Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1921. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1921
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Mathematische Probleme in der Theorie der Figur der Himmelskörper.

Von **Leon Lichtenstein** in Berlin.

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 8. Januar 1921.

1. Die Figur der Himmelskörper hat die meisten führenden Mathematiker des achtzehnten und des neunzehnten Jahrhunderts beschäftigt. Wie bei manchen anderen Fragen der exakten Naturwissenschaften, wollte es auch hier lange Zeit nicht gelingen, das Problem in ein mathematisch einwandfreies Gewand zu kleiden. Erst in den letzten fünfzehn Jahren sind die Ansätze für eine mathematisch befriedigende Behandlung des betrachteten Arbeitsgebietes gewonnen worden. Die zur Zeit verfügbaren Hilfsmittel gestatten eine Anzahl klassischer Probleme einer exakten Lösung zuzuführen. Bei anderen Aufgaben grundlegender Art sind freilich noch weitere große Schwierigkeiten zu überwinden. Die in den meisten Fällen notwendigen Fallunterscheidungen erfordern ein erhebliches Maß von zeitraubenden teils analytischen, teils ziffernmäßigen Detailberechnungen.

Die mathematische Theorie der Figur der Himmelskörper beginnt mit Newton[1]). Im achtzehnten Jahrhundert haben sich namentlich Maclaurin, d'Alembert, Clairaut, Legendre und Laplace viel mit diesem Gegenstande beschäftigt.

[1]) Die Literatur vgl. den demnächst erscheinenden Enzyklopädieartikel von S. Oppenheim, Die Theorie der Gleichgewichtsfiguren der Himmelskörper.

Clairaut verdankt die Wissenschaft die mit seinem Namen untrennbar verknüpften Entwicklungen zur Theorie der Erdgestalt, die Clairautsche Theorie, Laplace neben zahllosen Einzelresultaten die erste systematische Behandlung des Gegenstandes in dem zweiten Bande der *Mécanique Céléste.* Im neunzehnten Jahrhundert brachten zunächst Untersuchungen von Dirichlet, Jacobi, Liouville und Riemann über Flüssigkeitsellipsoide einen weiteren Fortschritt. Von großer Wichtigkeit für unsere Theorie ist ferner das bekannte Werk *Treatise on natural philosophy* von Thomson und Tait[1]) geworden, dies namentlich durch die verschiedenen ohne Beweis angegebenen Sätze über die Existenz und die Stabilität der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Durch die Thomson-Taitschen Fragestellungen angeregt, hat Poincaré eine inhaltsreiche Arbeit über rotierende Flüssigkeiten verfaßt, die ihrerseits durch neue, freilich meist nur unvollkommen begründete, Resultate und Problemstellungen für das folgende grundlegend geworden ist[2]). Die meisten dieser Ergebnisse, soweit sie sich auf die Flüssigkeitsellipsoide beziehen, hat zu gleicher Zeit oder sogar etwas früher A. Liapounoff in seiner in russischer Sprache erschienenen Dissertation angegeben.[3]).

Es sei T eine Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeiten, die zu dem Werte ω der Winkelgeschwindigkeit gehört und $\varDelta\omega$ eine beliebige hinreichend kleine positive oder negative Zahl. Poincaré spricht den Satz aus, daß es im allgemeinen in der Umgebung von T eine und nur eine weitere Gleichgewichtsfigur gibt, die zu dem Werte $\omega + \varDelta\omega$ der Winkelgeschwindigkeit gehört.

---

[1]) Erste Auflage, Oxford 1867, zweite Auflage, Cambridge 1879 und 1883.

[2]) Vgl. H. Poincaré, Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, Acta mathematica (1885), S. 259—352.

[3]) Vgl. A. Liapounoff, Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation, Annales de Toulouse (2) 6 (1904), S. 5—116 (französische Übersetzung).

