Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1922
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über den Hauptsatz aus der Theorie der konformen Abbildung.

Von **Georg Faber.**

Vorgetragen in der Sitzung am 4. März 1922.

Wenn ich im folgenden den allmählich recht zahlreich gewordenen Beweisen für den Hauptsatz aus der Theorie der konformen Abbildung einen neuen hinzufüge, so mag dies Beginnen dadurch gerechtfertigt erscheinen, daß mein Beweis besonders einfach und rein funktionentheoretisch ist, sowie dadurch, daß gleichzeitig für die Frage der Ränderzuordnung eine neue Lösung von sehr durchsichtigem Gedankengang[1]) gegeben wird.

Den zu beweisenden Hauptsatz formuliere ich so:

$\mathfrak{g}$ sei ein einfach zusammenhängendes, den Punkt $z = 0$ enthaltendes, endliches Gebiet der z-Ebene; es liege also ein Kreisgebiet

1) $$|z| < \gamma$$

ganz in $\mathfrak{g}$, während andrerseits $\mathfrak{g}$ ganz in einem Kreisgebiete

2) $$|z| < \Gamma \qquad (\Gamma > \gamma)$$

enthalten sei. Dann gibt es eine und nur eine Potenzreihe

---

[1]) Wie ich nachträglich bemerkte, benutzte schon Herr Courant (Gött. Nachr. 1914) Überlegungen, die, wenn auch in ganz anderer Darstellung, eine gewisse Verwandtschaft mit den meinen besitzen.

3) $$z = \mathfrak{P}(Z) = Z + a_2 Z^2 + a_3 Z^3 + \cdots$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) $\mathfrak{P}(0) = 0$, $\mathfrak{P}'(0) = 1$;

b) $\mathfrak{P}(Z)$ nimmt in einem gewissen Kreisgebiete

4) $$|Z| < \varrho,$$

dessen Radius ϱ völlig bestimmt ist, jeden Wert z aus $\mathfrak{g}$ einmal und nur einmal an. Die Umkehrfunktion der Reihe (3)

5) $$Z = f(z)$$

ist also eine in $\mathfrak{g}$ reguläre Funktion, die daselbst jeden Wert Z, dessen Betrag $< \varrho$ ist, gerade einmal annimmt.

Ich mache beim Beweise dieses Satzes noch die Voraussetzung, daß $\mathfrak{g}$ von einer einfachen Jordan-Kurve begrenzt ist. Von dieser Voraussetzung kann man sich leicht hinterher durch einen weiteren Grenzübergang befreien und so den Beweis des Hauptsatzes auf beliebige einfach zusammenhängende Gebiete ausdehnen.

Daß der Rand von $\mathfrak{g}$ eine Jordan-Kurve sei, wird übrigens nur beim Beweise des folgenden Hilfssatzes benutzt.

I. Hilfssatz: Ist $\mathfrak{g}$ echtes Teilgebiet eines anderen endlichen Gebietes $\mathfrak{b}$, so hat $\mathfrak{b}$ Randpunkte, die äußere Punkte für $\mathfrak{g}$ sind.

Weil nämlich weder die $\mathfrak{g}$ begrenzende Jordan-Kurve C noch ein Stück von C den ganzen Rand eines von $\mathfrak{g}$ verschiedenen Gebietes bilden kann, müssen zum Rande von $\mathfrak{b}$ Punkte gehören, die weder C, noch auch, da ja $\mathfrak{g}$ Teilgebiet von $\mathfrak{b}$ sein soll, $\mathfrak{g}$ angehören, die also äußere für $\mathfrak{g}$ sind.

Im folgenden ersten Paragraphen beweise ich den Hauptsatz; auf die Frage der Ränderzuordnung gehe ich dann in einem zweiten Paragraphen ein.

§ 1. Beweis des Hauptsatzes.

