Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1922
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Neue Bemerkungen zur Kirchhoffschen Analogie zwischen Kreisel und elastischer Linie.

Von Ludwig Föppl in Dresden.

Vorgelegt von A. Föppl in der Sitzung am 4. Februar 1922.

Kirchhoff[1]) hat eine bemerkenswerte Analogie zwischen der Bewegung eines Kreisels, d. h. eines nur in einem Punkte festgehaltenen starren Körpers, und der Gleichgewichtsfigur eines sehr dünnen, nur an den Enden durch Kräfte oder Kräftepaare beanspruchten elastischen Stabes gefunden. Sie drückt sich mathematisch durch die Übereinstimmung der Differentialgleichungen für beide Probleme aus. Im Anschluß an Kirchhoff hat vor allen Dingen W. Heß[2]) die Analogie vom mathematischen Standpunkt aus eingehend behandelt. Die Resultate der vorliegenden Arbeit sind zum Teil in den Heßschen Abhandlungen schon enthalten, werden aber durchweg auf viel einfacherem und anschaulicherem Weg gewonnen. Die vektoranalytische Darstellung sowohl der Kreiselbewegung wie der Gleichgewichtslage des elastischen Stabes, die hier gewählt worden ist, läßt die Analogie beider Probleme in durchsichtiger Weise hervortreten und zugleich ihre Ausdehnung auf elastische Stäbe von ursprünglicher Krümmung erkennen. Da in den letzten Jahrzehnten die Kreiselbewegung durch Einführung des Impulsvektors oder Dralles eine so wertvolle Dar-

1) G. Kirchhoff, J. f. Math. 56 (1858), S. 285 oder „Mechanik", S. 418.

2) W. Heß, Sitzungsberichte d. bayer. Akademie d. Wissenschaften 1883, S. 82—110 und Math. Annalen 23 (1884), S. 181—212 und 25 (1885), S. 1—38.

stellung gefunden hat, die sich auch in Kreisen der Ingenieure eingebürgert hat[1]), so durfte eine neue Beschäftigung mit der Kirchhoffschen Analogie lohnend erscheinen, umsomehr, als auch auf der anderen Seite unsere Kenntnisse über Knick- und Kipperscheinungen des elastisches Stabes in den vergangenen Jahrzehnten eine lebhafte Weiterentwicklung erfahren haben. Die Analogieschlüsse, die aus der Dauer der Präzessionsbewegung mühelos die kritische Knick- oder Kippbelastung zu berechnen gestattet, dürfte der wertvollste Teil der vorliegenden Arbeit sein, da diese Fragestellung in den älteren Arbeiten nicht herausgearbeitet worden ist.

§ I. Die Analogie zwischen Kreisel und elastischer Linie in vektorieller Darstellung.

Für die Kreiselbewegung ist der Impulsvektor oder Drall, den wir mit $\mathfrak{B}$ bezeichnen wollen, von ausschlaggebender Bedeutung. Denken wir uns sowohl den Drall wie die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ auf die drei Hauptachsen des Körpers für den festgehaltenen Punkt projiziert, so gilt bekanntlich[2])

$$B_1 = u_1 \Theta_1; \quad B_2 = u_2 \Theta_2; \quad B_3 = u_3 \Theta_3, \tag{1}$$

wenn mit Θ_1, Θ_2, Θ_3 die Trägheitsmomente für die drei Hauptachsen bezeichnet werden. Wir nehmen an, daß der Schwerpunkt des Kreisels im Abstand 1 vom Unterstützungspunkt auf der Hauptachse mit dem Trägheitsmoment Θ_3 gelegen ist. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{s}$ den Einheitsvektor vom festen Punkt zum Schwerpunkt und mit $\mathfrak{P}$ das im Schwerpunkt angreifende Gewicht, so ist das statische Moment von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf den festgehaltenen Punkt als Momentenpunkt durch den Vektor $[\mathfrak{P}\mathfrak{s}]$ gegeben und es gilt die Beziehung

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = [\mathfrak{P}\mathfrak{s}].$$

---

[1]) Vor allen Dingen durch Klein-Sommerfeld, „Theorie des Kreisels", sowie durch A. Föppl, „Vorlesungen über technische Mechanik", Bd. IV.

[2]) s. A. Föppl, „Vorlesungen über techn. Mechanik", Bd. IV, § 25.

Diese Gleichung gilt aber nur für ein im Raum ruhendes Koordinatensystem. Beziehen wir dagegen den Drall auf das im Körper feste Hauptachsensystem, so ist zu beachten, daß sich für einen relativ zum Körper ruhenden Beobachter der umgebende Raum mit der Winkelgeschwindigkeit $-\mathfrak{u}$ dreht und demnach der Endpunkt des Dralles infolge dieser Drehung des Koordinatensystems sich mit der Geschwindigkeit $[\mathfrak{u}\mathfrak{B}]$ fortbewegt[1]). Auf das im Körper feste Hauptachsensystem bezogen, geht folglich die letzte Gleichung über in

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = [\mathfrak{u}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{P}\mathfrak{s}]. \tag{2}$$

Schreiben wir diese Vektorgleichung in drei Koordinatengleichungen für die drei Hauptachsen des Kreisels um, so ist zu beachten, daß die äußere Kraft $\mathfrak{P}$ im Abstand 1 auf der dritten Hauptachse angreift und folglich

$$[\mathfrak{P}\mathfrak{s}] = \begin{vmatrix} i & P_1 & 0 \\ j & P_2 & 0 \\ \mathfrak{k} & P_3 & 1 \end{vmatrix} = i P_2 - j P_1$$

ist. Die Gleichung für die erste Hauptachse lautet demnach:

$$\frac{dB_1}{dt} = u_2 B_3 - u_3 B_2 + P_2,$$

oder:

$$\Theta_1 \frac{du_1}{dt} = u_2 u_3 (\Theta_3 - \Theta_2) + P_2.$$

Entsprechend findet man die beiden anderen Gleichungen für die zweite und dritte Hauptachse, so daß wir statt (Gl. 1) in Koordinatendarstellung schreiben können:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1 \frac{du_1}{dt} &= u_2 u_3 (\Theta_3 - \Theta_2) + P_2, \\ \Theta_2 \frac{du_2}{dt} &= u_3 u_1 (\Theta_1 - \Theta_3) - P_1, \\ \Theta_3 \frac{du_3}{dt} &= u_1 u_2 (\Theta_2 - \Theta_1). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[1]) Wegen Vorzeichen s. A. Föppl, „Vorlesungen", Bd. I, § 20.

