Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1922
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Bemerkungen zu Sätzen der Gaußschen theoria combinationis observationum.

Von Georg Faber.

Vorgetragen in der Sitzung am 14. Januar 1922.

$\varphi(x)$ bezeichne im folgenden stets eine nie zunehmende Funktion der positiven Veränderlichen x; die Kurve $y = \varphi(x)$ stellen wir uns in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem vor, Parallele zur X-Achse nennen wir auch horizontal, Parallele zur Y-Achse vertikal, die Achse der positiven x sei von links nach rechts gerichtet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der absolute Betrag eines Beobachtungsfehlers zwischen den Grenzen α, β liege, wo $0 < \alpha < \beta$, werde durch

$$1)\qquad \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx$$

gemessen. Wir wollen gelegentlich zulassen, daß der Fehler Null unendlich vielmal wahrscheinlicher sei als jeder andere, so daß ihm allein eine endliche Wahrscheinlichkeit w_0 zukommt.

Dann ist

$$2)\qquad w_0 + \int_{0}^{\infty} \varphi(x)\, dx = 1;$$

im allgemeinen jedoch setzen wir $w_0 = 0$ voraus. Ferner werden folgende Bezeichnungen benutzt:

$$3)\qquad K_n = \int_{0}^{\infty} x^n \varphi(x)\, dx,$$

$$4)\qquad k_n = K_n^{\frac{1}{n}} \quad (> 0);$$

n ist positiv, aber nicht notwendig ganzzahlig gedacht. $\varphi(x)$ soll mit $1/x$ rasch genug gegen Null konvergieren, daß alle diese Integrale einen Sinn haben; häufig wird von einem gewissen x ab $\varphi(x) \equiv 0$ sein. Wir setzen noch zur Abkürzung

$$z(x) = w_0 + \int_0^x \varphi(x)\,dx. \tag{5}$$

Im 10. art. der theoria combinationis observationum beweist Gauß folgenden Lehrsatz, den er selbst als theorema insigne bezeichnet[1]):

Es ist stets

$$x < 3^{1/2} k_2 z(x), \qquad \text{falls } z(x) < \tfrac{2}{3}; \tag{6}$$

$$x < \frac{2 k_2}{3(1 - z(x))^{1/2}}, \qquad \text{falls } z(x) > \tfrac{2}{3}. \tag{7}$$

Gauß hat beim Beweise dieses Satzes die Spuren seiner Erfindung, wie er auch sonst zu tun pflegte, möglichst verwischt, und der Leser bleibt daher unbefriedigt, wenn es ihm nicht gelingt, das Gefüge des überall glatt verputzten Bauwerks bloßzulegen. Im vorliegenden Fall ist das nicht schwierig und geschah durch Winckler[2]); dieser Mathematiker fand bei dieser Gelegenheit zugleich die folgende Verallgemeinerung des Gaußschen Satzes:

$$x < (m+1)^{\frac{1}{m}} k_m z(x), \qquad \text{falls } z(x) < \frac{m}{m+1}; \tag{8}$$

$$x < \frac{m k_m}{(m+1)(1 - z(x))^{\frac{1}{m}}}, \qquad \text{falls } z(x) > \frac{m}{m+1}. \tag{9}$$

Für $m = 2$ erhält man das Gaußsche Ergebnis.

Einen anderen Satz, nämlich daß stets

$$5 K_4 \geqq (3 K_2)^2 \tag{10}$$

ist, hat Gauß im 11. art. ohne Beweis mitgeteilt.

---

[1]) Gauß, Werke, Bd. 4; Comm. soc. sient. reg. Gotting. 1823.

[2]) Sitzungsber. der Wiener Akad., Bd. **53** (1866).

Bei Winckler a. a. O. findet sich die allgemeinere Ungleichung:

11) $$[(n+1)K_n]^m > [(m+1)K_m]^n \text{ für } n > m,$$

die für $m = 2$, $n = 4$ in den Gaußschen Satz (10) übergeht. Der Wincklersche Beweis für (11) ist jedoch falsch und, wie es scheint, nicht verbesserungsfähig.