Es gibt jedenfalls unendlich viele Gebiete $\mathfrak{d}$, die durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet sind:

a) alle $\mathfrak{d}$ liegen ganz im Endlichen, etwa innerhalb der Kreislinie $|z| = 2\Gamma$ (vgl. (2)); alle $\mathfrak{d}$ enthalten den Nullpunkt;

b) es gibt für jedes $\mathfrak{d}$ eine Funktion $Z = F(z)$ mit der Umkehrung $z = \mathfrak{p}(Z)$, wodurch $\mathfrak{d}$ unter Beachtung der Nebenbedingungen $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ auf ein Kreisgebiet $|Z| < r$ abgebildet wird;

c) $\mathfrak{g}$ ist Teilgebiet von jedem $\mathfrak{d}$ und zwar echtes oder unechtes.

Bewiesen soll eben werden, daß letztere Möglichkeit Wirklichkeit ist, d. h. daß $\mathfrak{g}$ selbst ein Gebiet $\mathfrak{d}$ ist.

Die unter b) erwähnten Radien r sind alle $\leqq 2\Gamma$ und $> \gamma$, wie man leicht mittels des sog. Schwarzschen Lemmas erkennt; die Radien r haben somit eine endliche von Null verschiedene untere Grenze ϱ. Ich behaupte nun:

α) Es gibt ein Gebiet $\mathfrak{d}$, für welches $r = \varrho$ ist.

β) Dieses Gebiet $\mathfrak{d}$ ist mit $\mathfrak{g}$ identisch.

Beweis von α): Wäre für kein Gebiet $\mathfrak{d}$ der zugehörige Radius $r = \varrho$, so gäbe es unendlich viele solche Gebiete $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2, \ldots$, deren Radien $r_1, r_2, \ldots$ die Bedingung $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = \varrho$ erfüllen. Nach einem bekannten Montelschen Satze dürfen wir außerdem annehmen, daß die zugehörigen Potenzreihen $\mathfrak{p}_1(Z)$, $\mathfrak{p}_2(Z), \ldots$ im Gebiete $|Z| < \varrho$ gegen eine Grenzfunktion $\mathfrak{p}(Z) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{p}_n(Z)$ mit $\mathfrak{p}(0) = 0$, $\mathfrak{p}'(0) = 1$ konvergieren. Durch $z = \mathfrak{p}(Z)$ wird das Gebiet $|Z| < \varrho$ auf ein einfach zusammenhängendes schlichtes Gebiet $\mathfrak{e}$ der z-Ebene abgebildet; wegen des sehr einfachen Beweises darf ich auf Caratheodory, Math. Ann., Bd. 72 (1912), S. 120/21 verweisen. $\mathfrak{e}$ liegt offenbar innerhalb der Kreislinie $|z| = 2\Gamma$. Zum vollen Beweise von α genügt es, somit zu zeigen, daß $\mathfrak{g}$ ein Teil von $\mathfrak{e}$ ist, also daß $|F(z_1)| < \varrho$ ist, für irgend einen Punkt z_1 von $\mathfrak{g}$, wenn $Z = F(z)$ die Umkehrfunktion von $z = \mathfrak{p}(Z)$ bedeutet. Ist nämlich $Z = F_n(z)$ die Umkehrfunktion von $z = \mathfrak{p}_n(Z)$, so folgt (wegen $|F_n(z_1)| < r_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(z_1) = F(z_1)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \varrho$) zunächst:

$$|F(z_1)| \leqq \varrho. \tag{6}$$

Hier kann aber das Zeichen $=$ nicht gelten, denn dann gäbe es Punkte z_2 in $\mathfrak{g}$ und in der Umgebung von z_1, für die $|F(z_2)| > \varrho$ wäre im Widerspruch mit der soeben bewiesenen Ungleichung (6), die für z_2 genau so gilt wie für z_1.