Mit $P_1 = P_2 = 0$ folgen hieraus die Eulerschen Gleichungen für den kräftefreien Kreisel.

Wir wollen nun eine ganz entsprechende Ableitung für die Differentialgleichung der elastischen Linie eines ursprünglich geraden, sehr schlanken zylindrischen Stabes geben, der nur an den Enden durch Einzellasten $\mathfrak{P}$ und Momente $\mathfrak{M}_0$ beansprucht wird. Die ursprünglich gerade Linie, die die Stabachse darstellt, wird nach der Belastung des Stabes im allgemeinen in eine räumliche Kurve übergehen. Die maßgebenden Krümmungen und die Verwindung der elastischen Linie wird zweckmäßig mit Hilfe eines rechtwinkligen Koordinatensystems gemessen, dessen Anfangspunkt mit einem Punkt der elastischen Linie zusammenfällt und dessen Achsen 1 und 2 in die beiden Hauptrichtungen des Querschnitts fallen, während die dritte Achse mit der Tangente an die elastische Linie übereinstimmt. Läßt man den Anfangspunkt dieses Koordinatensystems die ganze elastische Linie mit gleich bleibender Geschwindigkeit durchlaufen, so daß in gleichen Zeitelementen dt gleiche Wegelemente ds auf der elastischen Linie zurückgelegt werden, so geben die Winkelgeschwindigkeiten u_1, u_2, u_3, mit denen sich die Hauptachsen drehen, ein Maß für die Krümmungen bzw. Verwindung des Stabes. Bezeichnen wir mit $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die Krümmungen der elastischen Linie, die man bei ihrer Projektion auf die durch die Hauptachsen 2 und 3 bezw. 1 und 3 bestimmten Ebenen erhält, und wird mit τ die Verwindung des Stabes bezeichnet, so kann man setzen:

$$u_1 = \varkappa_1; \quad u_2 = \varkappa_2; \quad u_3 = \tau, \tag{4}$$

worin der Dimensionsfaktor, der eigentlich noch nötig wäre, der Einfachheit halber weggelassen ist. Dem Koordinatensystem, das sich längs der elastischen Linie in der oben angegebenen Weise bewegt, entspricht beim Kreisel das im Kreisel feste Koordinatensystem, so daß sich die Hauptachsen in beiden Fällen entsprechen und die Winkelgeschwindigkeiten und Krümmungen ineinander übergehen, wie es durch die letzten Gleichungen zum Ausdruck gebracht ist. Wie beim Kreisel der

Drall von maßgebender Bedeutung ist, so gilt dies in gleicher Weise beim Stab für das in jedem Querschnitt übertragene Moment. Projiziert man den Momentenvektor $\mathfrak{M}$ nach den drei Hauptachsen und bezeichnet die Projektionen mit M_1, M_2, M_3, so sind die beiden ersteren Komponenten die Biegungsmomente um die beiden Hauptachsen, während M_3 das Torsionsmoment für den Querschnitt angibt. Bei sehr dünnen Stäben bestehen zwischen den Momenten und den dadurch hervorgerufenen Krümmungen des ursprünglich geraden Stabes die erweiterten Hookeschen Gleichungen:

$$M_1 = C_1 \varkappa_1; \quad M_2 = C_2 \varkappa_2; \quad M_3 = C_3 \tau, \tag{5}$$

die unmittelbar den Gl. (1) entsprechen, wenn man die Gl. (4) beachtet und die Trägheitsmomente der Kreiselachsen Θ_1 und Θ_2 den Biegungssteifigkeiten $C_1 = EJ_1$ und $C_2 = EJ_2$ des Stabes entsprechen läßt, während das Trägheitsmoment Θ_3 der Torsionssteifigkeit $C_3 = GJ$ entspricht. Dabei sind der Elastizitätsmodul E und der Schubelastizitätsmodul G als gegebene konstante Größen anzusehen, ebenso wie die Hauptträgheitsmomente des Querschnitts J_1 und J_2 und der Drillungswiderstand J des Querschnitts gegebene konstante Größen sein sollen.

Wirkt an dem Stabende außer einem Moment $\mathfrak{M}_0$ auch noch eine Kraft, die wir mit $-\mathfrak{P}$ bezeichnen wollen, so wird in jedem Querschnitt außer dem Moment $\mathfrak{M}$ die Kraft $\mathfrak{P}$ übertragen werden müssen. Das Moment ändert sich infolgedessen beim Fortschreiten längs der Stabmittellinie um

$$\frac{d\mathfrak{M}}{ds} = [\mathfrak{P}\mathfrak{s}],$$

wenn $\mathfrak{s}$ einen Einheitsvektor in Richtung der Tangente an die elastische Linie bedeutet. Bezieht man diese Gleichung auf das oben angegebene, längs der elastischen Linie mit konstanter Geschwindigkeit wandernde Koordinatensystem, das sich jeweils mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ gegen den Raum dreht, so nimmt die letzte Gleichung die Form an:

$$\frac{d\mathfrak{M}}{ds} = [\mathfrak{u}\,\mathfrak{M}] + [\mathfrak{P}\,\mathfrak{s}]. \tag{6}$$

Man sieht unmittelbar die Übereinstimmung mit Gl. (2) für die Kreiselbewegung. In dieser Übereinstimmung besteht die Analogie zwischen der Kreiselbewegung und der Gleichgewichtsfigur des elastischen Stabes, der an den Enden beansprucht wird. Greift an den Stabenden keine Einzelkraft, sondern nur je ein Kräftepaar an, so fehlt in Gl. (6) das zweite Vektorprodukt, so daß einem derart beanspruchten Stab als kinetische Analogie der kräftefreie bzw. im Schwerpunkt unterstützte Kreisel entspricht.