Im Jahre 1896 beschäftigte sich Herr Krüger in den Nachrichten der Göttinger Ges. d. Wiss. mit den beiden Gaußschen Sätzen (6), (7) und (10), ohne die Wincklersche Abhandlung zu kennen. Er beweist zunächst genau wie Winckler dessen Verallgemeinerung (8), (9) des Gaußschen Satzes (6), (7). Sodann beweist er (10); es ist erstaunlich, daß dieser einfache und merkwürdige Gaußsche Satz erst mehr als ein halbes Jahrhundert nach seiner Veröffentlichung mit einem Beweise versehen wurde. Herr Krüger verallgemeinert auch, ganz ähnlich wie Winckler das Gaußsche Ergebnis, jedoch nicht bis zu der Wincklerschen Formel (11), von der er vielmehr nur die besonderen Fälle $n = 2m$, und $m = 2$, $n = 2^\nu$ beweist.

Alle erwähnten Beweise und Beweisversuche schließen sich eng an den von Gauß für (6), (7) benutzten Gedankengang an und bedürfen eines ziemlichen Aufwandes von Rechnung. Durch Einführung anders gearteter Überlegungen in diesen Aufgabenkreis lassen sich, wie ich zeigen will, die erwähnten Sätze und andere, die neu sind, mit großer Einfachheit und Anschaulichkeit beweisen. Ich beginne mit dem Beweise des in seiner Allgemeinheit immer noch unbewiesenen Wincklerschen Satzes (11).

Es sei eine den eingangs aufgestellten Bedingungen genügende Fehlerkurve C_1:

12) $$y = \varphi(x)$$

mit $w_0 = 0$ und der zugehörige Wert

13) $$K_m = \int_0^\infty x^m \varphi(x)\, dx$$

gegeben. Daneben betrachte ich eine zweite Fehlerkurve C_2: $y = \varphi_2(x)$, wo

14) $$\varphi_2(x) = h \text{ (konstant), falls } 0 < x < a; \quad \varphi_2(x) = 0, \text{ falls } x > a.$$

C_2 besteht also aus einer horizontalen Strecke; doch wollen wir auch das Stück der vertikalen Geraden $x = a$ zwischen $y = 0$ und $y = h$ mit zu dieser Fehlerkurve C_2 rechnen; die entstehende „Stufe" besteht also aus einem horizontalen und aus einem vertikalen Stück. (Auch an einer etwa vorhandenen Sprungstelle x_1 der gegebenen Funktion $\varphi(x)$ würden wir ein vertikales die beiden Punkte x_1, $\varphi(x_1 - 0)$ und x_1, $\varphi(x_1 + 0)$ verbindendes Geradenstück einfügen. Unsere Fehlerkurven sind somit ununterbrochene Kurvenzüge, welche einen Punkt der Y-Achse mit einem Punkte der X-Achse, der auch $x = \infty$ sein kann, verbinden.)

Die in (14) noch vorkommenden Konstanten a, h bestimmen wir durch die Forderungen, erstens daß für C_2 die Konstante $w_0 = 0$, d. h. daß

15) $$a h = 1$$

sein soll, und zweitens, daß das m^{te} Moment für C_2:

16) $$h \int_0^a x^m \, dx = K_m,$$

d. h. ebenso groß wie für C_1 sein soll; es wird also

17) $$\frac{h a^{m+1}}{m+1} = K_m$$

oder

18) $$\frac{a^m}{m+1} = K_m.$$

Wegen der Monotonie der Funktion $\varphi(x)$ können die Kurven C_1, C_2 einander in höchstens zwei Punkten schneiden. Man sieht leicht ein, daß diese zwei möglichen Schnittpunkte tatsächlich vorhanden sind. Es folgt dies auch aus dem nachstehenden Hilfssatze, den wir nachher nochmals brauchen werden, dessen Beweis ich aber auf den Schluß dieser Mitteilung verschiebe.

Hilfssatz I: Ist die Funktion $F(a)$ definiert durch

$$F(a) = \int_0^\infty x^a \psi(x)\, dx, \tag{19}$$

so hat die Funktion $\psi(x)$ mindestens eben so viele positive Nullstellen mit Zeichenwechsel als die Funktion $F(a)$ Nullstellen $\geqq 0$ besitzt. (Eine Sprungstelle x_1 der Funktion $\psi(x)$ ist als Nullstelle mit Zeichenwechsel mitzuzählen, wenn $\psi(x_1 + 0)$ und $\psi(x_1 - 0)$ verschiedene Vorzeichen haben.)