Beweis von β): Wir nehmen an, $\mathfrak{b}$ sei, wie soeben, ein schlichter, einfach zusammenhängender Bereich der z-Ebene, der durch

$$Z = F(z), \qquad z = \mathfrak{p}(Z) \tag{7}$$

auf den Kreisbereich $|Z| < \varrho$ abgebildet werde (mit Beachtung der Nebenbedingungen: $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$); $\mathfrak{g}$ sei Teilgebiet von $\mathfrak{b}$, ϱ der unter α) festgestellte Minimalradius. Dann haben wir zu zeigen, daß die Annahme, $\mathfrak{g}$ sei ein echtes Teilgebiet von $\mathfrak{b}$, auf einen Widerspruch führt. Unter dieser Annahme könnte man zwei voneinander verschiedene, außerhalb $\mathfrak{g}$ gelegene Randpunkte a, b von $\mathfrak{b}$ (vgl. Hilfssatz I) durch einen außerhalb $\mathfrak{g}$ verlaufenden Querschnitt von $\mathfrak{b}$ miteinander verbinden und so von $\mathfrak{b}$ ein Gebiet $\mathfrak{t}$ abtrennen, von dem kein innerer und kein Randpunkt dem Gebiet $\mathfrak{g}$ angehört. Nun benutze ich folgenden

II. Hilfssatz: Das Bild des Querschnitts $a \ldots b$ ist vermöge (7) in der Z-Ebene ein Querschnitt $A \ldots B$ des Kreisgebietes $|Z| < \varrho$. A, B sind voneinander verschiedene Punkte der Kreislinie $|Z| = \varrho$.

Ich darf mich für diesen Hilfssatz weder auf den Beweis des Herrn Caratheodory noch auf den des Herrn Koebe stützen, da beide den hier zu beweisenden Hauptsatz benutzen. Dagegen könnte ich mich auf den Lindelöfschen Beweis berufen; doch werde ich, um die vorliegende Untersuchung abzurunden, im zweiten Paragraphen einen neuen, sehr einfachen Beweis mitteilen.

Nach dem Hilfssatze entspricht dem Gebiete $\mathfrak{t}$ ein Gebiet $\mathfrak{T}$ der Z-Ebene, zu dessen Begrenzung ein Bogen $A \ldots B$ der Kreislinie $|Z| = \varrho$ gehört, und man kann dann zwei untereinander und von A, B verschiedene Punkte D, E dieses Bogens so nahe aneinander wählen, daß die durch D und E gehende Kreislinie, die den Kreis $|Z| = \varrho$ senkrecht schneidet, von dem Kreisgebiet $|Z| < \varrho$ ein Stück wegschneidet, das ganz dem Gebiete $\mathfrak{T}$ angehört, also keine Bildpunkte des Gebietes $\mathfrak{g}$ enthält. Das nach diesem Wegschneiden vom Gebiete $|Z| < \varrho$ verbleibende Restgebiet möge $\mathfrak{R}$ heißen.

Ich zeige nun, daß es eine Funktion

8) $$Z_1 = \psi(Z),$$

die den Nebenbedingungen

9) $$\psi(0) = 0, \qquad \psi'(0) = 1$$

genügt, und durch welche $\mathfrak{R}$ auf ein Kreisgebiet $|Z_1| < \varrho'$ abgebildet wird; man erkennt auf Grund des Schwarzschen Lemmas sofort, daß dann $\varrho' < \varrho$ ist. Besitzt man aber die Funktion (8), so kann man durch

10) $$Z_1 = \psi(F(z)),$$

wo $F(z)$ die gleiche Bedeutung hat wie in (7), ein Gebiet $\mathfrak{b}_1$ der z-Ebene, in dem $\mathfrak{g}$ als Teilgebiet enthalten ist, unter Beachtung der Nebenbedingungen

11) $$\left(\frac{dZ_1}{dz}\right)_{z=0} = 1, \qquad Z_1 = 0 \text{ für } z = 0$$

auf ein Kreisgebiet $|Z_1| < \varrho' < \varrho$ abbilden, was im Widerspruch damit steht, daß ϱ die untere Grenze dieser Radien bedeutet.