Der Übergang von der Vektorgleichung (6) zu den Koordinatengleichungen erfolgt ebenso, wie wir beim Kreiselproblem aus Gl. (2) die Koordinatengleichungen (3) erhalten haben. Das Resultat ist in Übereinstimmung mit den Gl. (3) folgendes:

$$\left.\begin{aligned} C_1 \cdot \frac{d\varkappa_1}{ds} &= \varkappa_2\,\tau\,(C_3 - C_2) + P_2, \\ C_2 \cdot \frac{d\varkappa_2}{ds} &= \tau\,\varkappa_1\,(C_1 - C_3) - P_1, \\ C_3 \cdot \frac{d\tau}{ds} &= \varkappa_1\,\varkappa_2\,(C_2 - C_1). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Die Analogie zwischen dem Kreisel und dem ursprünglich geraden, nur an den Enden beanspruchten Stab läßt sich demnach folgendermaßen zusammenfassen: Dem im Kreisel festen Hauptachsen-Koordinatensystem für den festgehaltenen Punkt entspricht das dazu stets parallele, nach Tangente und Querschnittshauptachsen orientierte Koordinatensystem beim Stab, das mit gleich bleibender Geschwindigkeit der elastischen Linie entlang gleitet. Der Trägheitshauptachse, in der im Abstand 1 vom festen Punkt der Schwerpunkt des Kreisels gelegen ist, entspricht die Tangente an die elastische Linie beim Stab; ferner dem Gewicht des Kreisels die Last am Stabende. Jeder Kreiselbewegung läßt sich eine entsprechende Gleichgewichtslage eines elastischen Stabes zuordnen.

Mit Hilfe der angestellten Überlegungen kann man auch leicht die Frage entscheiden, ob die Analogie auch auf den Fall übertragen werden kann, daß der Stab ursprünglich nicht gerade war, wie oben stets angenommen worden ist, sondern im natürlichen Zustand schon eine Krümmung besessen hat. Gl. (6) muß auch in diesem Fall noch Gültigkeit behalten; dagegen ändern sich die Gl. (5), da die Komponenten des Momentenvektors $\mathfrak{M}$ proportional den Krümmungsänderungen zu setzen sind. Bezeichnen wir die Krümmungen und die Verwindung des unbelasteten Stabes mit $\varkappa_1'$, $\varkappa_2'$ und τ', so müssen die Gl. (5) hier folgendermaßen lauten:

$$M_1 = C_1(\varkappa_1 - \varkappa_1'); \quad M_2 = C_2(\varkappa_2 - \varkappa_2'); \quad M_3 = C_3(\tau - \tau'). \qquad (8)$$

Es ist zweckmäßig, das Moment $\mathfrak{M}$, entsprechend der Zerlegung seiner drei Komponenten, in zwei Einzelmomente zu spalten:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}',$$

deren Bedeutung ohne weiteres aus den Gl. (8) ersichtlich ist. Lassen wir die Gl. (4) zwischen den Krümmungen und Winkelgeschwindigkeiten bestehen, so entspricht dem Moment $\mathfrak{M}''$ der Drall $\mathfrak{B}$ des Kreisels, und man sieht ferner, daß bei verschwindendem Moment, d. h. $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}'$ der Drall ebenso wie $\mathfrak{M}''$ nicht verschwindet, sondern einen Wert $\mathfrak{B}_0$ besitzt, der durch die anfängliche Krümmung des elastischen Stabes bestimmt ist und dem fingierten Moment $\mathfrak{M}'$ entspricht. Gl. (6), die wir folgendermaßen schreiben:

$$\frac{d}{ds}(\mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}') = [\mathfrak{u} \cdot (\mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}')] + [\mathfrak{P}\,\mathfrak{s}],$$

entspricht demnach eine Kreiselgleichung von folgender Form:

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0) = [\mathfrak{u} \cdot (\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0)] + [\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{s}].$$

Da wir aber gesehen haben, daß $\mathfrak{B}$ schon allein den zeitlich veränderlichen Drall bedeutet, so muß $\frac{d\,\mathfrak{B}_0}{d\,t} = 0$ sein oder $\mathfrak{B}_0 = \text{const}$ und, damit die Analogie möglich ist,

$$\mathfrak{M}' = \text{const}; \text{ d. h. } \varkappa_1' = \text{const}; \ \varkappa_2' = \text{const}; \ \tau' = \text{const}.$$

Wir sehen demnach, daß eine Analogie zwischen einem Kreisel und einem ursprünglich krummen, elastischen Stab nur besteht, wenn die Anfangskrümmung über die ganze Länge des Stabes hin konstant war; also z. B. bei einem Stab von ursprünglich kreisförmiger oder schraubenförmiger Gestalt. Die letzte Kreiselgleichung zeigt ferner, daß $\mathfrak{B}$ der Drall des eigentlichen Kreisels ist, auf dem ein Schwungrad so angebracht zu denken ist, daß sein Schwerpunkt mit dem festgehaltenen Punkt des eigentlichen Kreisels zusammenfällt und das sich relativ zum Kreisel mit konstanter Geschwindigkeit dreht, so daß sein Drall, vom kreiselfesten Koordinatensystem aus gesehen, den konstanten Wert $\mathfrak{B}_0$ besitzt. Dem Anfangszustand des elastischen Stabes entspricht demnach das gleichförmig rotierende Schwungrad mit dem Drall $\mathfrak{B}_0$, der seinerseits an Stelle des fingierten Momentes $\mathfrak{M}'$ beim elastischen Stab tritt.

§ 2. Die Analogie zum kräftefreien Kreisel.

Die Gleichungen, die für die Bewegung eines im Schwerpunkt unterstützten Kreisels gelten, werden aus den Gl. (2) bzw. (3) erhalten, indem man $\mathfrak{P} = 0$ bzw. $P_1 = P_2 = 0$ setzt. Ihnen entsprechen die Gl. (6) bzw. (7) mit $\mathfrak{P} = 0$ bzw. $P_1 = P_2 = 0$ beim elastischen Stab; d. h. ein nur durch Momente $\mathfrak{M}_0$ bzw. $-\mathfrak{M}_0$ an den beiden Stabenden beanspruchter elastischer Stab, der ursprünglich gerade und von zylindrischer Gestalt war.