Wählt man für $\psi(x)$ die Differenz $\varphi(x) - \varphi_2(x)$ der Funktionen (12), (14), wird $F(a) = 0$ für $a = 0$ und $a = m$, woraus sich nach dem Hilfssatze die zwei Schnittpunkte der Kurven C_1, C_2 ergeben. Da aber, wie bemerkt, diese Kurven keinen dritten Punkt gemein haben können, so kann (wieder auf Grund des Hilfssatzes) die Funktion

$$F(a) = \int_0^\infty (\varphi(x) - \varphi_2(x))\, x^a\, dx \tag{20}$$

keine weiteren Nullstellen außer $a = 0$ und $a = m$ besitzen. Die Funktion $F(a)$ ist also, so weit sie für $a > m$ existiert, von einerlei Vorzeichen und zwar positiv, denn für hinreichend große a hat $F(a)$ das Vorzeichen von

$$\int_a^\infty (\varphi(x) - \varphi_2(x))\, x^a\, dx = \int_a^\infty \varphi(x)\, x^a\, dx. \tag{21}$$

Ist also $n > m$ und existiert das Moment

$$K_n = \int_0^\infty \varphi(x)\, x^n\, dx, \tag{22}$$

so wird

$$K_n > \int_0^\infty \varphi_2(x)\, x^n\, dx = \frac{h\, a^{n+1}}{n+1} = \frac{a^n}{n+1} = \frac{\left(\sqrt[m]{(m+1)\, K_m}\right)^n}{n+1} \tag{23}$$

oder

$$[(n+1)\, K_n]^m > [(m+1)\, K_m]^n. \tag{24}$$

Das ist aber die Wincklersche Ungleichung; nur wenn $\varphi(x)$ mit $\varphi_2(x)$ identisch ist, ist das Zeichen $>$ in (24) durch $=$ zu ersetzen.

Da die Kurve $y = \varphi(x)$ von $x = 0$ ab zuerst oberhalb der Kurve $y = \varphi_2(x)$ (14) verläuft, so gilt für hinreichend kleine x:

25) $$z(x) > xh = \frac{x}{a} = \frac{x}{(m+1)^{\frac{1}{m}} k_m}$$

oder

26) $$x < (m+1)^{\frac{1}{m}} k_m z(x).$$

Um den Giltigkeitsbereich dieser Ungleichung genau abzugrenzen, wollen wir die Kurve $y = \varphi(x)$ unter Festhaltung ihres Moments K_m so variieren, daß die Gleichung

27) $$\int_0^x \varphi(x)\,dx = \int_0^x \varphi_2(x)\,dx$$

oder

28) $$z(x) = xh$$

für einen möglichst kleinen Wert $x = x_1$ erfüllt ist; dann gilt (25), (26) immer für $x < x_1$.

Wir gehen zuerst von irgend einer (noch nicht variierten) von $y = \varphi_2(x)$ verschiedenen Kurve $y = \varphi(x)$ aus und nennen die einzige offenbar vorhandene Wurzel der Gleichung (27) oder (28) x_2. Das Stück der Kurve $y = \varphi(x)$ rechts von $x = x_2$ ersetzen wir durch eine Stufe

29) $$y = \varphi_3(x), \text{ wo}$$

30) $$\begin{cases} \varphi_3(x) = k \text{ (konstant), falls } x_2 < x < b, \\ \varphi_3(x) = 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{„} \quad x > b, \end{cases}$$

und wo die Konstanten $k > 0$ und $b > x_2$ durch die Bedingungen

31) $$\int_{x_2}^{b} \varphi_3(x)\,dx = \int_{x_2}^{\infty} \varphi(x)\,dx,$$

$$32)\qquad \int_{x_2}^{b} x^m \varphi_3(x)\, dx = \int_{x_2}^{\infty} x^m \varphi(x)\, dx$$

bestimmt sind, und zwar offenbar eindeutig (vgl. (15), (16)).