Es bleibt also nur noch der Existenzbeweis für die Funktion $\psi(Z)$ (8) übrig; man könnte sie leicht in geschlossener Form hinschreiben; doch genügt es offenbar, zu zeigen, daß man das Gebiet $\mathfrak{R}$ auf irgend ein Kreisgebiet $\mathfrak{K}$ der u-Ebene durch eine Funktion

12) $$u = \chi(Z)$$

abbilden kann; denn dann findet man leicht die den Nebenbedingungen (9) genügende Funktion $\psi(Z)$ als lineare Funktion von $\chi(Z)$. Somit haben wir nur noch zu zeigen, daß man $\mathfrak{R}$ oder ein dazu ähnliches Gebiet $\mathfrak{R}_1$ auf ein Kreisgebiet konform abbilden kann. $\mathfrak{R}_1$ kann man von zwei Kreisbogen begrenzt denken, die in der oberen (durch die Bedingung: Realteil von $Z > 0$ definierten) Halbebene verlaufen und sich in den Punkten $Z = \pm 1$ rechtwinkelig schneiden. Dieses Gebiet $\mathfrak{R}_1$ wird durch

$$13)\qquad \frac{u-1}{u+1} = \left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^2$$

auf ein Kreisgebiet der u-Ebene abgebildet. Man erkennt dies ohne jede Rechnung, wenn man die Substitutionen

$$14)\qquad \frac{u-1}{u+1} = w,$$

$$15)\qquad \frac{Z-1}{Z+1} = v$$

macht und beachtet, daß jenen zwei Kreisbogen vermöge (15) zwei aufeinander senkrechte Halbstrahlen der v-Ebene entsprechen, die durch $w = v^2$ in eine Gerade durch den Punkt 0 der w-Ebene übergehen, und daß einer solchen Geraden vermöge (14) ein Kreis durch die Punkte -1, $+1$ der u-Ebene entspricht.

§ 2. Die Ränderzuordnung.

Zur Ergänzung der voraufgehenden Untersuchung und um den II. Hilfssatz zu beweisen, behandeln wir noch die Frage der Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. Durch

$$16)\qquad Z = f(z),\quad \text{aufgelöst } z = \mathfrak{P}(Z),$$

werde das endliche, einfach zusammenhängende, im übrigen aber ganz beliebige Gebiet $\mathfrak{d}$ der z-Ebene auf das Kreisgebiet $|Z| < \varrho$ abgebildet. $q(r)$ seien durch Kreisbogen mit veränderlichem Radius r und festem Mittelpunkt P gebildete Querschnitte des Gebietes $\mathfrak{d}$; P liege auf dem Rand von $\mathfrak{d}$; $\mathfrak{a}(r)$ sei das eine der von $\mathfrak{d}$ durch $q(r)$ abgetrennten Gebiete, und zwar sei, falls $r'' < r'$ ist, $\mathfrak{a}(r'')$ ein Teilgebiet von $\mathfrak{a}(r')$. Mit $\mathfrak{d}(r', r'')$ werde das Gebiet bezeichnet, das man erhält, wenn man aus $\mathfrak{a}(r')$ die Punkte von $\mathfrak{a}(r'')$ und $q(r'')$ wegläßt. In der Z-Ebene seien $Q(r)$, $\mathfrak{A}(r)$, $\mathfrak{D}(r', r'')$ die Bilder von $q(r)$, $\mathfrak{a}(r)$, $\mathfrak{d}(r', r'')$. Ist ein Punkt A der Kreislinie $|Z| = \varrho$ Randpunkt eines Gebietes $\mathfrak{A}(r'')$, so ist er offenbar auch Randpunkt jedes Gebietes $\mathfrak{A}(r')$, wo $r' > r''$.

Alles kommt nun darauf an, zu zeigen:

Es gibt nur einen Punkt der Kreislinie $|Z| = \varrho$, der Randpunkt sämtlicher Gebiete $\mathfrak{A}(r)$ ist, wie klein auch r sein möge.