Die einfachsten Bewegungen eines kräftefreien Kreisels sind die Drehbewegungen um eine der drei Hauptachsen mit konstanter Geschwindigkeit. Dabei bleiben jedesmal die beiden anderen Hauptachsen in der gleichen Ebene. Das Analogon beim Stab ist die Biegung durch Endmomente um die eine oder andere Hauptachse bzw. die Beanspruchung auf Torsion, entsprechend der Rotation des Kreisels um die dritte Hauptachse. Besitzt der Kreisel insbesondere Rotationssymmetrie um die dritte Hauptachse, so daß $\Theta_1 = \Theta_2$ ist, so besitzt der zugehörige Stab einen kreis- oder kreisringförmigen Querschnitt, so daß die Biegungssteifigkeiten für alle Richtungen einander gleich sind, d. h. $C_1 = C_2$.

Da die Differentialgleichungen für die Kreiselbewegung und den elastischen Stab formal vollkommen übereinstimmen, so müssen sich auch die Stabilitätsbedingungen für eine Gleichgewichtslage des elastischen Stabes formal durch dieselbe Beziehung beim Kreisel ausdrücken lassen. Wir wollen mit dem symmetrischen kräftefreien Kreisel beginnen, der um die dritte Hauptachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert. Ihm entspricht ein auf Torsion beanspruchter zylindrischer Stab von kreissymmetrischem Querschnitt $C_1 = C_2$. Bekanntlich[1]) ist ein solcher sehr dünner langer Stab nicht mehr im stabilen Gleichgewicht, wenn das Torsionsmoment der Bedingung genügt:

$$M = 2\pi \frac{C_1}{l}, \tag{9}$$

worin $C_1 = C_2 = EJ_1$ die Biegungssteifigkeit des Stabes und l seine Länge bedeuten. Die Mittellinie des Stabes nimmt die Gestalt einer Schraubenlinie an, und zwar ist l die Länge der Schraubenlinie für einen Schraubengang.

Um das kinetische Analogon zu der neuen Gleichgewichtslage, in die der ursprünglich zylindrische Stab bei dem durch Gl. (9) bestimmten Torsionsmoment M übergeht, zu finden, erinnern wir uns an die in Nr. 1 angegebenen Beziehungen zwischen den beiden Hauptkoordinaten-Systemen beim Kreisel und beim elastischen Stab, die einander stets parallel sind. Daraus ergibt sich sofort, daß der kräftefreie symmetrische Kreisel eine Präzessionsbewegung ausführt, und zwar entspricht der Länge l des Stabes, die zu einem vollen Schraubengang gehört, die Dauer T einer vollen Präzession. Man kann demnach auf die verhältnismäßig umständliche Ableitung von Gl. (9) verzichten, wenn man sie aus der altbekannten Beziehung[2]) für die Präzessionsdauer des symmetrischen kräftefreien Kreisels:

---

[1]) A. Föppl, „Vorlesungen“, Bd. V, § 34.

[2]) s. Klein-Sommerfeld, „Theorie d. Kreisels“, S. 152, oder R. Grammel, „Der Kreisel“, S. 42.

$$T = 2\pi \frac{\Theta_1}{B} \tag{10}$$

ableitet, indem man die entsprechenden Größen für den elastischen Stab einsetzt, woraus sofort Gl. (9) folgt.

Es lassen sich aber auch noch weitere Resultate aus der Übereinstimmung der Gl. (9) und (10) ableiten. Die Dauer der Präzession ist nach Gl. (10) nicht von der Neigung der Figurenachse gegen die Richtung des Dralles, um die die Präzessionsbewegung verläuft, abhängig. Auf den elastischen Stab übertragen, bedeutet dies, daß Gl. (9) auch noch Gültigkeit behält, wenn die beiden Enden des einen vollen Schraubengang bildenden Stabes einander genähert werden, so daß die Ganghöhe der Schraubenlinie mehr und mehr abnimmt und schließlich die Stabmittellinie in einen vollen Kreis übergeht. Bei diesem Übergang bleibt das Endmoment $\mathfrak{M}$ nach Größe und Richtung konstant, ebenso wie der Drall $\mathfrak{B}$ bei der Kreiselbewegung; dabei geht $\mathfrak{M}$ von einem ursprünglich reinen Torsionsmoment schließlich zu einem reinen Biegungsmoment über, das dem zu einem vollen Kreis durch Endmomente verbogenen Stab entspricht. Daß die Größe dieses Biegungsmomentes sich auch noch nach Gl. (9) berechnet, sieht man ohne weiteres, da die Krümmung des Kreises $\varkappa = \frac{1}{r} = \frac{2\pi}{l}$ ist, woraus wegen $M = C_1 \varkappa$ sofort Gl. (9) folgt. Wir können daraus entnehmen, daß ein Stab von kreissymmetrischem Querschnitt durch dieselben Endmomente zu einem vollen Kreis verbogen wird, die als Torsionsmomente das Auskippen des Stabes bewirken. Ferner zeigen die obigen Überlegungen, daß der Übergang von dem ausgekippten Stab zum vollen Kreis durch lauter Gleichgewichtslagen mit indifferentem Gleichgewicht führt. Denn die Schraubenlinien, die zwischen den beiden Endlagen des geraden Stabes und des Vollkreises liegen, können ohne Arbeit der äußeren Kräfte ineinander übergehen, da die Momente an den beiden Enden des Schraubenganges stets gleich groß bleiben und ihre unveränderliche Richtung der Schraubenachse parallel verläuft, so daß sie beim Nähern oder Entfernen der beiden Stabenden keine Arbeit leisten.

In welcher Weise der Steigungswinkel $90^0 - \vartheta$ einer dieser Schraubenlinien mit der Verwindung τ zusammenhängt, geht aus folgender bekannten Beziehung der Kreiseltheorie hervor, durch die sich der Neigungswinkel ϑ der Figurenachse gegen die Drallrichtung berechnet:

$$\cos\vartheta = \frac{\Theta_3 u_3}{B}.$$

Umgeschrieben lautet diese Gleichung für den elastischen Stab:

$$\cos\vartheta = \frac{C_3\tau}{M} = \frac{C_3}{C_1}\cdot\frac{l}{2\pi}\cdot\tau, \tag{11}$$

in der die Grenzfälle der reinen Torsion ($\vartheta = 0$) und der reinen Biegung ($\vartheta = 90^0$) mit enthalten sind.