Genau wie sich vorhin, S. 11, $\varphi(+0) > h$ ergab, ergibt sich jetzt $\varphi(x_2+0) > k$ und daher auch $\varphi(x_2-0) > k$ (nur, falls für $x > x_2$ von vornherein $\varphi_3(x) \equiv \varphi(x)$ war, muß in der ersten und kann in der zweiten dieser Ungleichungen $=$ statt $>$ stehen). Nun ersetzen wir auch links von $x = x_2$ die Kurve $y = \varphi(x)$ durch $y = k$; die so entstehende Kurve nennen wir $y = \varphi_4(x)$. Es ist also

$$33)\qquad \begin{cases} \varphi_4(x) = k \text{ für } 0 < x < b \text{ und} \\ \varphi_4(x) = 0 \text{ für } x > b. \end{cases}$$

Falls nicht etwa von vornherein $\varphi(x)$ mit $\varphi_4(x)$ identisch war, ist sowohl

$$34)\qquad \int_0^{\infty} \varphi_4(x)\, dx < \int_0^{\infty} \varphi(x)\, dx = 1,$$

als auch

$$35)\qquad \int_0^{\infty} \varphi_4(x)\, x^m\, dx < \int_0^{\infty} \varphi(x)\, x^m\, dx = K_m.$$

Die Ungleichung (34) kann man in eine Gleichung verwandeln, wenn man die in der Definition (33) von $\varphi_4(x)$ vorkommende Konstante b durch eine größere c ersetzt. Die so aus $\varphi_4(x)$ entstehende Funktion möge $\varphi_5(x)$ heißen. Da bei den letzten Variationen, die von $\varphi_3(x)$ zu $\varphi_5(x)$ führten, Fehlern $> x_2$ auf Kosten von Fehlern $< x_2$ eine größere Wahrscheinlichkeit zuerteilt wurde, ist

$$36)\qquad k \int_0^{c} x^m\, dx > K_m,$$

andererseits besagt (35):

$$37)\qquad k \int_0^{b} x^m\, dx < K_m.$$

Mithin gibt es eine Zahl d zwischen b und c, für die

38) $$k \int_0^d x^m\, dx = K_m$$

wird. Für $y = \varphi_6(x)$, wo

39) $$\begin{cases} \varphi_6(x) = k, & \text{falls } 0 < x < d; \\ \varphi_6(x) = 0, & \text{falls } x > d \end{cases}$$

ist somit die Bedingung, daß der Wert des Moments K_m festgehalten werden soll, erfüllt. Dagegen ist wegen $d < c$:

40) $$\int_0^\infty \varphi_6(x)\, dx = k d < 1\,.$$

Wir erteilen daher dem Fehler Null noch die endliche Wahrscheinlichkeit

41) $$w_0 = 1 - k d.$$

Nun ist, da, wie schon hervorgehoben, bei dem Fehlergesetz φ_6 Fehler $> x_2$ wahrscheinlicher sind als bei dem ursprünglichen Fehlergesetz φ:

42) $$w_0 + \int_0^{x_2} \varphi_6(x)\, dx < \int_0^{x_2} \varphi(x)\, dx = h x_2\,.$$

Die Gleichung

43) $$w_0 + \int_0^x \varphi_6(x)\, dx = h x$$

oder

44) $$w_0 + k x = h x$$

hat daher eine Lösung

45) $$\xi = \frac{w_0}{h - k}, \text{ die } < x_2 \text{ ist.}$$

Hier ersetzen wir w_0 durch seinen Wert $1 - kd$ und beachten, daß nach (38)

46) $$k\,d^{m+1} = h\,a^{m+1}$$

ist, wodurch sich

$$w_0 = 1 - \frac{h\,a^{m+1}}{d^m} \text{ und}$$

47) $$\xi = \frac{1 - \frac{a^m}{d^m}}{\frac{1}{a} - \frac{a^m}{d^{m+1}}} = \frac{d^{m+1} - a^m d}{d^{m+1} - a^{m+1}}\,a\,.$$

a ist konstant $= k_m (m+1)^{\frac{1}{m}}$. d kann je nach der Wahl der Ausgangskurve $y = \varphi(x)$, die wir als verschieden von der S. 10 mit $y = \varphi_2(x)$ bezeichneten Kurve annahmen, verschieden ausfallen, ist aber wegen (46), und da $k < h$ ist, stets $> a$. Die auf der rechten Seite von (47) stehende Funktion von d wächst mit d; ξ nimmt daher seinen kleinst möglichen Wert, nämlich $a\,\frac{m}{m+1}$ für $d = a + 0$ an. Um so mehr ist die Wurzel x_1 der Gleichung (28) $> a\,\frac{m}{m+1}$, mithin $z(x_1) = h x_1 > a h\,\frac{m}{m+1}$, d. h. $z(x_1) > \frac{m}{m+1}$.

