Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1921. Heft II
Mai- bis Juli- und November- u. Dezembersitzung

München 1922
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über den Druck einer strömenden Flüssigkeit auf eine geschlossene Fläche.

Von M. Lagally in Dresden.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 7. Mai 1921.

1. Die Kräfte, welche eine stationäre Flüssigkeitsströmung auf einen eingetauchten Körper ausübt, sind in den letzten Jahren mit Rücksicht auf ein besonderes Anwendungsgebiet, nämlich die Berechnung des Auftriebs und Widerstands von Tragflächen in zahlreichen Arbeiten untersucht worden. Die Annahmen über die Art der Strömung sind durch den Zweck dieser Untersuchungen bedingt; in der älteren, auf Kutta und Joukowsky zurückgehenden Theorie wird eine ebene Potentialströmung vorausgesetzt, welche außerhalb der eingetauchten Kontur singularitätenfrei ist, im Unendlichen eine endliche Geschwindigkeit, und eine Zirkulation um die Kontur besitzt; die neuere von Prandtl begründete Theorie erweitert diese Annahmen, indem sie das Problem räumlich stellt, den eingetauchten Körper durch einen tragenden Raum von festen Wirbeln ersetzt und in der Strömung ein System von freien Wirbellinien zuläßt, welche von dem tragenden Raum ausgehen und gleichzeitig Stromlinien sind[1]).

[1]) Einen Überblick über die ältere Theorie bis 1917 gibt: R. Grammel, die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. Braunschweig, Sammlung Vieweg (1917). — Hieher gehört auch: v. Mises, zur Theorie des Tragflächen-Auftriebs. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, VIII. Heft, 21, 22 (1917). — Begründung der neueren Theorie: L. Prandtl, Tragflügeltheorie, I. u. II. Mitteilung, Göttinger Nachr. (1918) u. (1919).

Im folgenden ist die Rücksicht auf die unmittelbare Anwendbarkeit bei Seite gelassen; die Flüssigkeit soll entweder den Innenraum einer geschlossenen Fläche F von beliebigem Zusammenhang oder den Außenraum einer oder mehrerer Flächen F bis ins Unendliche erfüllen. Es soll in der Flüssigkeit ein eindeutiges oder zyklisches Geschwindigkeitspotential bestehen mit diskreten singulären Stellen, ein- oder mehrfachen Quellen oder Wirbellinien; die singulären Stellen sollen auch dicht liegen können, wodurch die Strömung vollständig oder in einem Teilbereich den Charakter einer Potentialströmung verlieren kann; jedoch soll das Heranrücken der singulären Stellen an die Begrenzungsfläche F entweder ausgeschlossen oder doch nur in so weit gestattet sein, als hiedurch die Giltigkeit der Bernoullischen Gleichung

1) $\frac{p}{\varrho} + \frac{v^2}{2} = \text{const}$ (p Druck, v Geschwindigkeit, ϱ Dichte)

für einen bestimmten Wert der Konstanten an der Begrenzungsfläche selbst und im Unendlichen nicht gestört wird[1]). Im Unendlichen soll die Geschwindigkeit Null oder endlich sein.

Dann ist nach (1) der von der Flüssigkeit auf die Gesamtbegrenzung O, die für das „innere Problem", d. h. den Fall, daß die Flüssigkeit den Innenraum von F erfüllt, mit F zusammenfällt, für das „äußere Problem" jedoch außer F eine noch genauer zu definierende Begrenzung der ganzen Flüssigkeit im Unendlichen mit einschließt, ausgeübte Druck:

2) $$\mathfrak{P}_O = -\int\limits_O p\, d\mathfrak{o} = \frac{\varrho}{2}\int\limits_O v^2\, d\mathfrak{o} + c\int\limits_O d\mathfrak{o}.$$

Hier bedeutet $d\mathfrak{o}$ das derart als Plangröße aufgefaßte Oberflächenelement, daß ihm als Ergänzung ein Vektor[2]) in Rich-

[1]) Diese Einschränkung geht weniger weit als bei Prandtl, wo die Gültigkeit der Bernoullischen Gleichung für die ganze Flüssigkeit gefordert ist.

[2]) Gibbs'sche Bezeichnung: $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ skalares Produkt; $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ Vektorprodukt; $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ Dyade; $\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}$; ∇ vor einem Skalar: Gradient; $\nabla\cdot$ vor einem Vektor: Divergenz.

tung der inneren, d. h. in die Flüssigkeit hinein gerichteten Normalen zugeordnet ist. c ist eine Konstante. Das letzte Integral verschwindet identisch. Das erste Integral der Summe läßt sich durch eine dem Gaußschen Integralsatz verwandte Umformung[1]) in ein Raumintegral überführen, so daß

$$\mathfrak{P}_O = -\frac{\varrho}{2}\int_R \nabla v^2\, d\tau$$

wird ($d\tau$ Raumelement des von Flüssigkeit erfüllten Raumes R). Zur weiteren Umformung dieser Gleichung dienen 2 bekannte Identitäten

$$\nabla v^2 = 2\,\mathfrak{v}\cdot\nabla\mathfrak{v} + 2\,\mathfrak{v}\times \operatorname{curl}\mathfrak{v}$$
$$\nabla\cdot\mathfrak{v}\mathfrak{v} = \mathfrak{v}\cdot\nabla\mathfrak{v} + \mathfrak{v}\nabla\cdot\mathfrak{v},$$

aus denen sich die folgende ergibt:

$$\tfrac{1}{2}\nabla v^2 = \nabla\cdot\mathfrak{v}\mathfrak{v} - \mathfrak{v}\nabla\cdot\mathfrak{v} + \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}.$$