Wir wollen nun versuchen, die für den Stab mit kreissymmetrischem Querschnitt gewonnenen Resultate auf einen Stab von beliebigem Querschnitt, der auf Torsion beansprucht wird, zu übertragen. Zu dem Zweck gehen wir von dem entsprechenden Kreiselproblem aus. Dem geraden, auf Torsion beanspruchten Stab entspricht ein kräftefreier Kreisel, der um die Hauptachse mit dem Trägheitsmoment Θ_3 gleichmäßig rotiert. Wie oben, wird aus der Präzessionsbewegung dieses Kreisels, die durch das Abrollen des Poinsotellipsoids auf der unveränderlichen Ebene veranschaulicht wird, die Größe des kritischen Torsionsmomentes sich berechnen lassen. Nennen wir $\frac{d\psi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsbewegung um die im Raum unveränderliche Drallrichtung, so ist[1])

$$\frac{d\psi}{dt} = B\cdot\frac{\Theta_1 u_1^2 + \Theta_2 u_2^2}{B^2 - \Theta_3^2 u_3^2},$$

woraus die Präzessionsdauer T sich aus der folgenden Gleichung bestimmt:

---

[1]) Klein-Sommerfeld, S. 150, oder R. Grammel, „Der Kreisel“, S. 49.

$$2\pi = B \cdot \int_0^T \frac{\Theta_1 u_1^2 + \Theta_2 u_2^2}{B^2 - \Theta_3^2 u_3^2} dt. \tag{12}$$

Die entsprechende Gleichung für den Stab lautet:

$$2\pi = M \cdot \int_0^l \frac{C_1 \varkappa_1^2 + C_2 \varkappa_2^2}{M^2 - C_3^2 \tau^2} ds, \tag{13}$$

oder, indem man nach Gl. (5)

$$M^2 = C_1^2 \varkappa_1^2 + C_2^2 \varkappa_2^2 + C_3^2 \tau^2$$

einsetzt:

$$2\pi = M \cdot \int_0^l \frac{C_1 \varkappa_1^2 + C_2 \varkappa_2^2}{C_1^2 \varkappa_1^2 + C_2^2 \varkappa_2^2} ds. \tag{14}$$

Zunächst sieht man dieser allgemeinen Formel an, daß sie für den Fall der Kreissymmetrie des Querschnittes ($C_1 = C_2$) in Gl. (9) übergeht.

Wir wollen Gl. (14) für den Fall eines elliptischen oder rechteckigen Querschnittes anwenden, für den die Torsionssteifigkeit C_3 ihrer Größe nach zwischen den beiden Biegungssteifigkeiten C_1 und C_2 liegt, so daß die Ungleichung

$$C_1 > C_3 > C_2 \tag{15}$$

gilt, wofür wir beim elliptischen Querschnitt mit den beiden Hauptachsen $2b$ und $2a$ auch schreiben können:

$$E\frac{\pi a b^3}{4} > G\frac{\pi a b (a^2 + b^2)}{4} > E\frac{\pi b a^3}{4},$$

oder:
$$\frac{b^2}{a^2 + b^2} > \frac{G}{E} > \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

Diese Ungleichung besteht bei allen schlanken Ellipsen und, wie man sofort sieht, auch schon für das Verhältnis $\frac{b}{a} = 2$ der beiden Ellipsenachsen. Dieselbe Ungleichung (15) gilt für alle rechteckigen Querschnitte, die nicht zu nahe einem Quadrat sind.

Wir schreiben die entsprechende Beziehung für die Trägheitsmomente des kräftefreien Kreisels an:

$$\Theta_1 > \Theta_3 > \Theta_2 . \tag{16}$$

Der Torsion des Stabes entspricht die Rotation des Kreisels um die Hauptachse des mittleren Trägheitsmomentes Θ_3. Diese Rotation ist bekanntlich labil. Sie geht über in die in der Kreiseltheorie unter dem Namen der trennenden Polhodie bekannte Bewegung. Für sie läßt sich Gl. (12) vereinfachen, da in diesem Fall[1])

$$B^2 = 2\,\Theta_3\,T \text{ bzw. } M^2 = 2\,C_3\,A \tag{17}$$

gilt, wobei an Stelle der kinetischen Energie

$$T = \tfrac{1}{2}\,(\Theta_1\,u_1^2 + \Theta_2\,u_2^2 + \Theta_3\,u_3^2)$$

die spezifische Formänderungsarbeit

$$A = \tfrac{1}{2}\,(C_1\,\varkappa_1^2 + C_2\,\varkappa_2^2 + C_3\,\tau^2)$$

beim Stab getreten ist. Unter Benützung von Gl. (17) läßt sich das Integral in Gl. (13) zu $\dfrac{l}{C_3}$ auswerten, so daß sich in diesem Fall das kritische Torsionsmoment berechnet zu:

$$M = 2\,\pi\,\frac{C_3}{l}, \tag{18}$$

also entsprechend wie im Fall eines kreissymmetrischen Querschnittes nach Gl. (9), nur mit dem Unterschied, daß hier die Torsionssteifigkeit C_3, dort aber die Biegungssteifigkeit C_1 auftritt. Setzt man in Gl. (18) $M = C_3\,\tau$ ein, so ergibt sich $\tau\,l = 2\,\pi$, d. h. das kritische Torsionsmoment M ist gerade so groß, daß sich die beiden Endquerschnitte unter dem Winkel $2\,\pi$ gegeneinander verdrehen.

[1]) R. Grammel, „Der Kreisel", S. 51 ff.

§ 3. Die Analogie zum schweren symmetrischen Kreisel.

Die Analogie zwischen der Bewegung des schweren Kreisels und der Gleichgewichtsfigur eines nur an den Enden durch Momente und Einzelkräfte beanspruchten elastischen Drahtes ist schon in § 1 auf Grund der Übereinstimmung der Gl. (2) bzw. (3) mit den Gl. (6) bzw. (7) ausgesprochen worden. Beim schweren symmetrischen Kreisel sind die Trägheitsmomente Θ_1 und Θ_2 einander gleich und der Schwerpunkt liegt auf der Figurenachse mit dem Trägheitsmoment Θ_3 im Abstand 1 vom Unterstützungspunkt. Ihm entspricht ein elastischer Draht von kreissymmetrischem Querschnitt, dessen beide Enden entsprechend dem Gewicht des Kreisels durch gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte beansprucht werden, wozu noch Momente hinzutreten können. Das wesentlich Neue gegenüber den Untersuchungen von § 2 sind die Endkräfte, deren Richtung, wie die Analogie lehrt, mit der des Kreiselgewichtes übereinstimmt.