Während also für die S. 10 mit $y = \varphi_2(x)$ bezeichnete Fehlerkurve stets

48) $$x = k_m (m+1)^{\frac{1}{m}}\,z(x)$$

ist, ist für jede andere Fehlerkurve

49) $$x < k_m (m+1)^{\frac{1}{m}}\,z(x) = \frac{z(x)}{h},$$

so lange $z(x) < \frac{m}{m+1}$ ist. Damit ist (8) bewiesen.

Da die Kurve $C_1 : y = \varphi(x)$, auch das vertikale Stück der Kurve C_2 durchsetzt, ist $z(a) < a h\,(=1)$, also nach (49) $z(a) > \frac{m}{m+1}$. Somit gilt folgender Satz:

$\int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$, wo $a = k_m(m+1)^{\frac{1}{m}}$ ist, falls $\varphi(x)$ mit $\varphi_2(x)$ zusammenfällt, $= 0$, sonst stets > 0, aber $< \frac{1}{m+1}$.

Die hier angegebene obere Schranke $\frac{1}{m+1}$ läßt sich noch verbessern; die genaue obere Grenze ist

$$\frac{1}{m}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1}. \tag{50}$$

Will man nämlich durch Variation von $\varphi(x)$ unter Festhaltung des Moments K_m den Integralwert $\int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$ vergrößern, so wird man zunächst (genau wie S. 12 geschehen, nur daß jetzt a an Stelle von x_2 tritt) k' und b' so bestimmen, daß

$$(b'-a)\,k' = \int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx \tag{51}$$

und

$$k'\int\limits_a^{b'} x^m\,dx = \int\limits_a^\infty x^m\,\varphi(x)\,dx \tag{52}$$

wird. Sodann wird man $d' > b'$ so bestimmen, daß

$$k'\int\limits_0^{d'} x^m\,dx = \int\limits_0^\infty x^m\,\varphi(x)\,dx \tag{53}$$

wird; dann wird, falls man $\bar\varphi(x)$ durch die Gleichungen

$$\begin{cases} \bar\varphi(x) = k' & \text{für } 0 < x < d', \\ \bar\varphi(x) = 0 & \text{für } x > d' \end{cases} \tag{54}$$

definiert,

$$\begin{aligned} \int\limits_a^\infty \bar\varphi(x)\,dx &= (d'-a)\,k' \\ &> \int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx. \end{aligned} \tag{55}$$

Da nach (53):

56) $$k' d'^{m+1} = h a^{m+1} = a^m,$$

57) $$k' = \frac{a^m}{d'^{m+1}}$$

ist, kann man diese Beziehung (55) auch so schreiben:

58) $$\int_a^\infty \varphi(x)\, dx \leqq a^m \frac{d' - a}{d'^{m+1}} \qquad (d' > a).$$

Die rechte Seite nimmt für $d' = a\frac{m+1}{m}$ ihren größten Wert $\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1}\frac{1}{m}$ an; es ist also für jede Fehlerfunktion $\varphi(x)$:

59) $$\int_a^\infty \varphi(x)\, dx \leqq \frac{1}{m}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1}$$

und das Gleichheitszeichen gilt hier nur für eine bestimmte stufenförmige Fehlerkurve $y = \varphi(x)$ mit $w_0 > 0$; damit ist (50) als genaue obere Grenze nachgewiesen.

Ist x_0 ein beliebiger Wert, für den $z(x_0) < 1$ ist, so ersetze man, wie nun schon mehrfach geschehen, die Kurve $y = \varphi(x)$ rechts von $x = x_0$ unter Festhaltung des Moments K_m und des Flächeninhalts $K_0 = \int_0^\infty \varphi(x)\, dx = 1$ durch eine Stufe der Höhe k'' und der Länge $b'' - x_0$; dann ist also

60) $$(b'' - x_0)\, k'' = 1 - z(x_0)$$

Das Moment

61) $$k'' \int_0^{b''} x^m\, dx$$

wird dann sicher $\leqq K_m$; hier substituieren wir aus (60) den Wert

62) $$k'' = \frac{1 - z(x_0)}{b'' - x_0}$$

und erhalten, wenn wir noch βx_0 für b'' schreiben,

63) $$\frac{[1-z(x_0)]\, x_0^m \beta^{m+1}}{\beta-1} < (m+1) K_m .$$

Die linke Seite nimmt für $\beta = \frac{m+1}{m}$ ihren kleinsten Wert an und es ist also um so mehr

64) $$x_0 < \frac{m k_m}{(m+1)(1-z(x_0))^{\frac{1}{m}}}.$$

Damit ist Ungleichung (9) bewiesen und zwar ohne einschränkende Nebenbedingung bezüglich $z(x_0)$; doch gibt (8), falls $z(x_0) < \frac{m}{m+1}$, eine bessere Abschätzung.

