für welche die Summe der Quadrate ein Minimum wird. Das bedeutet nichts anderes, als die Höhen auf eine Ausgangsebene zu beziehen, von welcher die Punkte des Geländes im ganzen möglichst wenig abweichen. Von seltenen Ausnahmefällen abgesehen, wird eine solche Mittelebene sehr nahe wagrecht ausfallen und es werden dann die Höhenunterschiede wenigstens annähernd richtig. Die Werte α, β, γ, welche das System der Höhen z auf dieses neue System von Höhen so überführen, folgen aus den Minimumsbedingungen für die Summe der Quadrate von: $z_0 = z + \alpha + \beta x + \gamma y$. Diese gestalten sich besonders einfach, wenn die Koordinaten $x\,y$ der Punkte auf den gemeinsamen Schwerpunkt bezogen sind. Dann wird nämlich:

$$\alpha = \Sigma z : n,$$

$$\beta \Sigma x^2 + \gamma \Sigma x y + \Sigma x z = 0, \qquad \beta \Sigma x y + \gamma \Sigma y^2 + \Sigma y z = 0.$$

Alle diese Überlegungen setzen geringe Höhenunterschiede im Vergleich zur Flughöhe voraus. Für eigentliche Gebirgsaufnahmen, für welche jene Voraussetzung nicht mehr zutrifft, muß man auf die Lösung der Grundaufgabe der Photogrammetrie zurückgreifen, die ich erstmals im 22. Band, 2. Abt. der Abhandlungen der B. Akad. der Wissenschaften, II. Klasse vom Jahre 1903 auf Luftbilder angewandt habe. Die Durchführung der Lösung ist seither wesentlich vereinfacht worden und läßt durch Ausnützung optisch-mechanischer Hilfsmittel noch weitere Erleichterungen zu, die sie gegebenenfalls für die Praxis brauchbar machen.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1921

Band/Volume: 1921

Autor(en)/Author(s): Rudel Ernst

Artikel/Article: Darstellung eines nahezu ebenen Geländes nach Fliegeraufnahmen bei spärlich vorhandenen Festpunkten 1-16