Der einfachste Fall einer Kreiselbewegung ist die eines Pendels. Betrachten wir zunächst eine ebene Pendelschwingung um eine Achse mit dem Trägheitsmoment $\Theta_1 = \Theta_2$. Wird der Ausschlag der Figurenachse gegen die Vertikale mit ϑ bezeichnet, so lautet die Differentialgleichung der Pendelschwingung:

$$\Theta_1 \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = - P \sin \vartheta . \tag{19}$$

Betrachtet man andererseits einen ursprünglich geraden Stab von der Biegungssteifigkeit C_1, der infolge eines achsialen Druckes P ausgeknickt ist und dessen Tangente mit der Lastrichtung jeweils den Winkel ϑ einschließt, so lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie:

$$C_1 \frac{d \vartheta}{d s} = - P y ,$$

wenn mit y der senkrechte Abstand eines Punktes der elastischen Linie von der Lastrichtung bezeichnet wird. Wegen $\frac{d y}{d s} = \sin \vartheta$ geht aus der letzten Gleichung durch Differentiation

$$C_1 \frac{d^2 \vartheta}{d s^2} = - P \sin \vartheta \tag{20}$$

hervor. Diese Gleichung stimmt aber mit der Schwingungsgleichung (19) formal vollkommen überein. Daraus folgt, daß die verschiedenen Formen der ebenen Elastica den ebenen Pendelschwingungen mit verschiedenen Ausschlägen entsprechen. Da die Richtung der Figurenachse des Pendels mit der Richtung der Tangente an die elastische Linie übereinstimmt, so entspricht der Dauer einer Halbschwingung des Pendels die Länge der elastischen Linie. Für sehr kleine Ausschläge ϑ kann man in Gl. (19) und (20) $\sin \vartheta$ durch ϑ angenähert ersetzen und dann ergibt sich durch einfache Rechnung der Wert der halben Schwingungsdauer zu

$$T = \pi \sqrt{\frac{\Theta_1}{P}},$$

woraus durch Übertragung auf den elastischen Stab die Eulersche Knicklast

$$P_{\varkappa} = \frac{\pi^2}{l^2} C_1$$

folgt. Diese Überlegungen sind schon in ähnlicher Form von Kirchhoff angestellt worden. Es ist klar, daß sie nicht auf den Fall eines symmetrischen Pendels beschränkt sind, sondern ebenso gelten, wenn der Körper um eine seiner beiden Hauptachsen mit den Trägheitsmomenten Θ_1 und Θ_2, die voneinander verschieden sein können, Schwingungen ausführt. Den beiden verschiedenen Schwingungen um diese beiden Hauptachsen entspricht beim elastischen Analogon der Stab mit den Biegungssteifigkeiten C_1 und C_2 in den Hauptrichtungen, der einmal in der einen Hauptebene, das andere Mal in der dazu senkrechten ausgeknickt ist. Von den beiden Möglichkeiten des Ausknickens ist jedoch nur die zur kleineren Biegungssteifigkeit gehörige stabil. Es liegt nahe, diese Überlegung auf das nur in einem Punkt gelagerte Pendel, das um eine der beiden Hauptachsen schwingt, zu übertragen. Diese Andeutungen mögen hier jedoch genügen, da uns ein weiteres Eingehen auf diese spezielle Frage zu weit abführen würde.

Die nach der ebenen Pendelbewegung nächst einfache Kreiselbewegung ist die eines Raumpendels. Hier tritt die vorausgesetzte Symmetrie des Kreisels sehr wesentlich in die Erscheinung. Eine mögliche Bewegungsform des symmetrischen Raumpendels ist die gleichförmige Bewegung irgend eines seiner Punkte auf einem Kreis um die Vertikale durch den Aufhängepunkt, so daß die Verbindungslinie vom Aufhängepunkt mit dem Schwerpunkt einen Kreiskegel von vertikaler Achse bei gleich bleibender Geschwindigkeit durchläuft. Dieser Bewegung muß ein ursprünglich gerader elastischer Draht entsprechen, dessen Mittellinie die Gestalt einer Schraubenlinie angenommen hat, wobei einem Umlauf des Pendels um die Vertikale durch den Aufhängepunkt ein voller Schraubengang entspricht. Der Drehvektor dieser Pendelbewegung liegt dauernd in der Vertikalen durch den festgehaltenen Punkt des Kreisels. Seine zeitlich konstante Größe, die sogenannte Präzessionsgeschwindigkeit, sei mit μ bezeichnet; dann berechnet sich μ zu[1])

$$\mu = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{P}{(\Theta_3 - \Theta_1)\cos\vartheta}},$$

worin P das Kreiselgewicht, das im Abstand 1 vom Aufhängepunkt auf der Figurenachse angreift und ϑ den halben Öffnungswinkel des von der Figurenachse beschriebenen Kegels bedeutet. Die entsprechende Formel für den zu einem vollen Schraubengang verbogenen Draht von kreissymmetrischem Querschnitt ($C_1 = C_2$) lautet:

$$\frac{2\pi}{l} = \sqrt{\frac{P}{(C_3 - C_1)\cos\vartheta}}.$$

Darin bedeutet l die Länge der Schraubenlinie, ϑ den Winkel der Tangente an die Schraubenlinie mit der Schraubenachse und P die Kraft an den Enden des Drahtes. Statt der letzten Gleichung kann man auch unter Einführen des Radius

[1]) R. Grammel, „Der Kreisel", S. 91.