Wir haben noch den Beweis des Hilfssatzes I von S. 11 nachzutragen und beweisen zu dessen Vorbereitung zunächst drei andere Hilfssätze.

Hilfssatz II (Verallgemeinerung der Descartesschen Zeichenregel): Sind

65) $$a_0 > a_1 > \cdots > a_r$$

reelle Exponenten und $A_0, A_1, \ldots A_r$ reelle von Null verschiedene Koeffizienten, so hat der $(r+1)$gliedrige Ausdruck

66) $$f(x) = A_0 x^{a_0} + A_1 x^{a_1} + \cdots + A_r x^{a_r}$$

höchstens so viele positive Nullstellen, als in der Folge $A_0, A_1, \ldots A_r$ Zeichenwechsel vorkommen.

Die Anzahl dieser Wechsel sei $w\,(\leq r)$; p sei die Anzahl der positiven Nullstellen der Funktion (66). Aus $w = 0$ folgt selbstverständlich $p = 0$. Wir nehmen daher $w > 0$ an und zeigen, daß dann die weitere Annahme $p > w$ auf einen Widerspruch führt.

Es seien etwa die Koeffizienten A_k und A_{k+1} verschieden bezeichnet; wählt man dann den Exponenten μ so, daß jede der Summen $a_0 + \mu,\ a_1 + \mu, \ldots a_k + \mu$ positiv, dagegen jede der Summen $a_{k+1} + \mu,\ a_{k+2} + \mu, \ \ldots\ a_r + \mu$ negativ wird, so hat der $(r+1)$ gliedrige Ausdruck

$$67)\qquad f_1(x) = \frac{d\,x^\mu f(x)}{d\,x} = B_0 x^{\beta_0} + B_1 x^{\beta_1} + \cdots B_r x^{\beta_r}$$

mindestens $p - 1$ positive Nullstellen; die Folge $B_0, B_1, \ldots B_r$ dagegen hat (falls wieder die Anordnung $\beta_0 > \beta_1 > \cdots > \beta_r$ hergestellt wurde) genau $w - 1$ Zeichenwechsel. So wie $f_1(x)$ aus $f(x)$ gebildet wurde, kann man, wenn $w - 1 > 0$ ist, aus $f_1(x)$ einen $(r+1)$ gliedrigen Ausdruck $f_2(x)$ bilden, der mindestens $p - 2$ positive Nullstellen besitzt und genau $w - 2$ Zeichenwechsel in seinen Koeffizienten aufweist. Schließlich käme man so zu einem Ausdruck $f_w(x)$ mit der positiven Anzahl $(p - w)$ oder einer größeren Anzahl positiver Nullstellen, aber mit lauter gleichbezeichneten Koeffizienten, was unmöglich ist.

Wir benutzen nachher nur folgenden besonderen Fall des Hilfssatzes II:

Die Funktion (66) hat höchstens r positive Nullstellen.

Auf Grund dieses Satzes ergibt sich leicht der folgende

Hilfssatz III: Sind $x_1, x_2, \ldots x_r$ r gegebene voneinander verschiedene positive Zahlen und gilt (65), so kann man in eindeutiger Weise für $A_1, A_2, \ldots A_r$ reelle von Null verschiedene Zahlen finden, der Art, daß

$$68)\qquad f(x) = x^{\alpha_0} + A_1 x^{\alpha_1} + \cdots + A_r x^{\alpha_r}$$

für $x = x_1, x_2, \ldots x_r$ verschwindet.

