Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1922
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Zur Trigonometrie im nicht-euklidischen Raume.

Von F. Lindemann.

Vorgetragen in der Sitzung am 4. März 1922.

1. Die trigonometrischen Formeln der nicht-euklidischen Geometrie (und damit auch diejenigen der sphärischen Trigonometrie) beruhen auf zwei algebraischen Identitäten. Ist

$$\Omega_{xx} = 0 \text{ oder } a_x^2 \equiv b_x^2 \equiv c_x^2 \equiv \cdots = 0$$

die Gleichung des Fundamentalkegelschnittes in Punktkoordinaten, so ist

$$\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy} = 0$$

die Bedingung dafür, daß die Linie x-y Tangente an $\Omega_{xx} = 0$ sei, die linke Seite also mit $(a\,b\,u)^2$ wesentlich identisch. In der Tat sei $u_i = (x\,y)_i$, so wird

$$(1) \qquad \begin{aligned}(a\,b\,u)^2 = (a_x\,b_y - b_x\,a_y)^2 &= 2\,a_x^2\,b_y^2 - 2\,a_x\,a_y\,b_x\,b_y \\ &= 2\,(\Omega_{xx}\,\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2)\,.\end{aligned}$$

Geht man umgekehrt von der Gleichung in Linienkoordinaten aus und setzt

$$\Psi_{uu} = u_\alpha^2 = u_\beta^2 = (a\,b\,u)^2,$$

so ist, wenn $x_i = (u\,v)$ die Koordinaten des Schnittpunktes von u und v sind:

$$(2) \qquad 2\,(\Psi_{uu}\,\Psi_{vv} - \Psi_{uv}^2) = (u_\alpha\,v_\beta - v_\alpha\,u_\beta)^2 = (\alpha\,\beta\,x)^2$$
$$= 2\,a_\beta^2\,b_x^2 - 2\,a_\beta\,b_\beta\,a_x\,b_x = 2\,A\cdot b_x^2 - 2\,(a\,c\,d)\,(b\,c\,d)\,a_x\,b_x = \tfrac{4}{3}\,A\cdot a_x^2\,[1],$$

[1]) Vgl. Identität (3) auf S. 286 in Bd. I von Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, 1. Aufl.

wenn $A = (abc)^2$ die Invariante der Kurve bezeichnet. Ist nun u die Verbindungslinie der Punkte x und y, v diejenige der Punkte x und z, also: $u_i = (xy)_i$, $v_i = (xz)_i$, so wird

$$
(3)\qquad \begin{aligned} 2(\Psi_{uu}\Psi_{vv} - \Psi_{uv}^2) &= [(\alpha xy)(\beta xz) - (\alpha xz)(\beta xz)]^2 \\ &= (xyz)^2(\alpha\beta x)^2 = \tfrac{4}{3} A \cdot (xyz)^2 \cdot a_x^2 . \end{aligned}
$$

Bezeichnen wir mit x, y, z die Ecken eines Dreiecks, mit u, v, w die gegenüber liegenden Seiten, mit φ_x, φ_y, φ_z die Winkel, mit r_x, r_y, r_z die entsprechenden Seiten, so ist bekanntlich:

$$
\cos\frac{r_x}{k} = \frac{\Omega_{yz}}{\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}}, \quad \cos\frac{r_y}{k} = \frac{\Omega_{zx}}{\sqrt{\Omega_{zz}\Omega_{xx}}}, \quad \cos\frac{r_z}{k} = \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}},
$$

$$
\cos\frac{\varphi_x}{k'} = \frac{\Psi_{vw}}{\sqrt{\Psi_{vv}\Psi_{ww}}}, \quad \cos\frac{\varphi_y}{k'} = \frac{\Psi_{wu}}{\sqrt{\Psi_{ww}\Psi_{uu}}}, \quad \cos\frac{\varphi_z}{k'} = \frac{\Psi_{uv}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}},
$$

also:

$$
\sin\frac{r_x}{k} = \frac{\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz} - \Omega_{yz}^2}}{\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}} = \frac{\sqrt{\Psi_{uu}}}{\sqrt{2\,\Omega_{yy}\Omega_{zz}}},
$$