$r = \frac{l}{2\pi} \sin \vartheta$ des Kreiszylinders, auf dem die Schraubenlinie liegt, schreiben:

$$P = \frac{\sin^2 \vartheta \cdot \cos \vartheta}{r^2} (C_3 - C_1). \tag{21}$$

Außer dieser Kraft, die an den Drahtenden parallel zur Schraubenachse wirkt, greifen Endmomente an. Man erkennt dies sofort aus dem entsprechenden Kreiselproblem: denn der Drall $\mathfrak{B}$ entspricht dem Moment. Da $\mathfrak{B}$ in der jeweiligen Vertikalebene durch die Figurenachse liegt, so bedeutet dies für das Moment beim Draht, daß der Vektor $\mathfrak{M}$ in der Tangentialebene an den zur Schraubenlinie gehörenden Kreiszylinder gelegen ist. Da der Drall $\mathfrak{B}$ die Komponenten $B_3 = \Theta_3 u_3 = \Theta_3 \mu \cos \vartheta$ in der Figurenachse und $B_{1,2} = \Theta_1 \mu \sin \vartheta$ in der dazu senkrechten Richtung besitzt, so sind die entsprechenden Momente $M_3 = C_3 \tau = C_3 \frac{\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta}{r}$ das Torsionsmoment und $M_{1,2} = C_1 \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{r}$ das Biegungsmoment. Berechnet man hieraus die Komponenten von $\mathfrak{M}$ parallel und senkrecht zur Schraubenachse, so ergibt sich für die Komponente des Momentes parallel zur Schraubenachse:

$$M_I = M_3 \cos \vartheta + M_{1,2} \sin \vartheta = \frac{\sin \vartheta}{r} (C_1 \sin^2 \vartheta + C_3 \cos^2 \vartheta) \tag{22}$$

und für die Komponente senkrecht zur Schraubenachse wegen Gl. (21)

$$M_{II} = M_3 \sin \vartheta - M_{1,2} \cos \vartheta = P \cdot r, \tag{23}$$

so daß die an den Drahtenden wirkenden Kräfte und Momente auf je eine Kraftschraube zurückgeführt sind, deren Achse mit der Achse der Schraubenlinie, in die der Stab verbogen wird, übereinstimmt.

Für $\vartheta = 90^0$ geht die Schraubenlinie in einen Kreis vom Radius $r = \frac{l}{2\pi}$ über, der nur durch das Endmoment $M_I = \frac{C_1}{r}$ verbogen ist, während P und M_{II} verschwinden.

In dem Fall, daß die Endkraft P verschwindet und nur Endmomente wirken, kommen wir auf die Untersuchungen von § 2 zurück. Dort ergab sich, daß der ursprünglich gerade Stab von seiner geraden Gestalt in eine beliebige Schraubenlinie und schließlich in den Kreis bei konstantem Momentenvektor übergeführt werden konnte. Hier, wo auch noch Endkräfte P angenommen sind, entsprechen den verschiedenen Schraubenlinien, in die der ursprünglich gerade Stab übergehen kann, verschiedene Endkräfte P und Endmomente M, die gemäß den Gl. (21) bis (23) von der Neigung der Schraubenlinie abhängen.

Um die Werte von P und M zu bestimmen, die für den geraden Stab kritisch sind und ihn labil machen, setzen wir in die obigen Formeln (21) bis (23) $\vartheta = 0$ ein. Es ergibt sich dann $M_{II} = 0$ und

$$P_0 = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \cdot (C_3 - C_1), \tag{24}$$

$$M_I = M_0 = \frac{2\pi}{l} \cdot C_3, \tag{25}$$

woraus

$$\frac{P_0}{M_3^2} = \frac{C_3 - C_1}{C_3^2} \tag{26}$$

folgt. Was die Größenverhältnisse von C_1 und C_3 betrifft, so ist bei dem hier vorausgesetzten kreissymmetrischen Querschnitt $C_3 < C_1$; denn

$$\frac{C_3}{C_1} = \frac{G \cdot J_p}{E \cdot J} = \frac{G \cdot 2J}{E \cdot J} = 2\frac{G}{E} = \frac{m}{m+1} < 1.$$

Darin bedeuten G und E Schub- bzw. Zugelastizitätsmodul, J_p und J polares bzw. achsiales Trägheitsmoment des kreissymmetrischen Querschnitts, für den $J_p = 2J$ gilt, und m ist die Poissonsche Konstante.

Der Wert des kritischen Drehmomentes M_0 ist nach Gl. (25) kleiner als der nach Gl. (9) von § 2 berechnete Wert und zwar ist er so bemessen, daß sich die Endquerschnitte des geraden Stabes um eine volle Umdrehung 2π gegeneinander verdrehen. Zu diesem Torsionsmoment tritt aber hier noch eine achsiale Kraft, die das Auskippen unterstützt, also eine Drucklast, die sich nach Gl. (24) der Größe und dem Vorzeichen nach berechnen läßt.

Vergleicht man die Endkräfte und Endmomente, die den Schraubenlinien bei verschiedenen Neigungswinkeln ϑ entsprechen, nach den Gl. (21) bis (23) mit den Werten P_0 und M_0, so ergibt sich wegen $\frac{\sin\vartheta}{r} = \frac{2\pi}{l}$, daß mit zunehmender Zusammendrückung der Schraubenlinie die entlang der Schraubenachse wirkende Druckkraft P proportional mit $\cos\vartheta$ abnimmt, während das Achsenmoment im Verhältnis

$$\frac{C_1 \sin^2\vartheta + C_3 \cos^2\vartheta}{C_3}$$

zunimmt. Der oben besprochene Fall war als Analogon zur räumlichen Pendelbewegung des symmetrischen schweren Kreisels gewonnen worden. Wie diese letztere nur einen speziellen Fall der Präzessionsbewegung des schweren symmetrischen Kreisels darstellt, so gilt etwas Entsprechendes, von den obigen Schraubenlinien, in die der ursprünglich gerade Stab bei passend gewählten Endkräften und Endmomenten übergeht. In der Tat läßt sich für jede Schraubenlinie, die durch den Winkel ϑ charakterisiert ist, nach den Gl. (21) bis (23) ein ganz bestimmter Wert der Endkraft und des Endmomentes angeben; dagegen ist bei gegebener Endkraft die Frage nach der Größe des Endmomentes, um eine bestimmte Schraubenlinie zu erhalten, noch nicht gelöst. Die Antwort auf diese Frage gibt uns das Analogon zur allgemeinen Präzessionsbewegung des schweren symmetrischen Kreisels.

Nennen wir $\mu = \frac{2\pi}{T}$ die Präzessionsgeschwindigkeit mit der Periode T und ν die Drehgeschwindigkeit des Kreisels um seine Figurenachse, so gilt die Beziehung[1]):

$$P = \Theta_3 \mu (\nu + \mu \cos\vartheta) - \Theta_1 \mu^2 \cos\vartheta . \tag{27}$$

[1]) R. Grammel, „Der Kreisel", S. 89.