Löst man nämlich die r linearen Gleichungen

$$69)\qquad 0 = x_i^{\alpha_0} + A_1 x_i^{\alpha_1} + \cdots + A_r x_i^{\alpha_r}$$

$(i = 1, 2, \ldots r)$ nach $A_1, A_2, \ldots A_r$ auf, so erhält man die A_s als Quotienten von Determinanten, deren keine einzige, wie leicht zu zeigen ist, verschwindet. Denn faßt man irgend eine dieser Determinanten als Funktion $F(x_1)$ der für einen Augenblick als veränderlich zu denkenden Größe x_1 auf, so verschwindet die r gliedrige Funktion $F(x_1)$ an der $r - 1$ Stellen $x_1 = x_2, x_3, \ldots x_r$, kann also nach Hilfssatz II nicht verschwinden, wenn x_1, so wie es nach Voraussetzung geschehen soll, einen von $x_2, x_3, \ldots x_r$ verschiedenen Wert annimmt, es sei denn, daß $F(x_1)$ identisch verschwindet, d. h. daß alle Koeffizienten von $F(x_1)$ Null sind. Das würde aber besagen, daß gewisse $(r-1)$ gliedrige Ausdrücke für mehr als $r-2$ Werte also identisch verschwinden. Schließlich käme man zu dem Widerspruch, daß eingliedrige Ausdrücke wie $x_r^{\alpha_k}$ verschwinden.

Endlich beweisen wir noch den

Hilfssatz IV: Hat die $(r+1)$ gliedrige Funktion (66) r positive Nullstellen, so wechselt sie jedesmal das Vorzeichen, wenn x durch eine dieser Nullstellen hindurchgeht. (Es wäre leicht, noch etwas allgemeiner zu zeigen, daß jede dieser r Nullstellen eine einfache sein muß und daß in der Aussage des Hilfssatzes II die Nullstellen mit ihrer Multiplizität gezählt werden dürfen.)

Es ist erlaubt, beim Beweise außer der Voraussetzung (65) noch die zu machen, daß $\alpha_0 = 0$ ist, weil man ja $f(x)$ andernfalls durch $f(x)\,x^{-\alpha_0}$ ersetzen dürfte. Hätte dann aber die Funktion $f(x)$ unter ihren r Nullstellen auch nur eine ohne Zeichenwechsel, so hätte die r gliedrige Funktion $f'(x)$ mindestens r Nullstellen im Widerspruch mit Hilfssatz II.

Den Hilfssatz I von S. 11 können wir auch so fassen:

Hat die Funktion $\psi(x)$ nicht mehr als r verschiedene positive Nullstellen mit Zeichenwechsel: $x_1, x_2, \ldots, x_r$, so kann die Funktion

$$F(a) = \int_0^\infty \psi(x)\, x^a\, dx \tag{70}$$

nicht $r+1$ verschiedene Nullstellen $a_0, a_1, \ldots a_r$ besitzen. Wäre dies nämlich doch der Fall, so wäre auch

$$\int_0^\infty \psi(x)\,(x^{a_0} + A_1 x^{a_1} + \cdots + A_r x^{a_r})\, dx = 0, \tag{71}$$

mit willkürlichen Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots A_r$. Wählt man diese aber nach Hilfssatz III so, daß $x^{a_0} + A_1 x^{a_1} + \cdots + A_r x^{a_r} = 0$ wird für $x = x_1, x_2, \ldots x_r$, so hat nach Hilfssatz IV die Funktion $\psi(x)\,(x^{\alpha_0} + A_1\, x^{\alpha_1} + \cdots + A_r\, x^{\alpha_r})$ für alle positiven x einerlei Vorzeichen und daher ist Gleichung (71) unmöglich.

Mittels des im Vorstehenden auseinander gesetzten Beweisverfahrens lassen sich noch zahlreiche zum gleichen Gedankenkreis gehörige Sätze ableiten, welche die Kenntnis mehrerer Momente K voraussetzen und auf Grund dieser Kenntnis Beschränkungen des Verlaufs der Kurve $y = \varphi(x)$ oder der Werte der übrigen Momente K_ρ behaupten. Ich erwähne als Beispiel den folgenden: es ist, falls $l < m < n$:

72) $$[(n+1)\,K_n]^{l-m}\,[(m+1)\,K_m]^{n-l}\,[(l+1)\,K_l]^{m-n} \leqq 1;$$

für $l = 0$ geht diese Formel in (11) über.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1922

Band/Volume: 1922

Autor(en)/Author(s): Faber Georg

Artikel/Article: Bemerkungen zu Sätzen der Gaußschen theoria combinationis observationum 7-21