$$
\sin\frac{\varphi_x}{k'} = \frac{\sqrt{\Psi_{vv}\Psi_{ww} - \Psi_{vw}^2}}{\sqrt{\Psi_{vv}\Psi_{ww}}} = \frac{(xyz)\sqrt{2A\cdot\Omega_{xx}}}{\sqrt{3\,\Psi_{vv}\Psi_{ww}}}
$$

und folglich:

$$
\frac{\sin\frac{r_x}{k}}{\sin\frac{\varphi_x}{k'}} = \frac{\sqrt{3\,\Psi_{uu}\Psi_{vv}\Psi_{ww}}}{\sqrt{2A\,\Omega_{xx}\Omega_{yy}\Omega_{zz}}} = \frac{\sin\frac{r_y}{k}}{\sin\frac{\varphi_y}{k'}} = \frac{\sin\frac{r_z}{k}}{\sin\frac{\varphi_z}{k'}},
$$

womit der Sinus-Satz gewonnen ist. Für den Cosinus-Satz benutzen wir die weitere Identität:

$$
\begin{aligned} \Psi_{uv} = u_\alpha v_\alpha = (abu)(abv) &= (a_x b_y - b_x a_y)(a_x b_z - b_x a_z) \\ &= 2(\Omega_{xx}\Omega_{yz} - \Omega_{xy}\Omega_{xz}), \end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned} \cos\frac{r_y}{k}\cdot\cos\frac{r_z}{k} + \cos\frac{\varphi_x}{k}\cdot\sin\frac{r_y}{k}\cdot\sin\frac{r_z}{k} &= \frac{\Omega_{zx}\Omega_{xy}}{\Omega_{xx}\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}} \\ + \frac{\Psi_{vw}}{\sqrt{\Psi_{vv}\Psi_{ww}}}\cdot\frac{\sqrt{\Omega_{vv}\Omega_{ww}}}{2\,\Omega_{xx}\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}} &= \frac{\Omega_{xx}\Omega_{yz}}{\Omega_{xx}\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}} = \cos\frac{r_x}{k}, \end{aligned}
$$

und entsprechend für den andern Winkel. Auf demselben Wege erhält man die sphärische Trigonometrie der euklidischen Kugel, indem man die Punkte der Ebene durch das Strahlenbündel der Kugeldurchmesser, den Kegelschnitt $\Omega_{xx} = 0$ durch den Asymptotenkegel der Kugel nach dem Prinzipe der Dualität ersetzt.

2. Die Trigonometrie auf einer nicht-euklidischen Kugel ergibt sich in folgender Weise. Ist $\Omega_{xx} = 0$ jetzt die Fundamentalfläche des Raumes und y der Mittelpunkt der Kugel mit Radius r, so ist die Gleichung derselben:

$$\Omega_{xx}\,\Omega_{yy}\cdot\operatorname{cosin}^2\frac{r}{k} - \Omega_{xy}^2 = 0. \tag{4}$$

Zwei in der Diametralebene u liegende Gerade, die außerdem bzw. in der Ebene v und v' liegen, bilden einen Winkel φ, bestimmt durch

$$\operatorname{cosin}\frac{\varphi}{k'} = \frac{(a\,b\,u\,v)(a\,b\,u\,v')}{\sqrt{(a\,b\,u\,v)^2\cdot(a\,b\,u\,v')^2}}, \tag{5}$$

wenn $\Omega = a_x^2 = b_x^2 \cdots$. Wird die Kugel von den Linien bzw. in den Punkten z und t geschnitten und bezeichnet τ einen beliebigen Punkt der Schnittlinie von v und v', so kann man setzen:

$$u_i = (y\,z\,t)_i, \qquad v_i = (y\,z\,\tau)_i, \qquad v_i = (y\,t\,\tau)_i,$$

und dann wird, da $u_y = 0$, $u_z = 0$:

$$(a\,b\,u\,v) = \begin{vmatrix} a_y & a_z & a_\tau \\ b_y & b_z & b_\tau \\ u_y & u_z & u_\tau \end{vmatrix} = u_\tau\cdot(a_y b_z - b_y a_z) = (y\,z\,t\,\tau)\,(a_y b_z - b_y a_z),$$

also:

$$\begin{aligned}
(a\,b\,u\,v)\,(a\,b\,u\,v') &= (y\,z\,t\,\tau)\cdot 2\,(\Omega_{yy}\,\Omega_{zt} - \Omega_{yz}\,\Omega_{yt}),\\
(a\,b\,u\,v)^2 &= 2\,(y\,z\,t\,\tau)^2\,(\Omega_{yy}\,\Omega_{zz} - \Omega_{yz}^2),\\
(a\,b\,u\,v')^2 &= 2\,(y\,z\,t\,\tau)^2\,(\Omega_{yy}\,\Omega_{tt} - \Omega_{yt}^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cosin}\frac{\varphi}{k'} &= \frac{\Omega_{yy}\,\Omega_{zt} - \Omega_{yz}\,\Omega_{yt}}{\sqrt{(\Omega_{yy}\,\Omega_{zz} - \Omega_{yz}^2)\,(\Omega_{yy}\,\Omega_{tt} - \Omega_{yt}^2)}}\\
&= \left(\operatorname{cotang}\frac{r}{k}\right)^2 \frac{\Omega_{yy}\,\Omega_{zt} - \Omega_{yz}\,\Omega_{yt}}{\Omega_{yz}\,\Omega_{yt}} = \frac{\mathfrak{W}_{zt}}{\sqrt{\mathfrak{W}_{zz}\cdot\mathfrak{W}_{tt}}},
\end{aligned} \tag{6}$$

wenn $\mathfrak{W}_{xx} = \Omega_{yy}\,\Omega_{xx} - \Omega_{xy}^2$ die linke Seite der Gleichung des Asymptotenkegels bezeichnet. Der Winkel ψ zweier Diametralebenen v, w ist bestimmt durch

$$(7)\qquad \operatorname{cosin}\frac{\psi}{k'} = \frac{\Psi_{vw}}{\sqrt{\Psi_{vv}\,\Psi_{ww}}} = \frac{(abcv)\,(abcw)}{\sqrt{(abcv)^2\cdot(defw)^2}}.$$

Andererseits berühren die beiden zur Bestimmung des den Winkel definierenden Doppelverhältnisses dienenden Ebenen, die durch den Schnitt von v und w gehen, auch den Kegel $\mathfrak{W}_{xx}=0$ und den Kegelschnitt, in dem dieser Kegel die Fläche $\Omega_{xx}=0$ berührt. Die Gleichung des letzteren in Ebenenkoordinaten u ist

$$P_{uu} \equiv 2\,(u_\alpha^2 v_\beta^2 - u_\alpha u_\beta v_\alpha v_\beta) \equiv (u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha)^2 = 0,$$

wenn $v_i = c_i c_y = d_i d_y$ gesetzt wird; es ist:

$$\begin{aligned}(u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha)^2 &= (u_\alpha c_\beta - u_\beta c_\alpha)\,(u_\alpha d_\beta - u_\beta d_\alpha)\,c_y\,d_y\\ &= 2\,(u_\alpha^2\cdot c_\beta\,d_\beta\,c_y\,d_y - u_\alpha u_\beta\,c_\alpha\,d_\beta\,c_y\,d_y).\end{aligned}$$

Hierin ist

$$\begin{aligned}c_\beta d_\beta c_y d_y &= \tfrac{1}{4}(cabe)\,d_y[(dabe)c_y-(dabc)e_y-(dace)b_y-(dcbe)a_y]\\ &= \tfrac{1}{4}(cabe)^2\,d_y^2 = \tfrac{1}{4}A\cdot\Omega_{yy},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_\beta u_\alpha c_\alpha d_\beta c_y d_y &= (abcu)\,(fghu)\,(abec)\,(fghd)\,c_y\,d_y\\ &= \tfrac{1}{4}(abeu)\,(abec)\,c_y\,(fghd)^2\,u_y\\ &= \tfrac{1}{16}(abec)^2\,(fghd)^2\,u_y^2 = \tfrac{1}{16}A^2\cdot u_y^2,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}P_{uu} &= \tfrac{1}{2}A\cdot\Omega_{yy}\cdot(abcu)^2 - \tfrac{1}{8}A^2 u_y^2,\\ P_{uv} &= \tfrac{1}{2}A\cdot\Omega_{yy}\cdot(abcu)\,(abcv) - \tfrac{1}{8}A^2 u_y v_y.\end{aligned}$$

Da nun $v_y = 0$ und $w_y = 0$ ist, so folgt:

$$\operatorname{cosin}\frac{\psi}{k'} = \frac{P_{vw}}{\sqrt{P_{vv}\,P_{ww}}} = \frac{(abcv)\,(abcw)}{\sqrt{(abcv)^2\cdot(abcw)^2}},$$

wie in (7), wodurch das geometrisch evidente Resultat auch rechnerisch bestätigt wird. Zwischen den Kanten- und Flächenwinkeln einer dreiseitigen Ecke gelten also in der nicht-euklidischen Geometrie dieselben Formeln wie zwischen den Seiten und Winkeln des ebenen Dreiecks (oder des euklidischen sphärischen Dreiecks).