Damit wird

$$\mathfrak{P}_O = -\varrho\int_R (\nabla\cdot\mathfrak{v}\mathfrak{v} - \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v} + \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v})\, d\tau.$$

Von den 3 Summanden des Integrals läßt sich der erste durch eine aus dem Gaußschen Integralsatz folgende Umformung[2]) in ein Oberflächenintegral zurückverwandeln; somit wird

$$3)\qquad \mathfrak{P}_O = \varrho\int_O \mathfrak{v}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} + \varrho\int_R \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\tau - \varrho\int_R \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}\, d\tau.$$

Erfüllt die Flüssigkeit das Innere von F, so wird $O \equiv F$; für die ganze Begrenzung steht die Geschwindigkeit auf der Normalen senkrecht; also ist $\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} = 0$. Mithin ist das „innere Problem" durch die folgende Gleichung gelöst:

$$4)\qquad \mathfrak{P}_F = \varrho\int_R \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\tau - \varrho\int_R \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}\, dt.$$

---

[1]) $\int_R \nabla\varphi\, d\tau = -\int_O \varphi\, d\mathfrak{o}$ (φ ein Skalar).

[2]) $\int_R \nabla\cdot\Phi\, d\tau = -\int_O d\mathfrak{o}\cdot\Phi$ (Φ eine vollständige Dyade).

Der Druck hängt also nicht unmittelbar von der Gestalt der Begrenzung, sondern lediglich von den in ihrem Innern vorhandenen singulären Stellen und der dort herrschenden Geschwindigkeit ab. Ist die Strömung quellenfrei, so verschwindet das erste Integral und die rechte Seite geht in den von Prandtl für die gesamte Luftkraft in einem tragenden Raum aufgestellten Ausdruck über[1]).

Wichtiger ist das „äußere Problem“, also der Fall, in dem die Flüssigkeit den Außenraum einer Fläche F erfüllt. Man kann dann zunächst den Punkt ∞ ausschließen und einen endlichen Teil der Flüssigkeit von innen durch F, von außen durch eine Kugel K begrenzen, deren Radius zunächst so groß gewählt werden soll, daß alle singulären Stellen in ihrem Innern liegen, um nachher ins Unendliche zu wachsen. Durch diese Begrenzung sind einzelne ins Unendliche gehende Wirbellinien (Stabwirbel) im allgemeinen ausgeschlossen. Nicht ausgeschlossen ist der für den Tragflächenwiderstand wichtige Fall, daß ein Wirbelfaden umbiegt und mit beiden Enden gleichsinnig ins Unendliche läuft. Man kann dann zunächst innerhalb der Kugel K die Wirbellinie schließen und dann das Schlußstück ins Unendliche rücken lassen, wenn der Kugelradius über alle Grenzen wächst. — Für den so abgegrenzten Raum gilt die Gleichung (3). Dabei ist zu berücksichtigen, daß jetzt $\int\limits_{0} \mathfrak{v}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o}$ in 2 Teile zerfällt, die sich über F und K erstrecken; da K die Strömung nicht einschließt, sondern von ihr durchflossen wird, wird $\int\limits_{K} \mathfrak{v}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o}$ im allgemeinen nicht verschwinden, während $\int\limits_{F} \mathfrak{v}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o}$ Null ist. Ebenso wird $\mathfrak{P}_0$ in 2 Komponenten $\mathfrak{P}_F$ und $\mathfrak{P}_K$ zerfallen.

Also folgt aus (3)

$$5)\quad \mathfrak{P}_F = -\mathfrak{P}_K + \varrho\int\limits_{K} \mathfrak{v}\mathfrak{v}\; d\mathfrak{o} + \varrho\int\limits_{R} \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\tau - \varrho\int\limits_{R} \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}\, d\tau .$$

---

[1]) I. Mitteilung, Gleichung (8).

Berechnet man $\mathfrak{P}_K$ mit Hilfe der Bernoullischen Gleichung:

$$\mathfrak{P}_K = -\int\limits_K p\, d\mathfrak{o} = \frac{\varrho}{2}\int\limits_K v^2\, d\mathfrak{o},$$

so ergibt sich

$$\text{6)}\quad \mathfrak{P}_F = \varrho\int\limits_K (\mathfrak{v}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} - \tfrac{1}{2}v^2\, d\mathfrak{o}) + \varrho\int\limits_R \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\tau - \varrho\int\limits_R \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}\, d\tau.$$

In diesem Ausdruck soll zunächst das erste Integral berechnet werden. Da die Kugel alle Singularitäten umschließt, hat die Strömung an der Stelle ∞ den Charakter einer Potentialströmung; das Potential φ kann in eine nach fallenden Potenzen von r fortschreitende Reihe entwickelt werden, deren Konvergenz auf K jedenfalls noch gesichert ist.

$$\text{7)}\qquad \varphi = v_{x\infty}\, x + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r_2} + \cdots$$