Dieser Satz kann indessen, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind, eine Ausnahme erleiden. Es kann z. B. vorkommen, daß zu jedem Werte $\omega + \Delta\omega$ in der rechtsseitigen (linksseitigen) Umgebung von ω mehr als eine Gleichgewichtsfigur gehört. Wie sich dann in besonderen Fällen die Verhältnisse gestalten, kann erst eine ins einzelne gehende Diskussion lehren. In der linearen Reihe der Maclaurinschen wie der Jacobischen Ellipsoide gibt es unendlich viele Individuen, an die sich neben den Ellipsoiden weitere neue Gleichgewichtsfiguren anschließen können.

Die von Poincaré für die vorstehenden grundlegenden Sätze gegebene Begründung hat freilich nur einen heuristischen Wert. Die Möglichkeit der Existenz neuer an Ellipsoide sich anschließender Gleichgewichtsfiguren hat auch Liapounoff in seiner Dissertation dargetan; auch sein damaliger Beweis ist nicht als befriedigend zu bezeichnen, da nur Glieder erster Ordnung in Betracht gezogen werden. Sowohl Poincaré als auch Liapounoff haben sich darüber hinaus mit der Frage der Stabilität der Maclaurinschen und Jacobischen Ellipsoide beschäftigt, auch hier ohne Glieder höherer Ordnung heranzuziehen oder abzuschätzen.

Eine exakte Behandlung der neuen Gleichgewichtsfiguren in der Umgebung der Ellipsoide ist Liapounoff erst später gelungen. In einer Reihe grundlegender Arbeiten, die in den Jahren 1903—1916 erschienen sind, hat Liapounoff zunächst die allgemeine Gleichung, von deren Auflösung und Diskussion die Beantwortung der Existenzfrage abhängt, angegeben[1]). Darüber hinaus hat er Kriterien aufgestellt, die eine lückenlose Behandlung der Stabilität ellipsoidischer Gleichgewichtsfiguren sowie der neuen Gleichgewichtsfiguren in deren Nachbarschaft ermöglichen. Schließlich hat er die allge-

[1]) Vgl. A. Liapounoff, Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg, 1903—1914, sieben Abhandlungen; St. Petersbourg Bull. 1916, zwei Abhandlungen; Annales de l'Ecole Normale (3) 26 (1909), S. 473—483. Genauere Angaben finden sich in meinen auf S. 20 genannten Arbeiten (Abh. I Fußnote [10]), Abh. II Fußnote [18])).

meinen Sätze auf eine Reihe singulärer Ellipsoide im einzelnen angewandt.

Die eingehenden sehr umfangreichen Untersuchungen von Liapounoff sind den besonderen Eigenschaften der ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren angepaßt und dürften sich nicht ohne schwierige Spezialbetrachtungen und auch dann nicht in allen Fällen auf andere Gleichgewichtsfiguren übertragen lassen.

Wie es nicht selten vorkommt, ist es gerade die Spezialisierung der Aufgabe, die die Lösung erschwert. Faßt man das Problem allgemeiner auf, geht man also, um die von Poincaré postulierten umfassenden Sätze zu beweisen, von einer beliebigen Gleichgewichtsfigur aus und wählt man eine Behandlung, die frei von Spezialisierung den mechanischen und geometrischen Eigentümlichkeiten des Problems angepaßt ist, so gelangt man zu einer wesentlichen Vereinfachung und Vertiefung der Ergebnisse[1]). Es eröffnet sich so ferner die Möglichkeit, eine ganze Reihe klassischer Probleme der Himmelsmechanik einer exakten mathematischen Behandlung zuzuführen.

2. Als erstes Beispiel betrachten wir die Laplacesche Theorie der Saturnringe.

In dem Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems denken wir uns ein punktförmiges Attraktionszentrum von der Masse M angebracht. Wir nehmen ferner an, daß um die z-Achse ein ringförmiger Körper T_1, bestehend aus einer homogenen Flüssigkeit der Dichte f, mit der Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig rotiert. Sei S_1 die Oberfläche von T_1.