Gäbe es nämlich mindestens zwei solche Punkte: A, B, so gäbe es auf jedem Querschnitt $Q(r)$ Punkte, deren Entfernung $> l$ wäre, falls unter l irgend eine Zahl verstanden wird, die kleiner ist als die Maßzahl der Sehne AB. Wir zerlegen nun das Gebiet $\mathfrak{d}\left(r', \frac{r'}{2}\right)$ durch die Querschnitte $q(r_1)$, $q(r_2)$, ..., $q(r_{n+1})$, wo

17)
$$r_1 = r', \quad r_{n+1} = \frac{r'}{2} \text{ und}$$
$$r_1 - r_2 = r_2 - r_3 = \cdots = \frac{r_{n+1} - r_n}{n} = \frac{r'}{2n}$$

sein möge, sowie durch Stücke von Radien dieser Querschnitte in Teilgebiete, die wir uns beliebig klein, und soweit sie nicht an den Rand von $\mathfrak{d}$ heranreichen, mit beliebiger Annäherung als untereinander kongruente Quadrate vom Inhalt δ^2 vorstellen dürfen, wo

18)
$$\delta = \frac{r'}{2n} \text{ (vgl. (17)).}$$

Wir lassen im folgenden die an den Rand von $\mathfrak{d}$ heranreichenden Teilbereiche weg und behalten nur die quadratartigen bei. Mit m_i bezeichnen wir die Anzahl derjenigen, die zwischen $q(r_i)$ und $q(r_{i+1})$ liegen $(i = 1, 2, \ldots n)$; ihre $m_i + 1$ auf $q(r_i)$ gelegenen Ecken seien der Reihe nach: z_{i1}, z_{i2}, z_{i3}, $\ldots$, $z_{i m_i + 1}$. Es ist klar, daß m_i für alle i mindestens gleich 1 ist, falls nur n genügend groß gewählt wurde. Man kann auch n unter fortdauerndem Verzicht auf die weggelassenen, an den Rand von $\mathfrak{b}$ heranreichenden Teilbereiche hinterher weiter vergrößern und damit auch die Anzahl der Eckpunkte z_{ik}, wodurch man erreicht, daß die Summe

$$19)\qquad \sum_1^n{}^i \sum_1^{m_i}{}^k (|f'(z_{ik})|\,\delta)^2,$$

für die wir kürzer

$$20)\qquad \sum_1^n{}^i S_i$$

schreiben, kleiner wird als der Inhalt des Gebietes $\mathfrak{D}\left(r', \frac{r'}{2}\right)$.

Neben den soeben definierten Summen

$$21)\qquad S_i = \sum_1^{m_i}{}^k (|f'(z_{ik})|\,\delta)^2$$

betrachten wir die Summen

$$22)\qquad s_i = \sum_1^{m_i}{}^k |f'(z_{ik})|\,\delta.$$

s_i ist mit beliebiger Annäherung die Bogenlänge eines Stückes von $Q(r_i)$, und man könnte

$$23)\qquad s_i > l$$

setzen, wann der Satz von S. 97 nicht richtig wäre. Nun ist aber

$$24)\qquad S_i \geqq \frac{s_i^2}{m_i},$$

da für beliebige positive Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ bekanntlich

$$25)\qquad u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_m^2 \geqq \frac{1}{m}(u_1 + u_2 + \cdots + u_m)^2$$

ist. Aus (23), (24) aber würde folgen:

$$26)\qquad S_i > \frac{l^2}{m_i}.$$

Da aber $m_i \delta < 2\pi r_i < 2\pi r' = 4\pi n \delta$ ist (vgl. (18)), so ergibt sich

27) $$\frac{1}{m_i} > \frac{1}{4\pi n},$$

also nach (26):