Hier ist der Einfachheit halber die x Achse in die Richtung von $\mathfrak{v}_\infty = \mathfrak{i}\, v_{x\infty}$ gelegt; die Größen A_K sind Kugelflächenfunktionen, von denen die erste A_1 eine Konstante ist und nur von der Ergiebigkeit der im Innern der Kugel gelegenen einfachen Quellen abhängt. Ist nämlich $\varphi = \frac{-e}{4\pi r}$ das Geschwindigkeitspotential der von einer einfachen Quelle erzeugten Strömung, so hat der Fluß durch eine die Quelle als Mittelpunkt umschließende Kugelfläche K_0 vom Radius a und dem Flächenelement $d\omega$ den Wert

$$\int\limits_{K_0} v\, d\omega = \int\limits_{K_0} \frac{\partial\varphi}{\partial r}\, d\omega = e.$$

Also bedeutet e die Ergiebigkeit der Quelle. Besitzt die Strömung eine Anzahl von Quellen $\varphi_i = \frac{-e_i}{4\pi r_i}$ an den Stellen Q_i, wobei r_i die Entfernung des Aufpunkts von Q_i bedeutet, und entwickelt man φ_i in eine nach Potenzen der Entfernung r des Aufpunkts vom Anfangspunkt fortschreitende Reihe von Kugelfunktionen:

$$\varphi_i = -\frac{e_i}{4\pi}\left[\frac{1}{r} + P_1 \frac{c_i}{r^2} + P_2 \frac{c_i^2}{r^3} + \cdots\right],$$

so erkennt man, daß φ_i zu dem Koeffizienten A_1 den Beitrag $\frac{-e_i}{4\pi}$ liefert. Für Quellen höherer Ordnung beginnt die Reihe erst mit höheren Gliedern; dasselbe gilt für geschlossene Wirbellinien, die durch eine Verteilung von Doppelquellen über eine durch die Wirbellinie begrenzte Fläche ersetzt werden können. Einzelne ins Unendliche gehende Stabwirbel, die einen Beitrag zu A_1 liefern könnten, sind aber aus andern Gründen ausgeschlossen worden. Folglich ist

$$A_1 = \frac{-1}{4\pi} \Sigma e_i. \tag{8}$$

Der Übergang zu einem stetigen Quellenfeld würde keinerlei Schwierigkeiten bieten. — Von Wichtigkeit ist folgende Bemerkung: Die Strömung im Außenraum hängt nicht allein von den im Außenraum vorhandenen Singularitäten ab, sondern auch von denen der durch die Randwertbedingung $\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} = 0$ auf F definierten analytischen Fortsetzung der Strömung im Innern von F. Da jedoch die Summe der Ergiebigkeiten der im Innern von F gelegenen Quellen notwendig Null ist, liefern sie keinen Beitrag zu A_1, und es ist infolgedessen gleichgiltig, ob Σe_i über alle Quellen des ganzen Raumes oder nur über die allein bekannten Quellen des Außenraumes R von F gebildet wird.

Aus (7) ergibt sich jetzt die Geschwindigkeit

$$\mathfrak{v} = \nabla\varphi = \mathfrak{i}\,\mathfrak{v}_{x\infty} + A_1 \nabla \frac{1}{r} + A_2 \nabla \frac{1}{r^2} + \cdots \frac{1}{r} \nabla A_1 + \frac{1}{r^2} \nabla A_2 + \cdots$$

Zur Ausführung der Differentiationen auf der rechten Seite ist zu bemerken:

$$\nabla r^k = k r^{k-1} \nabla r = k r^{k-2} \mathfrak{r} = - k r^{k-1} \mathfrak{n}$$

für beliebiges k; dabei ist $\mathfrak{n} = -\frac{\mathfrak{r}}{r}$ ein Einheitsvektor in Richtung des Radius auf den Mittelpunkt zu; ferner ist

$$\nabla A_k = \frac{1}{r} B_k \mathfrak{t}_k,$$

wo B_k ebenso wie A_k vom nullten Grad in x, y, z ist, während $\mathfrak{t}_k$ einen Einheitsvektor bedeutet, der auf $\mathfrak{r}$ senkrecht steht und dessen genauere Kenntnis für das folgende ebensowenig notwendig ist wie die von B_k selbst. Zu beachten ist nur $B_1 = 0$ wegen $A_1 = \text{const.}$ Somit wird

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{i}\, v_{x\infty} + \frac{A_1}{r^2}\mathfrak{n} + \frac{1}{r^3}(\cdot\cdot\cdot).$$

Bezeichnet man mit $d\omega$ den Absolutwert des Flächenelements $d\mathfrak{o}$ und mit $d\varepsilon$ sein sphärisches Bild auf der Einheitskugel, so ist

$$d\mathfrak{o} = \mathfrak{u}\, d\omega = \mathfrak{u}\, r^2\, d\varepsilon;$$

also

$$\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} = \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{n}\, r^2\, v_{x\infty}\, d\varepsilon$$

$$\mathfrak{v}\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} = \mathfrak{i}\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{n}\, r^2 v_{x\infty}^2\, d\varepsilon + (\mathfrak{i} + \mathfrak{n}\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{n}) A_1 v_{x\infty}\, d\varepsilon + \frac{1}{r}(\cdot\cdot\cdot)$$

$$\tfrac{1}{2} v^2\, d\mathfrak{o} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{n}\, r^2 v_{x\infty}^2\, d\varepsilon + \mathfrak{n}\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{n}\, A_1 v_{x\infty}\, d\varepsilon + \frac{1}{r}(\cdot\cdot\cdot)$$