[1]) Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Erste Abhandlung. Homogene Flüssigkeiten. Allgemeine Existenzsätze. Math. Zeitschrift 1 (1918), S. 229—284; 3 (1919), S. 172—174; zweite Abhandlung, Stabilitätsbetrachtungen, Math. Zeitschrift 7 (1920), S. 126—231. Die in diesen Arbeiten eingeschlagene Methode stellt zum Teil eine Verallgemeinerung und Vereinfachung der Liapounoffschen dar, sie führt aber darüber hinaus neue wesentliche Gedanken, namentlich potentialtheoretischer Art ein.

Welche Gestalt nimmt T_1 unter gleichzeitiger Wirkung der Eigengravitation, der Anziehung durch den Zentralkörper und der Zentrifugalkraft an?

Laplace nimmt an, daß T_1 die Ebene $z = 0$ zur Symmetrieebene hat, und ersetzt die Anziehung von T_1 auf den Punkt P_1 von S_1 durch die Anziehung des unendlichen homogenen Zylinders, dessen Mantel S_1 längs der Meridiankurve durch P_1 berührt. Für den Meridianschnitt von T_1 findet Laplace eine Ellipse, deren lange Achse nach dem Koordinatenursprung hin gerichtet ist.

Dieses erste Laplacesche Resultat ist später von Frau S. Kowalewski, die in einer bekannten Abhandlung die Annäherung einen Schritt weiter getrieben hatte, verbessert worden[1]). Für $M = 0$ findet Frau Kowalewski eine ringförmige Gleichgewichtsfigur ohne Zentralkörper, deren Existenz von Thomson und Tait postuliert worden ist. Das gleiche Resultat hat etwas später auf einem anderen Wege Poincaré gewonnen[2]).

Wir beziehen, wie vorhin ausgeführt, die Lage der Punkte im Raume auf ein kartesisches Koordinatensystem X, Y, Z. Die Gerade $x = y = 0$ sei die Umdrehungsachse. Der Zentralkörper befinde sich im Koordinatenursprung. Die Abmessungen des Meridianschnittes des Ringes nehmen wir als klein gegenüber dem Abstande seines Schwerpunktes von der Umdrehungsachse an.

Frau Kowalewski setzt die Gleichung der Meridiankurve in der Form

$$x = L - L\sigma\cos t, \quad z = \sigma L\,(a\sin t + a'\sin 2t + a''\sin 3t + \cdots)$$

[1]) Vgl. S. Kowalewski, Zusätze und Bemerkungen zu Laplaces Rechnungen über die Gestalt der Saturnringe, Astr. Nachrichten 111 (1885), S. 37.

[2]) Vgl. H. Poincaré, Sur l'équilibre d'une masse fluide, animée d'un mouvement de rotation, Bull. astr. 2 (1885), S. 109 u. ff. und S. 404 u. ff. Dort findet sich eine Anzahl weiterer Resultate, insbesondere über Gleichgewichtsfiguren, die aus zwei koaxialen wie ein starrer Körper rotierenden Ringen bestehen, abgeleitet.

an, unter σ eine kleine Größe, unter t einen reellen Parameter verstanden; α, α', α'' . . . sind zu bestimmende Konstanten. Wäre $\alpha' = \alpha'' = \cdots = 0$, so wäre der Meridianschnitt eine Ellipse, — die Laplacesche Ellipse. Da für kleine σ bereits diese eine gute Annäherung darstellt, so ist zu erwarten, daß α'', α''' . . . klein gegen α ausfallen werden. Frau Kowalewski setzt $\alpha'' = \alpha''' = \cdots = 0$ und bestimmt α' und die Winkelgeschwindigkeit ω so, daß in dem Ausdruck des Potentials der wirkenden Kräfte gewisse Glieder niedrigster Ordnung verschwinden. In ähnlicher Weise verfährt Poincaré. Augenscheinlich ist auf diesem Wege nur eine angenäherte Lösung zu gewinnen. Aber auch wenn man sich nicht von vornherein mit der Betrachtung einer beschränkten Anzahl von Gliedern begnügt hätte, ließe sich bei diesem Ansatz schwerlich ein Konvergenzbeweis der gewonnenen Entwicklung führen.

