Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1921. Heft II

Mai- bis Juli- und November- u. Dezembersitzung

München 1922

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Nachtrag zu der Abhandlung:

Elementare Funktionentheorie und komplexe Integration.

(Jahrgang 1920, S. 145 ff.)

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung am 4. Juni 1921.

Im Anschluß an den in der oben genannten Arbeit mitgeteilten elementaren Beweis des Cauchyschen Integralsatzes habe ich eben daselbst (a. a. O. S. 178) eine unmittelbar auf der Summendefinition des bestimmten Integrals beruhende Auswertung des Integrals $\int \frac{dx}{x}$ über einen geschlossenen Weg um den Nullpunkt angegeben. Inzwischen habe ich bemerkt, daß diese Auswertung sehr viel kürzer, ich darf vielleicht sagen, überraschend einfach sich bewerkstelligen läßt.

Wählt man als Integrationsweg den Einheitskreis um den Nullpunkt und für die in der Definitionsgleichung:

$$\int_{+(1)} \frac{dx}{x} = \lim_{n \to \infty} \sum_1^n {}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1}) \cdot \frac{1}{x_{\nu-1}} = \lim_{n \to \infty} \sum_1^n {}^{\nu} \left(\frac{x_\nu}{x_{\nu-1}} - 1 \right)$$

auftretenden Werte x_ν die Teilpunkte:

$$x_\nu = e^{\frac{2\nu\pi i}{n}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n),$$

so wird:

$$\frac{x_\nu}{x_{\nu-1}} = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad \sum_1^n {}^{\nu} \left(\frac{x_\nu}{x_{\nu-1}} - 1 \right) = n \left(e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1 \right)$$

und daher:

$$\int\limits_{+(1)} \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu!}\left(\frac{2\pi i}{n}\right)^\nu = 2\pi i.$$

Es verdient übrigens bemerkt zu werden, daß der fragliche Grenzwert auch ohne Benützung der transzendenten Einheitswurzelform und somit das betreffende Integral ohne jedes transzendente Hilfsmittel berechnet werden kann.

Setzt man nämlich speziell: $n = 2^m$ und bezeichnet mit $\alpha_m = \beta_m + \gamma_m i$ die 2^mte, durch iterierte positive Quadratwurzeln darstellbare Haupteinheitswurzel (d. h. diejenige mit maximalem β_m und positivem γ_m), so hat man analog wie oben:

$$x_\nu = \alpha_m^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots 2^m),$$

und daher:

(1)
$$\int\limits_{+(1)} \frac{dx}{x} = \lim_{m\to\infty} 2^m(\alpha_m - 1).$$

Nun läßt sich zunächst die Existenz von $\lim\limits_{m\to\infty} 2^m|\alpha_m - 1|$ in folgender Weise arithmetisch feststellen. Man hat:

$$\alpha_{m+1} = \sqrt{\alpha_m} = \sqrt{\beta_m + \gamma_m i},$$

also (wegen $\beta_m^2 + \gamma_m^2 = 1$):

(2)
$$\beta_{m+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\beta_m)}, \qquad \gamma_{m+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\beta_m)}.$$

Hiernach wird:

$$|\alpha_m - 1| = \sqrt{(\beta_m - 1)^2 + \gamma^2} = \sqrt{2(1-\beta_m)}$$
$$= 2\gamma_{m+1}$$

und daher:

(3)
$$2^m|\alpha_m - 1| = 2^{m+1}\gamma_{m+1}.$$

Des weiteren läßt sich zeigen, daß die Zahlen $2^\nu\gamma_\nu$ eine mit wachsendem ν monoton zunehmende und beschränkte, also schließlich konvergente Folge bilden. Man findet nämlich wegen $\beta_{m+1} < 1$ und mit Berücksichtigung von Gl. (2):

$$2\,\gamma_{m+1} > 2\,\beta_{m+1}\,\gamma_{m+1} = \sqrt{1-\beta_m^2} = \gamma_m$$

und daher:

$$2^{m+1}\,\gamma_{m+1} > 2^m\,\gamma_m .$$

Andererseits ergibt sich mit Benützung derselben Beziehungen:

$$\gamma_{m+1} < \frac{\gamma_{m+1}}{\beta_{m+1}} = \frac{2\,\beta_{m+1}\,\gamma_{m+1}}{2\,\beta_{m+1}^2} = \frac{\gamma_m}{1+\beta_m} = \frac{\beta_m}{1+\beta_m}\cdot\frac{\gamma_m}{\beta_m}$$
$$< \frac{1}{2}\,\frac{\gamma_m}{\beta_m},$$

folglich:

$$2^{m+1}\,\gamma_{m+1} < 2^{m+1}\,\frac{\gamma_{m+1}}{\beta_{m+1}} < 2^m\,\frac{\gamma_m}{\beta_m} < 2^3\,\frac{\gamma_3}{\beta_3} = 8 .$$

Damit ist die ausgesprochene Behauptung bewiesen, und es stellt somit $\lim\limits_{m\to\infty} 2^{m+1}\,\gamma_{m+1}$, also nach Gl. (2) schließlich $\lim\limits_{n\to\infty} 2^m\,|\alpha_m - 1|$ eine bestimmte (positive) Zahl vor. Da andererseits $|\alpha_m - 1|$ die Seitenlänge und somit $2^m\,|\alpha_m - 1|$ den Umfang des regelmäßigen 2^m-Ecks darstellt, so findet man:

$$\text{(4)}\qquad \lim 2^m\,|\alpha^m - 1| = 2\,\pi ,$$

wenn man, wie üblich, mit $2\,\pi$ die Längenzahl für den Umfang des Einheitskreises bezeichnet.

Da aber:

$$|\alpha_m - 1|^2 = (\beta_m - 1)^2 + \gamma_m^2 = 2\,(1-\beta_m),$$

so ergibt sich durch Quadrierung von Gl. (4):

$$\lim_{m\to\infty} 2^{2m+1}\,(1-\beta_m) = 4\,\pi^2$$

und daher:

$$\text{(5)}\qquad \lim_{m\to\infty} 2^m\,(1-\beta_m) = 0.$$

Andererseits ist:

$$\lim_{m\to\infty} 2^m\,(\alpha_m - 1) = \lim_{m\to\infty} 2^m\,(\beta_m - 1) + i\,\lim_{m\to\infty} 2^m\,\gamma_m ,$$

also, mit Berücksichtigung von Gl. (2) und (3), positiv imaginär, nämlich $= 2\pi i$,. so daß sich schließlich wieder ergibt:

$$\int_{(+1)} \frac{dx}{x} = 2\pi i.$$

Da übrigens bei der früher von mir angewendeten Methode der Wert des nämlichen Integrals in Gestalt der mit $8i$ multiplizierten Leibnizschen Reihe erschien, so findet man durch Kombination der beiden Methoden die Beziehung:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \frac{1}{2\nu + 1}$$

ohne jede Benützung trigonometrischer oder cyklometrischer Funktionen.