Jetzt wird

$$\int\limits_K (\mathfrak{v}\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} - \tfrac{1}{2} v^2\, d\mathfrak{o}) = r^2 v_{x\infty}^2 \int\limits_{K_1} (\mathfrak{i}\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{n} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{n})\, d\varepsilon$$
$$+ A_1 v_{x\infty}\, \mathfrak{i} \int\limits_{K_1} d\varepsilon + \frac{1}{r}\int\limits_{K_1} \cdot\cdot\cdot$$

Von den Integralen der rechten Seite, die über die Einheitskugel zu nehmen sind, verschwindet das erste; denn

$$\int\limits_{K_1} \mathfrak{i}\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{n}\, d\varepsilon = \mathfrak{i} \int\limits_{K_1} \cos\alpha\, d\varepsilon$$

ist die Projektion der Einheitskugel auf die YZ Ebene; diese besteht aus einer doppelten Überdeckung des Einheitskreises mit verschiedenem Vorzeichen. $\int\limits_{K_1} \mathfrak{n}\, d\varepsilon$ ist die vektorielle Oberfläche der Einheitskugel, also Null. Dagegen ist

$$\int\limits_{K_1} d\varepsilon = 4\pi$$

die skalare Oberfläche der Einheitskugel. Führt man jetzt den Grenzübergang $r \longrightarrow \infty$ aus, so erübrigt sich die Untersuchung der weiteren Integrale; es folgt

$$\int\limits_{K_\infty} (\mathfrak{v}\,\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} - \tfrac{1}{2} v^2\, d\mathfrak{o}) = 4\pi A_1 \mathfrak{v}_\infty .$$

Somit wird der Druck, den die den unendlichen Raum außerhalb F erfüllende Flüssigkeit auf F ausübt:

$$9)\quad \mathfrak{P}_F = 4\pi\varrho A_1 \mathfrak{v}_\infty + \varrho \int\limits_{R_\infty} \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau - \varrho \int\limits_{R_\infty} \mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\tau .$$

Damit ist auch das „äußere Problem“ gelöst. Die Gleichung (9) läßt zunächst den oft angeführten Satz ersehen, daß ein in eine singularitätenfreie translatorische Strömung eingetauchter Körper von beliebiger Gestalt keinen Widerstand bietet. Dagegen genügt das Vorhandensein von Quellen oder Wirbeln in der Flüssigkeit auch ohne Translation zur Hervorbringung eines Druckes auf den Körper.

2. Genauere Berechnung von $\mathfrak{P}_F$ für eine Strömung mit diskreten Singularitäten. Wenn in der Strömung nur einzelne Quellpunkte und Wirbellinien vorhanden sind, so ist A_1 durch die Gleichung (8) bereits bestimmt. Sodann ist zu bemerken, daß $\operatorname{div} \mathfrak{v}$ und $\operatorname{curl} \mathfrak{v}$ außer an einzelnen Punkten oder Linien im ganzen Außenraum R_∞ verschwinden; ebenso ist $\mathfrak{v}$ nur an einzelnen Stellen unendlich. Um also die Integrale $\int\limits_{R_\infty} \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau$ und $\int\limits_{R_\infty} \mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\tau$ zu finden, kann man den Integrationsbereich auf beliebig kleine und in der Grenze

gegen Null abnehmende Räume beschränken, welche die singulären Stellen umschließen.

Zur Ermittlung von $\int \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau$ denkt man sich die ganze Ergiebigkeit e_i einer Quelle gleichmäßig im Innern einer kleinen Kugel K_0 vom Radius a verteilt, deren Mittelpunkt die Quelle ist; dann ist nach einem bekannten Satz das Potential außerhalb der Kugel dasselbe wie bei Konzentration der ganzen Ergiebigkeit im Mittelpunkt. Ferner ist nach dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_{K_0} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau = -\int_{K_0} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} = e,$$

also
$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{3\,e}{4\,a^3 \pi}.$$

Um nun

$$\int_{K_0} \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau = \frac{3\,e}{4\,a^3\pi} \int_{K_0} \mathfrak{v}\, d\tau$$

zu berechnen, kann man

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{v}^*$$

setzen, wo $\mathfrak{v}_0$ die von den in der Kugel selbst vorhandenen Quellen hervorgebrachte Geschwindigkeit ist, während $\mathfrak{v}^*$ von den übrigen Singularitäten herrührt. Die Verteilung von $\mathfrak{v}_0$ ist symmetrisch zum Mittelpunkt, infolgedessen verschwindet $\int_{K_0} \mathfrak{v}_0\, d\tau$ und es bleibt

$$\int_{K_0} \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau = \frac{3\,e}{4\,a^3\pi} \int_{K_0} \mathfrak{v}^*\, d\tau.$$