3. Um den Winkel φ durch einen Bogen auf der nichteuklidischen Kugel zu ersetzen, müssen wir allgemein den Bogen einer Kurve durch den zugehörigen Zentriwinkel ausdrücken. Das Quadrat des Bogenelementes ist allgemein

$$\frac{ds^2}{k^2} = \frac{\Omega_{xx}\,\Omega_{dx\,dx} - \Omega^2_{x\,dx}}{\Omega^2_{xx}} \tag{8}$$

und das Quadrat des unendlich kleinen Winkels der Linien u und $u + du$

$$\frac{d\varphi^2}{k'^2} = \frac{\Psi_{uu}\,\Psi_{du\,du} - \Psi^2_{u\,du}}{\Psi^2_{uu}}, \tag{9}$$

wo $\Omega = 0$ und $\Psi = 0$ die Gleichungen des Fundamentalkegelschnittes in Punkt- bzw. Linienkoordinaten seien. Die Gleichung des Kreises mit dem Zentrum y und dem Radius r ist:

$$R \cdot \Omega_{xx}\,\Omega_{yy} - \Omega^2_{xy} = 0, \quad \text{wo } R = \operatorname{cosin}^2 \frac{r}{k}, \tag{10}$$

und die Differentiale genügen der Bedingung:

$$R \cdot \Omega_{x\,dx}\,\Omega_{yy} - \Omega_{xy}\,\Omega_{y\,dx} = 0 \tag{11}$$

Nach (1), (10) und (11) haben wir, wenn zur Abkürzung $dx_i = z_i$, $du_i = w_i$ gesetzt wird:

$$\Psi_{uu} = 2\,(\Omega_{xx}\,\Omega_{yy} - \Omega^2_{xy}) = 2\,(1 - R)\,\Omega_{xx}\,\Omega_{yy},$$

$$\Psi_{ww} = 2\,(\Omega_{yy}\,\Omega_{zz} - \Omega^2_{yz}) = \frac{2\,\Omega_{yy}}{\Omega_{xx}}\,(\Omega_{xx}\,\Omega_{zz} - R\,\Omega^2_{xz}),$$

$$\Psi_{uw} = 2\,(\Omega_{xz}\,\Omega_{yy} - \Omega_{xy}\,\Omega_{yz}) = 2\,(1 - R)\,\Omega_{yy}\,\Omega_{xz},$$

folglich:

$$\frac{d\varphi^2}{k'^2} = \frac{\Omega_{xx}\,\Omega_{zz} - \Omega^2_{xz}}{\Omega^2_{xx}\,(1 - R)} = \frac{ds^2}{k^2}\,\frac{1}{1 - R},$$

oder:

$$\frac{ds^2}{k^2} = \frac{d\varphi^2}{k'^2}\,(R - 1)^2 = \frac{d\varphi^2}{k'^2}\left(\sin\frac{r}{k}\right)^2,$$

womit die bekannte Formel zwischen Bogenelement eines Kreises und zugehörigem Zentriwinkel erhalten ist:

$$\frac{s}{k} = \sin\frac{r}{k} \cdot \frac{\varphi}{k'},$$

und der in (5) berechnete Winkel zwischen den Strahlen y-z und y-t kann durch einen Bogen auf der Kugel (4) ersetzt werden, so daß auf der nicht-euklidischen Kugel dieselben trigonometrischen Formeln gelten wie auf der euklidischen Kugel.

4. Die angewandte Methode ist besonders geeignet, die Sätze über die Höhenlothe und die Mittellinien eines Dreiecks abzuleiten; es ist das schon von Coolidge geschehen[1]), weshalb wir darauf nicht mehr eingehen.

[1]) The Elements of non-euclidean geometry, Oxford 1902.