28) $$S_i > \frac{l^2}{4\pi n}.$$

Der Inhalt des Gebietes $\mathfrak{D}\left(r', \frac{r'}{2}\right)$ wäre somit $> l^2 : 4\pi$. Das gleiche würde für die Gebiete $\mathfrak{D}\left(\frac{r'}{2}, \frac{r'}{4}\right)$, $\mathfrak{D}\left(\frac{r'}{4}, \frac{r'}{8}\right)$ usf. gelten, und man käme so zu dem unsinnigen Ergebnis, daß das Gebiet $\mathfrak{A}(r')$, das ganz in dem Kreisgebiet $|Z| < \varrho$ liegt, einen unendlich großen Inhalt besäße. Somit ist gezeigt:

Einem „Primende" (Caratheodory) oder „Randelemente" (Koebe) von $\mathfrak{b}$ entspricht ein bestimmter Punkt A der Kreislinie $|Z| = \varrho$.

Mit genau den nämlichen Überlegungen beweist man, wobei nur die Gebiete $\mathfrak{b}$ und $|Z| < \varrho$ ihre Rollen vertauschen:

Ein Punkt A der Kreislinie $|Z| = \varrho$ kann nicht zwei verschiedenen Randelementen von $\mathfrak{b}$ entsprechen; und endlich ganz allgemein:

Bei der konformen Abbildung zweier Gebiete aufeinander entsprechen die Randelemente einander umkehrbar eindeutig.

Zusätzliche Schlussbemerkungen.

Zum Schlusse seien noch zwei andere Beweiswege zum Hauptsatze von S. 91 andeutungsweise beschrieben:

Beim ersten mache ich wieder die Voraussetzung, das abzubildende endliche Gebiet $\mathfrak{g}$ sei von einer einfachen Jordan-Kurve begrenzt. Ich bilde zuerst irgend ein größeres ($\mathfrak{g}$ als Teilgebiet enthaltendes) Gebiet $\mathfrak{b}_1$ auf ein Kreisgebiet $|Z| < \varrho_1$ ab, sodann, wie S. 95/96 beschrieben wurde, ein Gebiet $\mathfrak{b}_2$, das größer als $\mathfrak{g}$, aber kleiner als $\mathfrak{b}_1$ ist, auf ein Kreisgebiet $|Z| < \varrho_2$, ferner $\mathfrak{b}_3 > \mathfrak{g}$, aber $< \mathfrak{b}_2$ auf $|Z| < \varrho_3$ usw., endlich $\mathfrak{b}_\omega$ durch Grenzübergang auf $|Z| < \varrho_\omega$, dann $\mathfrak{b}_{\omega+1}$ usw. Nach einer abzählbaren Menge von Schritten muß das Verfahren zum Ziele, d. h. zur Abbildung von $\mathfrak{g}$ auf ein Kreisgebiet führen.

Bei dem zweiten Wege soll das Ziel sein: das Äußere einer (nach außen hin) nirgends hohlen Kurve C der z-Ebene auf das Äußere eines Kreises der Z-Ebene durch eine Reihe

29) $$z = Z + a_0 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \cdots$$

abzubilden. Man konstruiere, was nur die Lösung einer gewöhnlichen Minimumsaufgabe voraussetzt, das Polynom

30) $$P_n(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \cdots + b_n,$$

dessen Betrag auf C einen möglichst kleinen Maximalwert besitzt. Wird dann, außerhalb C, $\sqrt[n]{P_n(z)}$ durch die Bedingung $\lim\limits_{z \to \infty} \left(\sqrt[n]{P_n(z)} : z\right) = 1$ eindeutig definiert, so existiert für alle z außerhalb C der Grenzwert

31) $$f(z) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{P_n(z)}.$$

Löst man die Gleichung $Z = f(z)$ nach z auf, so hat man die gesuchte Funktion (29).

Dies alles bleibt giltig, auch wenn die Kurve C der Bedingung, nach außen nirgends hohl zu sein, nicht genügt; doch kann ich die Richtigkeit dieser Behauptung nur auf Grund des anderweitig bewiesenen Hauptsatzes dartun. Es liegt also hier ein ganz ähnlicher Fall vor, wie bei dem bekannten Neumannschen Verfahren.