Entwickelt man $\mathfrak{v}^*$ im Mittelpunkt in eine nach Potenzen von r fortschreitende Reihe

$$\mathfrak{v}^* = \mathfrak{v}^*_M + \mathfrak{r} \cdot \nabla \mathfrak{v}^*_M + \cdots = \mathfrak{v}^*_M + r\,\mathfrak{v}'^*_M,$$

so ergibt sich auch für $\int_{K_0} \mathfrak{v}^*\, d\tau$ eine nach Potenzen von a fortschreitende Reihe

$$\int_{K_0} \mathfrak{v}^*\, d\tau = \tfrac{4}{3}\, a^3 \pi\, \mathfrak{v}^*_M + a^4 (\cdot\ \cdot\ \cdot).$$

Wenn jetzt a gegen Null konvergiert, wird

$$\lim_{a=0}\int\limits_{K_0} \mathfrak{v}\,\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau = e\,\mathfrak{v}_M^*.$$

Daraus folgt die bemerkenswerte Gleichung beim Auftreten einzelner Quellen

$$10)\qquad \int\limits_{K_\infty} \mathfrak{v}\,\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau = \Sigma e_i\,\mathfrak{v}_i^*,$$

die sich auch ohne weiteres auf kontinuierliche Quellenfelder anwenden läßt.

Auch mehrfache Quellen liefern einen Beitrag zu dem Raumintegral. Läßt man eine Doppelquelle durch Zusammenrücken zweier einfacher Quellen Q_+ und Q_- entstehen, und umschließt, so lange sie noch endlichen Abstand haben, beide zusammen durch eine kleine Fläche K_0, so ist

$$\int\limits_{K_0} \mathfrak{v}\,\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau = e\,(\mathfrak{v}_+^* - \mathfrak{v}_-^*).$$

Die Beiträge, welche die beiden Quellen, jede am Ort der andern, zur Geschwindigkeit $\mathfrak{v}^*$ liefern, sind gleich groß und gleich gerichtet, fallen also aus der Differenz hinaus. Folglich ist $\mathfrak{v}^*$ in der Umgebung der Doppelquelle analytisch. Bezeichnet man den von Q_- nach Q_+ führenden Vektor mit $\mathfrak{d}$, seinen absoluten Betrag mit δ, seine Richtung mit t, so ist

$$\mathfrak{v}_-^* = \mathfrak{v}_+^* - \mathfrak{d}\cdot\nabla\,\mathfrak{v}_+^* + \cdots = \mathfrak{v}_+^* - \delta\,\frac{d\mathfrak{v}^*}{dt} + \delta^2(\cdot\cdot\cdot).$$

Wenn jetzt beide Quellen zusammenrücken, und während δ gegen Null abnimmt, gleichzeitig e in dem Maß wächst, daß $\lim e\delta = m$ endlich bleibt, so ist

$$11)\qquad \int\limits_{K_0} \mathfrak{v}\,\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau = m\,\frac{d\mathfrak{v}^*}{dt}.$$

Das Geschwindigkeitspotential der Doppelquelle und damit die Bedeutung von m ergibt sich in bekannter Weise durch den nämlichen Prozeß:

$$\varphi = \mathfrak{d} \cdot \nabla \frac{-e}{4\pi r} = -\frac{m}{4\pi} \frac{d\frac{1}{r}}{dt},$$

wo die Richtungsdifferentiation am Ort der Quelle (nicht im Aufpunkt) auszuführen ist.

Endlich ist noch für das Auftreten von Wirbeln $\int\limits_{R_\infty} \mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\tau$ zu bestimmen. Ersetzt man die Wirbellinie durch einen dünnen Wirbelfaden R, um den die Zirkulation denselben Wert hat, so ist die Potentialströmung außerhalb des Fadens ungeändert. Nach dem Stokesschen Satz ist die Zirkulation

$$\Gamma = \int \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{l} = \int\limits_{Q} \operatorname{curl} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f}.$$

Hier ist $d\mathfrak{f}$ das Flächenelement des Querschnitts Q, $d\mathfrak{l}$ das Linienelement seines Randes, um den integriert wird. Nimmt man an einer Stelle als Querschnitt einen Kreis vom Radius a, dessen Ebene auf der Wirbellinie senkrecht steht, und verteilt die Wirbelstärke gleichmäßig über seine Fläche, so wird

$$|\operatorname{curl} \mathfrak{v}| = \frac{\Gamma}{a^2 \pi}; \quad \operatorname{curl} \mathfrak{v} = \frac{\Gamma}{a^2 \pi} \mathfrak{t};$$

$\mathfrak{t}$ ist ein Einheitsvektor in Richtung der Tangente der Wirbellinie, $d\mathfrak{s} = \mathfrak{t}\, ds$ ihr Linienelement; dann läßt sich, da $d\tau = df\, ds$, und die Integration über Q ausführbar ist, das Raumintegral über den Wirbelfaden R auf ein Linienintegral über die Wirbellinie L zurückführen.

$$\text{12)} \qquad \int\limits_{R} \mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\tau = \Gamma \int\limits_{L} \mathfrak{v} \times d\mathfrak{s}.$$