Die neue Methode führt zu einem verhältnismäßig einfachen Existenzbeweis ringförmiger Gleichgewichtsfiguren. In den folgenden Zeilen will ich den Grundgedanken des Verfahrens an dem besonders einfachen Falle der ringförmigen Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper skizzieren[1]). Wir nehmen an, daß die Meridiankurve des Ringes sich von einem Kreise Σ wenig unterscheidet. Der Halbmesser von Σ sei R, der Abstand seines Mittelpunktes von der Rotationsachse sei L; der Quotient $\frac{R}{L}$ soll eine kleine Zahl sein. Das Newtonsche Potential U des durch die Rotation der Kreisfläche um die Z-Achse entstandenen Kreisringkörpers T in dem Punkte $(X, 0, Z)$ seiner Oberfläche S läßt sich in der Form

$$(1) \qquad U = \log \frac{8\,L}{R}\,\mathfrak{Q}_1\left(\frac{X-L}{L}, \frac{Z}{L}\right) + \mathfrak{Q}_2\left(\frac{X-L}{L}, \frac{Z}{L}\right)$$

darstellen, unter $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ Potenzreihen verstanden, die für hinreichend kleine Werte von $\left|\frac{X-L}{L}\right|$, $\left|\frac{Z}{L}\right|$ konvergieren.

---

[1]) Eine ausführliche Darstellung wird in der Mathematischen Zeitschrift erscheinen.

Die Anfangsglieder der Reihe sind

$$U = \pi R^2\left(2\log\frac{8L}{R} - \frac{R^2}{16L^2}\log\frac{2L}{R}\right) - \frac{X-L}{L}\pi R^2\left(\log\frac{8L}{R} - \frac{5}{4}\right)$$

$$(2) \qquad + 3\frac{(X-L)^2}{4L^2}\pi R^2\log\frac{2L}{R} + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right).$$

Sei Σ_1 die Meridiankurve des gesuchten Ringkörpers T_1 in der Nachbarschaft von T. Sei P_1 ein Punkt auf Σ_1, ζ sein Abstand von Σ, P der Fußpunkt des von P_1 auf Σ gefällten Lotes ($\zeta = \overrightarrow{PP_1}$), P_0 der Punkt $(L, 0, R)$ auf Σ, s die Länge des Bogens P_0P. Wir beziehen die Lage des Punktes P_1 auf die krummlinigen Koordinaten s und ζ. Sei U_1 das Newtonsche Potential des Körpers T_1 im Punkte P_1. Die Differenz $U_1 - U$ läßt sich, wie ich in den in der Fußnote auf S. 20 zitierten Arbeiten bewiesen habe, in eine Reihe von der Form

$$(3) \qquad U_1 - U = {}^{(1)}U + {}^{(2)}U + {}^{(3)}U + \cdots$$

entwickeln. Hier bezeichnet ${}^{(n)}U$ einen Integralausdruck n-ten Grades über ζ und $\frac{d\zeta}{ds}$ [1]. Das Potential der Zentrifugalkraft in P_1 ist, wenn die Winkelgeschwindigkeit mit ω bezeichnet wird, wie man leicht sieht,

$$U_1^{(c)} = \frac{\omega^2}{2}\left\{L + (X-L)\left(1+\frac{\zeta}{R}\right)\right\}^2$$

$$(4) \qquad = \frac{\omega^2}{2}\left\{X\left(1+\frac{\zeta}{R}\right) - L\frac{\zeta}{R}\right\}^2.$$

Die Gleichgewichtsbedingung ist, unter $\varkappa$ die Gravitationskonstante verstanden,

$$(5) \qquad A \equiv U_1 + \frac{1}{\varkappa f}U_1^{(c)} + c^* = 0 \qquad (c^* \text{ konstant}).$$

Die linke Seite von (5) läßt sich wegen (2), (3) und (4) in der Form

$$(6) \qquad {}^{(0)}\overline{U} + {}^{(1)}\overline{U} + {}^{(2)}\overline{U} + \cdots \qquad \text{darstellen.}$$

[1] Wird ζ durch $\alpha\zeta$ ersetzt, so geht ${}^{(n)}U$ in ${}^{(n)}U\alpha^n$ über.

