Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1922
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über nach Polynomen fortschreitende Reihen.

Von **Georg Faber.**

Vorgelegt in der Sitzung am 17. Juni 1922.

Vor einiger Zeit habe ich mich, ohne meine damaligen Ergebnisse zu veröffentlichen, mit der Darstellbarkeit analytischer Funktionen durch Reihen beschäftigt, die nach den Näherungsnennern

$$1) \quad Q_\nu(x) = x^\nu + a_{\nu-1}^{(\nu)} x^{\nu-1} + \cdots a_0^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots);$$
(Koeffizient von x^ν in $Q_\nu(x)$ gleich 1)

des Kettenbruchs

$$2) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{p(z)\,dz}{z-x} \qquad (p(x) \geqq 0; \quad -1 \leqq x \leqq 1)$$

fortschreiten. Inzwischen hat Herr Szegö die gleiche Frage gelöst und als Haupt- und Endergebnis mehrerer umfangreicher Abhandlungen folgenden Satz (mit gewissen einschränkenden Voraussetzungen über die nie negative Funktion $p(x)$) bewiesen (Math. Ann. 82 (1921), S. 193):

Jede auf der Strecke -1, $+1$ reguläre analytische Funktion $F(x)$ läßt sich in eine Reihe

$$3) \qquad F(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu Q_\nu(x)$$

entwickeln; diese konvergiert innerhalb der Ellipse mit den Brennpunkten -1, $+1$, die keinen singulären Punkt von $F(x)$ in ihrem Innern, wohl aber mindestens einen auf ihrem Rande hat. Außerhalb dieser Ellipse divergiert die Reihe (3). Die Koeffizienten a_ν ergeben sich in Anbetracht der Orthogonalitätsbeziehungen

4) $$\int_{-1}^{+1} Q_\mu(x)\, Q_\nu(x)\, p(x)\, dx = 0 \quad \text{für } \mu \neq \nu$$

durch die Formeln

5) $$a_\nu = \frac{1}{k_\nu^2} \int_{-1}^{+1} F(x)\, Q_\nu(x)\, p(x)\, dx, \quad \text{wo}$$

6) $$k_\nu^2 = \int_{-1}^{+1} Q_\nu^2(x)\, p(x)\, dx.$$

Falls die Summe der Halbachsen der obigen Ellipse $= R$ ist (ich nenne sie künftig die Ellipse R), gilt

7) $$\lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu k_\nu|} = \frac{1}{R}.$$

Da sich neuerdings die Mathematiker in erhöhtem Maße mit der Darstellung analytischer Funktionen durch polynomische Reihen beschäftigt haben, interessiert es vielleicht, wenn ich im folgenden meinen überaus einfachen Beweis des obigen Satzes mitteile und dann im Zusammenhang damit auf einige Fragen eingehe, die in anderer Richtung liegen, als die sonstigen bemerkenswerten Ergebnisse, die Herr Szegö auf seinem Wege gefunden hat.

§ I. Beweis des Hauptsatzes.

Ich mache vorerst die den Beweis ein wenig vereinfachende und hinterher leicht zu beseitigende Voraussetzung, daß $p(x)$ oberhalb einer endlichen Grenze $g > 0$ bleibt:

8) $$p(x) > g > 0 \qquad (-1 < x \leqq 1).$$

Mit g, g', g'', G, G', ... bezeichne ich stets endliche positive Konstante, mit ε_ν, ε'_ν, ε''_ν, ... positive Zahlen, die mit $1/\nu$ gegen Null konvergieren, endlich mit g_ν, g'_ν, g''_ν, G_ν, G'_ν, ...

positive Zahlen, deren positive ν^{te} Wurzeln mit unendlich wachsendem ν gegen 1 konvergieren. Ferner sei

$$9)\qquad P_\nu(x) = \frac{1}{2^{\nu-1}} \operatorname{arc\,cos} \cos x = x^\nu + \cdots,$$

es ist also

$$10)\qquad P_\nu(\cos\vartheta) = \frac{1}{2^{\nu-1}} \cos\nu\vartheta .$$

11) $L_\nu(x) = x^\nu + \cdots$ sei das mit $\dfrac{2^\nu(\nu!)^2}{(2\nu)!}$ multiplizierte Legendresche Polynom ν^{ter} Ordnung.

Dann ist

$$12)\qquad \begin{aligned} k_\nu^2 &= \int_{-1}^{+1} p(x)\,Q_\nu^2(x)\,dx > g\int_{-1}^{+1} Q_\nu^2(x)\,dx > g\int_{-1}^{+1} L_\nu^2(x)\,dx \\ &= \frac{2}{2\nu+1}\left[\frac{2^\nu(\nu!)^2}{(2\nu)!}\right]^2 > \frac{g'}{2^{2\nu}}; \end{aligned}$$

$$13)\qquad k_\nu^2 \leqq \int_{-1}^{+1} p(x)\,P_\nu^2(x)\,dx < \frac{1}{2^{2\nu-2}}\int_{-1}^{+1} p(x)\,dx < \frac{G}{2^{2\nu}} .$$

Aus (12), (13) folgt

$$14)\qquad \lim_{\nu\to\infty} \left|k_\nu^{\frac{1}{\nu}}\right| = \tfrac{1}{2} .$$