Zerlegt man wie bei den Quellpunkten $\mathfrak{v}$ in eine Summe $\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{v}^*$, wo $\mathfrak{v}_0$ die von dem betrachteten Element des Wirbelfadens selbst erzeugte Geschwindigkeit ist, so läßt sich wie dort zeigen, daß $\mathfrak{v}_0$ wegen seiner rotationssymmetrischen Verteilung bei der Integration über jeden Querschnitt ohne Einfluß bleibt, und daß von $\mathfrak{v}^*$ nur der Mittelwert auf der Wirbellinie selbst beim Grenzübergang in Betracht kommt. Der Beitrag, den die Wirbellinie zu dem Druck $\mathfrak{P}_F$ liefert, ist also $-\varrho\Gamma\int\limits_L \mathfrak{v}^* \times d\mathfrak{s}$, ein Ausdruck, dessen Verallgemeinerung für ein kontinuierliches Wirbelgebiet keine Schwierigkeit bietet. Dieser Ausdruck ist derselbe, den Prandtl[1]) für die Verallgemeinerung der Kuttaschen Kraft für den „tragenden Faden" gefunden hat; er gilt indessen nicht nur für eine derartige fingierte Wirbellinie im Innern des eingetauchten Körpers, sondern gibt auch die Druckkraft, den ein in der Flüssigkeit selbst befindlicher Wirbelfaden auf den eingetauchten Körper zur Folge hat.

Die gesamte Druckkraft auf F ist also für den Fall, daß eine Anzahl von diskreten Quellen Q_i und Wirbellinien L_k in der Strömung vorhanden ist, nach (8), (9), (10) und (12)

$$13) \qquad \mathfrak{P}_F = -\varrho\Sigma e_i \mathfrak{v}_\infty + \varrho\Sigma e_i \mathfrak{v}_i^* - \varrho\Sigma\Gamma_k \int\limits_{L_k} \mathfrak{v}_k^* \times d\mathfrak{s}.$$

Wenn die Geschwindigkeit im Unendlichen verschwindet oder die Flüssigkeit das Innere von F erfüllt, verschwindet das erste Glied, so daß also (13) die genauere Lösung des inneren wie des äußeren Problems umfaßt.

Einen besonders einfachen Ausdruck erhält man für $\mathfrak{P}_F$, wenn die Strömung wirbelfrei ist. Bezeichnet $\mathfrak{v}_i^{**} = \mathfrak{v}_i^* - \mathfrak{v}_\infty$ die am Quellpunkt Q_i durch die übrigen Bedingungen der Strömung ausschließlich der Translationsgeschwindigkeit hervorgebrachte Geschwindigkeit, so ist

$$14) \qquad \mathfrak{P}_F = \varrho\Sigma e_i \mathfrak{v}_i^{**}.$$

Dieser Ausdruck ist formal derselbe, wie wenn keine Geschwindigkeit im Unendlichen vorhanden ist. Man darf daraus jedoch nicht schließen, daß $\mathfrak{v}_\infty$ überhaupt ohne Einfluß auf $\mathfrak{P}_F$ ist, da sich durch das Auftreten von $\mathfrak{v}_\infty$ der Wert von $\mathfrak{v}^*$

[1]) I. Mitteilung, Gleichung (12); dort ist auch auf die beim Grenzübergang auftretenden Schwierigkeiten aufmerksam gemacht.

selbst ändert. Denn die Randbedingung $\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} = 0$ auf F verlangt das Hinzufügen einer Zusatzströmung mit singulären Stellen im Innern von F. Überhaupt ist zur Bestimmung von $\mathfrak{v}^*$ die Lösung der Randwertaufgabe im allgemeinen nicht zu vermeiden; nur die Auswertung des Oberflächenintegrals (2) für den Druck wird durch die für $\mathfrak{P}_F$ gefundenen Ausdrücke (4), (9), (13), (14) erspart.

3. Ebene Aufgabe. Der Druck einer ebenen Strömung auf eine Kontur C läßt sich in derselben Weise berechnen wie bei der räumlichen Aufgabe. An Stelle von (6) tritt

$$15)\quad \mathfrak{P}_C = \varrho \int\limits_K (\mathfrak{v}\,\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{n} - \tfrac{1}{2} v^2 \mathfrak{n})\, ds + \varrho \int\limits_J \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\omega - \varrho \int\limits_J \mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\omega .$$

Hier ist das (vektorielle) Flächenelement $d\mathfrak{o}$ durch $\mathfrak{n}\,ds$ ersetzt, wo $\mathfrak{n}$ ein Einheitsvektor in Richtung der inneren Normalen, ds das Linienelement von C ist. Das erste Integral ist über einen Kreis K zu erstrecken, der zunächst alle singulären Stellen einschließt und dessen Radius dann ins Unendliche wächst. An Stelle des Raumelements $d\tau$ tritt das Flächenelement $d\omega$ des inneren oder äußeren Gebietes von C. Beim inneren Problem fällt das erste Integral weg. Beim äußeren Problem muß die Geschwindigkeit im Unendlichen Null oder endlich sein. Isolierte Wirbelpunkte können zugelassen werden (während bei der räumlichen Aufgabe Stabwirbel ausgeschlossen waren).