Wir setzen

$$
(7)\qquad \begin{aligned} {}^{(0)}\overline{U} &= \frac{\beta^{(0)}}{2} + \Sigma(\beta^{(n)}\cos n\psi + \alpha^{(n)}\sin n\psi), \\ \cos\psi &= \frac{X-L}{R}, \quad \sin\psi = \frac{Z}{R} \end{aligned}
$$

und wählen ω und c^* so, daß $\beta^0 = \beta^1 = 0$ wird.

Man findet so

$$
(8)\qquad \frac{\omega^2}{\pi\varkappa f} = \frac{R^2}{L^2}\left(\log\frac{8L}{R} - \frac{5}{4}\right) + O\left(\frac{R^3}{L^3}\right).
$$

Die Gleichgewichtsbedingung nimmt jetzt, wenn mit r der Abstand der Punkte s und s' auf Σ bezeichnet wird, die Gestalt an

$$
(9)\qquad -2\pi R\zeta + 2\int_\Sigma \zeta' \log\frac{R}{r}\,ds' = {}^{(0)}\overline{U} + {}^{(1)}\overline{U} + {}^{(2)}\overline{U} + \cdots,
$$

$$
(10)\qquad \begin{aligned} {}^{(0)}\overline{U} &= \frac{5\pi}{4}\,\frac{R^2}{L^2}\log\frac{8L}{R}(X-L)^2 + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right), \\ {}^{(1)}\overline{U} &= O\left(\mathsf{M}\frac{R}{L}\log\frac{L}{R}\right), \quad \mathsf{M} = \mathrm{Max}\left(|\zeta|, \left|\frac{d\zeta}{ds}\right|\right). \end{aligned}
$$

Die Beziehung (9) ist eine nichtlineare Integro-Differentialgleichung zur Bestimmung von ζ. Sie läßt sich in ähnlicher Weise durch sukzessive Approximationen auflösen wie die allgemeinen Gleichungen der Theorie rotierender Flüssigkeiten[1]). Eine Komplikation bringt der Umstand mit sich, daß die lineare Integralgleichung

$$
(11)\qquad -2\pi R\zeta + 2\int_\Sigma \zeta' \log\frac{R}{r}\,ds' = 0
$$

zwei Eigenfunktionen, nämlich $\frac{X-L}{R}$ und $\frac{Z}{R}$ hat. Hierdurch wird, wie bei der Diskussion des „Verzweigungsfalles" der allgemeinen Theorie die explizite Darstellung einiger Glieder höherer Ordnung in der Entwicklung von ζ notwendig[2]). Das

---

[1]) Vgl. loc. cit. S. 20, II. Abh., S. 156—182.

[2]) Vgl. loc. cit. S. 20, II. Abh., S. 167—182.

vorhin skizzierte Verfahren gestattet auch das Gleichgewichtsproblem eines Systems von zwei oder mehr wie ein starrer Körper rotierenden flüssigen Ringen einer exakten Lösung zuzuführen.

In einer ganz ähnlichen Weise erledigt sich nun auch der Fall $M > 0$. Hier ist bei gegebenem M die Winkelgeschwindigkeit ω in erster Linie nur noch von L abhängig. Die Behandlung ist insofern sogar leichter als für $M = 0$, als nur für abzählbar unendlich viele Werte von ω, wo der Verzweigungsfall vorliegt, die Berechnung gewisser Glieder höherer Ordnung notwendig sein wird. Die Methode gestattet auch die Behandlung des Gleichgewichts mehrerer um einen Zentralkörper rotierender flüssiger Ringe. Auch dürften sich die Ergebnisse neuerer Arbeiten von Herrn Levi-Civita unter Wegfall von einschränkenden Bedingungen wiederfinden lassen. Herr Levi-Civita betrachtet unendlich dünne ringförmige, nicht notwendig homogene Gebilde und bestimmt die möglichen Gestalten der Leitlinie. Die Annahme, daß der Querschnitt unendlich klein ist, wird man fallen lassen können.