Bei der Bedeutung des Winkels ϑ als Neigung der Figurenachse gegen die Vertikale durch den festen Kreiselpunkt hängt die Winkelgeschwindigkeit u_3 um die Figurenachse mit μ und ν folgendermaßen zusammen:

$$\nu + \mu \cos\vartheta = u_3 .$$

Die Gl. (27) entsprechende Gleichung für den elastischen Draht lautet daher:

$$P = C_3 \frac{2\pi}{l} \tau - C_1 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \cos\vartheta , \tag{28}$$

in die auch der Radius $r = \frac{l}{2\pi} \sin\vartheta$ des Kreiszylinders, auf dem die Schraubenlinie liegt, eingesetzt werden kann. Dazu treten Endmomente, wie man sofort aus der Kreiselaufgabe entnimmt, wo der Drall den Momenten entspricht, und zwar liegt der Momentenvektor ebenso wie früher in der Tangentialebene an den Kreiszylinder. Den Drallkomponenten $B_3 = \Theta_3 u_3$ parallel der Figurenachse und $B_{1,2} = \Theta_1 \mu \sin\vartheta$ in der dazu senkrechten Richtung entsprechen das Torsionsmoment $M_3 = C_3 \tau$ und das Biegungsmoment $M_{1,2} = C_1 \frac{2\pi}{l} \sin\vartheta = C_1 \frac{\sin^2\vartheta}{r}$. Hieraus berechnet sich die Komponente des Momentes parallel zur Schraubenachse:

$$M_I = M_3 \cos\vartheta + M_{1,2} \sin\vartheta = C_3 \tau \cos\vartheta + C_1 \frac{2\pi}{l} \sin^2\vartheta ,$$

oder wegen Gl. (28):

$$M_I = P \frac{l}{2\pi} \cos\vartheta + C_1 \frac{2\pi}{l} . \tag{29}$$

Die Komponente des Momentes senkrecht zur Schraubenachse ist:

$$M_{II} = M_3 \sin\vartheta - M_{1,2} \cos\vartheta = C_3 \tau \sin\vartheta - C_1 \frac{2\pi}{l} \sin\vartheta \cos\vartheta$$

oder wegen Gl. (28):

$$M_{II} = P \frac{l}{2\pi} \sin\vartheta = Pr . \tag{30}$$

Die Endkräfte sind demnach ebenso wie im vorigen Fall zurückgeführt auf je eine Kraftschraube, deren Achse mit der Schraubenachse zusammenfällt. Die Größe der Kraft P in Richtung der Schraubenachse ist durch Gl. (28) und die Größe des Momentes um die Achse durch Gl. (29) in Abhängigkeit von der Neigung der Schraubenlinie bestimmt. Der vorher untersuchte Fall, der das Analogon zum Raumpendel darstellte, ist in diesem allgemeineren Fall enthalten und geht daraus hervor, wenn man $\tau = \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{r} = \frac{2\pi}{l}\cos\vartheta$ in die Gl. (28) und (29) einsetzt, womit man die Gl. (21) und (22) erhält.

Wir wollen noch die Grenzfälle untersuchen und setzten zunächst $\vartheta = 90^0$, wodurch die Schraubenlinie in einen vollen Kreis ausartet. Die Gl. (28) bis (30) zeigen, daß diese Gestalt des Drahtes möglich ist, wobei an den Enden ein Biegungsmoment von der Größe $\frac{C_1}{r}$, eine Kraft senkrecht zur Kreisebene von der Größe $C_3\frac{\tau}{r}$ und ein Torsionsmoment von der Größe $C_3\tau$ angreifen, wobei die Größe des Verdrehungswinkels τ ganz beliebig ist. Mit $\tau = 0$ erhält man den früher besprochenen Fall der einfachen Biegung.

Von besonderer Bedeutung ist der andere Grenzfall $\vartheta = 0$, da er die kritischen Werte der achsialen Kraft P_0 und des achsialen Verdrehungsmomentes M_0, die den ursprünglich geraden Stab labil machen, in Beziehung setzt. Aus den Gl. (28) und (29) ergibt sich:

$$P_0 = C_3\frac{2\pi}{l}\tau - C_1\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \tag{31}$$

und

$$M_I = M_0 = P_0\frac{l}{2\pi} + C_1\frac{2\pi}{l}, \tag{32}$$

während $M_{II} = 0$ wird. Mit $\tau = \frac{2\pi}{l}$ wird hieraus der frühere Spezialfall erhalten, so daß damit aus den Gl. (31) und (32) die Gl. (24) und (25) hervorgehen.

Vor allen Dingen ist Gl. (32) bedeutungsvoll, die uns die Beziehung zwischen der kritischen Last und dem kritischen Verdrehungsmoment angibt. Wir wollen sie folgendermaßen schreiben:

$$C_1 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 = M_0 \frac{2\pi}{l} - P_0. \tag{33}$$

Für $P_0 = 0$ ergibt sich als Spezialfall das kritische Moment von Gl. (9). Da bei positivem P_0 der kritische Wert von M_0 wächst, so sieht man, daß P_0 eine Zugkraft an den Stabenden bedeutet. Für $M_0 = 0$ müßte P_0 in den Wert der Eulerschen Knicklast übergehen. In Wirklichkeit gibt Gl. (33) den vierfachen Wert, d. h. den Wert der Knicklast, wenn der Stab nach einer vollen Welle, also zwei Halbwellen, ausknicken würde. Dieses Ergebnis war zu erwarten, wenn wir uns daran erinnern, daß der unter einer Achsiallast ausgeknickte Stab einer halben Schwingung eines Pendels entspricht, so daß die volle Schwingung die Analogie eines geknickten Stabes mit zwei Halbwellen darstellt. Setzen wir daher $R_0 = -\frac{P_0}{4}$, so ergibt sich die folgende wichtige Beziehung:

$$C_1 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 = M_0 \frac{\pi}{2l} + R_0,$$

die mit $M_0 = 0$ den Grenzfall der Eulerschen Knicklast und mit $R_0 = 0$ den anderen Grenzfall des kritischen Torsionsmomentes in sich schließt.