Setzt man

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{i} u_1 + \mathfrak{j} u_2 ,$$

so wird

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}$$

$$\operatorname{curl} \mathfrak{v} = \mathfrak{k} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right); \quad |\operatorname{curl} \mathfrak{v}| = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}$$

$$\mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v} = (-\mathfrak{j} u_1 + \mathfrak{i} u_2) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right).$$

Ferner ist

$$\mathfrak{n}\, ds = -\mathfrak{i}\, dy + \mathfrak{j}\, dx$$

$$(\mathfrak{v}\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n} - \tfrac{1}{2} v^2 \mathfrak{n})\, ds = \mathfrak{i}\left(\frac{-u_1^2 + u_2^2}{2}\, dy + u_1 u_2\, dx\right)$$

$$+ \mathfrak{j}\left(\frac{-u_1^2 + u_2^2}{2}\, dx - u_1 u_2\, dy\right).$$

Jetzt empfiehlt sich die Einführung komplexer Veränderlicher

$$z = x + iy$$

$$\Omega = \varphi + i\psi \quad \text{komplexes Potential}$$

$$\bar{v} = u_1 - i u_2 = \frac{d\Omega}{dz} \quad \text{komplexe Geschwindigkeit;}$$

endlich soll statt des Druckvektors $\mathfrak{P} = \mathfrak{i} P_1 + \mathfrak{j} P_2$ der komplexe Druck $\bar{P} = P_1 - i P_2$ eingeführt werden. Dann tritt in (15) unter dem ersten Integral der folgende Ausdruck auf:

$$\left(\frac{-u_1^2 + u_2^2}{2}\, dy + u_1 u_2\, dx\right) - i\left(\frac{-u_1^2 + u_2^2}{2}\, dx - u_1 u_2\, dy\right)$$

$$= \frac{\varrho}{2}\, i\, (u_1 - i u_2)^2 (dx + i\, dy).$$

Folglich geht (15) über in[1])

$$16)\qquad \bar{P} = \frac{\varrho}{2}\, i \int_K \bar{v}^2\, dz + \varrho \int_J \bar{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\omega - \varrho i \int_J \bar{v} \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\omega.$$

Zur Berechnung des ersten Integrals entwickelt man v in eine nach fallenden Potenzen von z fortschreitende Reihe, die außerhalb der singulären Punkte konvergiert:

$$\bar{v} = \bar{v}_\infty + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z_2} + \cdots$$

---

[1]) Den ersten Summand findet Blasius für den Druck einer außerhalb der Kontur singularitätenfreien Strömung (Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik, Zeitschrift für Math. und Physik 58 (1910), S. 90—96).

Dann wird

$$\int_K \bar{v}^2\, dz = 4\pi i C_1 v_\infty, \quad \text{folglich}$$

17) $$P = -2\pi\varrho C_1 \bar{v}_\infty + \varrho \int_J \bar{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\omega - \varrho i \int_J \bar{v} \,|\operatorname{curl} \mathfrak{v}|\, d\omega.$$

Das komplexe Potential einer einfachen Quelle von der Ergiebigkeit e und die von ihr erzeugte komplexe Geschwindigkeit ist

$$\Omega = \frac{e}{2\pi} \lg(z - z_0); \quad \bar{v} = \frac{e}{2\pi} \frac{1}{z - z_0}.$$

Verteilt man die ganze Ergiebigkeit auf eine kleine Kreisfläche J_0, so findet man in derselben Weise wie im Raum

$$\int_J \bar{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\omega = e\bar{v}^*.$$

Ähnlich erhält man für eine Doppelquelle die folgenden Werte:

$$\Omega = \frac{-m}{2\pi} \frac{1}{z - z_0}; \quad \bar{v} = \frac{m}{2\pi} \frac{1}{(z - z_0)^2}$$

$$\int_J \bar{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\omega = m \frac{d\bar{v}^*}{dz}.$$

Für einen Wirbelpunkt mit der Zirkulation Γ ist

$$\Omega = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \lg(z - z_0); \quad v = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z - z_0}.$$

Verteilt man wieder die ganze Wirbelstärke gleichmäßig auf eine kleine Kreisfläche, so findet man

$$\int_{J_0} \bar{v} \,|\operatorname{curl} \mathfrak{v}|\, d\omega = \Gamma v^*.$$

Ist also die Verteilung der Quellpunkte (e_k) und Wirbelpunkte (Γ_l) in dem von Flüssigkeit erfüllten Gebiet J bekannt, so sind die beiden Integrale in (17) bestimmt und damit zunächst die Lösung des inneren Problems durch folgende Gleichung gegeben:

18) $$P = \varrho \Sigma e_k \bar{v}_k^* - \varrho i \Sigma \Gamma_l \bar{v}_l^* .$$

Dann ergibt sich aber auch im Fall des äußeren Problems der Wert der Konstanten C_1. Glieder von der Ordnung -1 kommen nur in den Reihenentwicklungen für die Geschwindigkeiten vor, die von einfachen Quellen oder Wirbelpunkten erzeugt werden. Und zwar ist für eine einfache Quelle

$$\bar{v}_k = \frac{e_k}{2\pi}\left(\frac{1}{z} + \frac{z_k}{z^2} + \cdots\right)$$

und für einen Wirbelpunkt

$$\bar{v}_l = -i\frac{\Gamma_l}{2\pi}\left(\frac{1}{z} + \frac{z_l}{z^2} + \cdots\right);$$