In Weiterverfolgung der vorhin angedeuteten Resultate eröffnet sich jetzt die Aussicht auf eine strenge Behandlung nicht notwendig homogener, inbesondere gasförmiger Ringe. Die Ringe können, wie vorhin, wie starre Körper rotieren, — es kann aber auch jeder Ring aus endlich oder unendlich vielen koaxialen Schichten bestehen, die für sich einzeln wie starre Körper rotieren. Die Winkelgeschwindigkeit ändert sich in stetiger Weise von Schicht zu Schicht[1]). Diesen Betrachtungen dürfte aus folgendem Grunde eine gewisse Bedeutung zukommen.

Die Ringe des Saturns sind bekanntlich weder fest noch flüssig. Vermutlich bestehen sie aus einer großen Zahl kleiner Sateliten oder aus kosmischem Staub. Es liegt nun nahe, zu versuchen, den Zustand der den Ring bildenden Materie in Anlehnung an die kinetische Gastheorie demjenigen eines gewissen Gases gleichzustellen.

[1]) Das Gas wird dabei natürlich als reibungslos angenommen.

3. Als ein weiteres Beispiel sei jetzt die Gleichgewichtsfigur eines kleinen Mondes betrachtet. Mit diesem Gegenstand hat sich Roche beschäftigt. Roche betrachtet einen unendlich kleinen flüssigen Mond, der wie ein starrer Körper um den Zentralkörper rotiert, und findet als Gleichgewichtsfigur ein dreiachsiges Ellipsoid, dessen lange Achse nach dem Planeten hin gerichtet ist. Die Gesamtheit der Rocheschen Ellipsoide bildet nach Schwarzschild zwei zusammenhängende Arme von Gleichgewichtsfiguren. In dem besonderen Falle eines weit entfernten Mondes liefert einer der beiden Arme ein von der Kugel wenig verschiedenes Ellipsoid. Diese Gleichgewichtsfigur hatte bereits Laplace in seiner Theorie der Figur des Erdmondes auf einem anderen Wege abgeleitet.

Die eleganten Resultate von Laplace und Roche stellen natürlich nur eine Näherung dar. Von dieser ausgehend kann man indessen für hinreichend kleine Sateliten zu einem exakten Existenzbeweise gelangen. Die Betrachtungen verlaufen ähnlich wie in dem vorhergehenden Abschnitt. Auch jetzt erweist es sich als notwendig, für gewisse abzählbar unendlich viele Werte der Winkelgeschwindigkeit Glieder höherer Ordnung heranzuziehen. Insbesondere ist dies bei einem von einer Kugel wenig verschiedenen entfernten Monde nicht zu umgehen.

In den Anwendungen auf astronomische und kosmogonische Probleme bildet die Betrachtung einer homogenen Flüssigkeit nur einen ersten orientierenden Schritt. In der Theorie der Erdfigur hat schon Clairaut diese Voraussetzung fallen lassen. Die Clairautsche Theorie ist erst von Liapounoff im Jahre 1903 mathematisch einwandfrei begründet worden[1]). Die Untersuchungen von Liapounoff, die nicht in allen Einzelheiten ausgeführt sind, dürften sich nicht unwesentlich vereinfachen lassen, wenn man sich wie in den zitierten Arbeiten der potentialtheoretischen Hilfsmittel bedient.

---

[1]) Vgl. A. Liapounoff, Recherches dans la théorie des corps célestes, Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg, Band 14 der achten Reihe, Nr. 7, 1903, S. 1—37.