folglich ist

$$C_1 = \frac{1}{2\pi}(\Sigma e_k - i \Sigma \Gamma_l) .$$

Die Summation erstreckt sich über die ganze Ebene mit Ausschluß des Punktes ∞; d. h. über Außen- und Innengebiet, also auch über die Quellen und Wirbel, die bei der analytischen Fortsetzung der Strömung im Innern der Kontur C auftreten. Hier ist ein Unterschied im Verhalten der Quellen und Wirbel nicht zu übersehen, der bei der räumlichen Aufgabe nicht in Erscheinung trat. Die Summe der Ergiebigkeiten der im Innengebiet gelegenen Quellen ist nämlich notwendig Null; infolgedessen genügt es, Σe_k für das Außengebiet statt für die ganze Ebene zu bilden. Das entsprechende gilt für die Wirbel im allgemeinen nicht; die Summe der Zirkulationen Γ_l' der Wirbel des Innengebietes kann von Null verschieden sein und erscheint dann als Zirkulation $\Gamma_C = \Sigma \Gamma_l'$ um die Kontur. Die Summe der Zirkulationen, erstreckt über die ganze Ebene, setzt sich also zusammen aus der Summe über das Außengebiet und der Zirkulation um die Kontur. Somit wird

$$C_1 = \frac{1}{2\pi}\,(\Sigma e_k - i\,\Sigma\,\Gamma_l - i\,\Gamma_C),$$

wobei jetzt beide Summen über das Außengebiet erstreckt sind; also

19) $$\bar{P} = -\varrho\,(\Sigma e_k - i\,\Sigma\,\Gamma_l - i\,\Gamma_C)\,\bar{v}_\infty + \varrho\,\Sigma\,e_k\,\bar{v}_k^* - i\,\varrho\,\Sigma\,\Gamma_l\,\bar{v}_l^*\,.$$

Setzt man wieder $\bar{v}_k^* - \bar{v}_\infty = \bar{v}_k^{**}$, so ergibt sich die Lösung des äußeren Problems in der einfachen Form

20) $$P = \varrho\,\Sigma\,e_k\,\bar{v}_k^{**} - i\,\varrho\,\Sigma\,\Gamma_l\,\bar{v}_l^{**} + i\,\varrho\,\Gamma_C\,\bar{v}_\infty\,;$$

in diesem Ausdruck ist der letzte Summand die Kuttasche Kraft.

Anwendungen: Sehr einfach gestaltet sich die Berechnung von $\bar{v}^*$, wenn die Kontur ein Kreis ist, weil dann die Strömung samt ihrer analytischen Fortsetzung durch das Prinzip der Thomsonschen Bilder gefunden wird.

a) Es sei im Außengebiet eine Quelle von der Ergiebigkeit e an der Stelle $z = a$ vorhanden; außerdem sei $\bar{v}_\infty = v_{x\infty}$; so ist

$$\Omega = v_{x\infty}\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{e}{2\pi}\,\lg\frac{(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}{z}$$

$$\bar{v}^*_{(a)} = v_{x\infty}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) + \frac{e}{2\pi}\left[\frac{a}{a^2-1} - \frac{1}{a}\right]$$

$$P = \varrho\,\frac{e^2}{2\pi}\left[\frac{a}{a^2-1} - \frac{1}{a}\right] - \varrho\,\frac{e\,v_{x\infty}}{a^2}\,.$$

b) Es sei im Außengebiet eine Doppelquelle vom reellen Moment m an der Stelle $z = a$ vorhanden; außerdem sei $\bar{v}_\infty = v_{x\infty}$; so ist

$$\Omega = v_{x\infty}\left(z + \frac{1}{z}\right) - \frac{m}{2\pi}\left[\frac{1}{z-a} - \frac{1}{a^2}\,\frac{1}{z-\frac{1}{a}}\right]$$

$$\bar{v}^* = v_{x\infty}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) - \frac{m}{2\pi\,a^2}\,\frac{1}{\left(z-\frac{1}{a}\right)^2}$$

$$\left(\frac{d\bar{v}^*}{dz}\right)_{(a)} = \frac{2\,v_{x\infty}}{a^3} + \frac{a\,m}{\pi\,(a^2-1)^3}$$

$$P = \varrho\,m\left[\frac{2\,v_{x\infty}}{a^3} + \frac{a\,m}{\pi\,(a^2-1)^3}\right].$$

c) Es sei im Außengebiet ein Wirbel von der Zirkulation Γ an der Stelle $z = a$ vorhanden, ferner eine Zirkulation Γ_C um die Kontur; außerdem sei $\bar{v}_\infty = v_{x\infty}$; so ist

$$\Omega = v_{x\infty}\left(z + \frac{1}{z}\right) - \frac{i\,\Gamma}{2\pi}\lg\frac{z-a}{z-\frac{1}{a}} - \frac{i\,(\Gamma_C+\Gamma)}{2\pi}\lg z$$

$$v^*_{(a)} = v_{x\infty}\left(1-\frac{1}{a^2}\right) + \frac{i\,\Gamma}{2\pi}\,\frac{1}{a-\frac{1}{a}} - \frac{i\,(\Gamma_C+\Gamma)}{2\pi}\,\frac{1}{a}$$

$$P = \varrho\,\frac{\Gamma^2}{2\pi}\,\frac{a}{a^2-1} - \varrho\,\frac{\Gamma(\Gamma_C+\Gamma)}{2\pi\,a} + i\,\varrho\left(\frac{\Gamma}{a^2}+\Gamma_C\right)v_{x\infty}.$$

Das letzte von Γ und a freie Glied ist wieder die Kuttasche Kraft.