4. Ist die Existenz einer Gleichgewichtsfigur einmal bewiesen, so bleibt noch die Frage der Stabilität zu entscheiden. Das provisorische von Thomson und Tait, Poincaré und Liapounoff benutzte Kriterium lautet so:

Es sei J_1 das Trägheitsmoment der Gleichgewichtsfigur T_1. Das Moment der Bewegungsgröße um die Umdrehungsachse ist gleich ωJ_1. Es sei T_2 irgend ein Körper in der Nachbarschaft erster Ordnung von T_1, der folgende Eigenschaften hat. Die Volumina zusammengehöriger Einzelmassen von T_1 und T_2 sind einander gleich. Der Schwerpunkt von T_2 deckt sich mit demjenigen von T_1. Das Trägheitsmoment von T_2 in bezug auf die Rotationsachse sei J_2. Wird zur Vereinfachung

$$\frac{\omega^2 J_1^2}{f\varkappa} = M \tag{12}$$

gesetzt, so soll T_1 stabil heißen, wenn der Ausdruck

$$\frac{M}{J_2} - \iint\limits_{T_2} \frac{dv\, d\bar{v}}{D}, \tag{13}$$

unter dv und $d\bar{v}$ Volumelemente in T_2, unter D ihre Entfernung verstanden, für die gegebene Gleichgewichtsfigur den kleinsten Wert annimmt.

Es liegt hier eins der Probleme einer neuen Variationsrechnung vor, auf die Herr Hadamard vor einigen Jahren aufmerksam gemacht hatte.

In seinen wiederholt genannten Abhandlungen leitet Liapounoff allgemeine Kriterien für die Stabilität ellipsoidischer Gleichgewichtsfiguren sowie der neuen Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Ellipsoide ab. Er untersucht ferner gewisse Fälle bedingter Stabilität. Seine allgemeinen Ergebnisse wendet Liapounoff auf eine Anzahl spezieller Gleichgewichtsfiguren, insbesondere die birnenförmigen Figuren an.

In meiner in der Fußnote auf S. 20 an zweiter Stelle zitierten Arbeit habe ich mich neben anderen Problemen mit der Frage der Stabilität beliebiger Gleichgewichtsfiguren beschäftigt und die schon früher von Poincaré betrachteten

Stabilitätskoeffizienten in strenger Weise eingeführt. Ist einer der Stabilitätskoeffizienten gleich Null, so bleibt, worauf schon Poincaré hingewiesen hatte, die Frage der Stabilität zunächst noch unentschieden. In dem besonderen Falle der Ellipsoide ist diese Lücke durch die Untersuchungen von Liapounoff ausgefüllt. Für die astronomischen Anwendungen ist nicht so sehr der Stabilitätscharakter einer einzelnen Gleichgewichtsfigur als vielmehr derjenige der aus ihr abgeleiteten linearen Reihe von Wichtigkeit. Hierfür habe ich an der zuletzt genannten Stelle eine neue Methode gegeben, die u. a. einen neuen Weg zur Untersuchung des Stabilitätscharakters der birnenförmigen Gleichgewichtsfiguren eröffnet. Sie dürfte auch eine Entscheidung über den Stabilitätscharakter der ringförmigen Figuren ohne Zentralkörper ermöglichen.

Das den vorstehenden Betrachtungen zugrunde liegende Variationskriterium ist nur als provisorisch anzusehen. Das allgemeine Stabilitätsproblem hängt mit der Frage der Bewegungszustände in der Nähe einer Gleichgewichtsfigur zusammen. Auf diesem Gebiet liegen zur Zeit keinerlei fest begründete Ergebnisse vor. Nicht einmal auf die einfachste Frage, nämlich diejenige nach der Existenz periodischer Bewegungszustände in der Nähe einer Gleichgewichtslage weiß man eine gesicherte Antwort zu geben. Wie diese Frage, so harren das ganze viel umworbene Gebiet der Theorie der Gezeiten sowie die meisten kosmogonischen Betrachtungen noch einer einwandfreien Begründung.

Berlin, den 24. November 1920.