Ferner ist

$$15)\qquad \int_{-1}^{+1} Q_\nu^2(x)\,dx < \frac{1}{g}\int_{-1}^{+1} p(x)\,Q_\nu^2(x)\,dx < \frac{G}{g\,2^{2\nu}} \quad \text{(s. (13))}.$$

Um so mehr ist

$$16)\qquad \int_{-1}^{x} Q_\nu^2(x)\,dx < \frac{G}{g\,2^{2\nu}}, \quad \text{falls } -1 \leqq x \leqq +1,$$

und daher

$$Q_\nu^2(x) < \frac{G_\nu}{2^{2\nu}}\,{}^{1)} \quad (-1 < x < 1), \tag{17}$$

$$\frac{1}{\nu} \lg |Q_\nu(x)| < G\tfrac{1}{2} + \varepsilon_\nu. \tag{18}$$

Nun beachte man: wenn $x = \xi + i\eta$ gesetzt wird und $\sqrt{x^2 - 1}$ durch die Bedingung

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 1} : x = +1 \tag{19}$$

in der Umgebung des Punktes ∞ eindeutig gemacht wird, so ist das logarithmische Potential

---

1) Ist nämlich ein Polynom ν^{ten} Grades $\omega(x)$ in irgend einem Intervall J: $b - a$, $b + a$ der Länge $2a$ dem Betrage nach $< G$, so ist in J: $\omega'(x) < 4 a G \nu^2$. Durch die Substitutionen $\xi = (x - b) : 2a = \cos\vartheta$ möge $\omega(x)$ in $\chi(\xi)$ und $\varphi(\vartheta)$ übergehen; dann kann man $\varphi(\vartheta) = {}^1\!/_2\, b_0 + b_1 \cos\vartheta + \cdots + b_\nu \cos\nu\vartheta$ setzen, wo $|b_\mu| = \left|\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \varphi(\vartheta)\cos\mu\vartheta\, d\vartheta\right| < 2G$ ist. Da $\omega'(x) = -2a\,\varphi'(\vartheta) : \sin\vartheta$ ist, ergibt sich

$$|\omega'(x)| < 2a \sum_0^\nu{}^\mu\, |b_\mu| \left|\frac{\sin\mu\vartheta}{\sin\vartheta}\right| < 4 a G \nu^2, \text{ w. z. b. w.}$$

Im Hinblick auf Späteres möge hier noch der Beweis des folgenden Satzes angefügt werden:

In dem vergrößerten Intervall J': $b - a(1+\varepsilon)$, $b + a(1+\varepsilon)$, wo $\varepsilon > 0$, ist $|\omega(x)| < 2G(1 + 3\sqrt{\varepsilon})^\nu (\nu + 1)$. Ich beweise etwas allgemeiner: Die Funktion $|\chi(\xi)|$ ist auf der Ellipse mit den Brennpunkten $+1$, -1, die durch die Punkte $\pm(1+\varepsilon)$ hindurchgeht, $< 2G(1+3\sqrt{\varepsilon})^\nu (\nu+1)$. Auf dieser Ellipse, deren Halbachsensumme $= R$ sein möge, ist nämlich $|\cos\mu \arccos\xi| = \frac{1}{2}\,|(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^\mu + (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^\mu| \leq \frac{1}{2}(R^\mu + R^{-\mu}) < R^\mu$. Nun ist offenbar $R < 1 + 3\sqrt{\varepsilon}$, also $|\chi(\xi)|$ in J' kleiner als $2G\sum_0^\nu{}^\mu (1 + 3\sqrt{\varepsilon})^\mu < 2G(\nu+1)(1+3\sqrt{\varepsilon})^\nu$.

Die in dieser Fußnote abgeleiteten Abschätzungen können leicht durch viel genauere ersetzt werden; vgl. den Satz III auf S. 170 und insbesondere die in der Fußnote daselbst angeführte Abhandlung des Herrn S. Bernstein; vgl. a. M. Riesz, acta math., Bd. 40 (1916), S. 337; M. Fékéte, Journal f. d. reine u. angewandte Math., Bd. 146 (1916), S. 88.

20) $$u(\xi, \eta) = \lg \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{2} \right| \quad \text{konstant} = \lg \frac{R}{2}$$

auf jeder Ellipse $R > 1$; und dies gilt auch noch für die zur Strecke $-1, +1$ ausgeartete Ellipse $R = 1$.

Die logarithmischen Potentiale

21) $$w_\nu(\xi, \eta) = \frac{1}{\nu} \lg |Q_\nu(\xi + i\eta)| - u(\xi, \eta)$$

sind für jedes ν in der längs der Strecke $-1, +1$ aufgeschnittenen Ebene E' eindeutig und regulär (weil ja die Nullstellen aller Polynome $Q_\nu(x)$ auf dieser Strecke liegen); im Unendlichen nehmen sie alle den Wert

22) $$w_\nu(x) = 0$$

an. Nach (18), (20) ist der Maximalwert, den $w_\nu(\xi, \eta)$ auf der Strecke $-1, +1$ annimmt, $< \varepsilon_\nu$; um so mehr ist überall in E':

23) $$w_\nu(\xi, \eta) < \varepsilon_\nu.$$

Aus (22), (23) schließt man leicht

24) $$\lim_{\nu \to \infty} w_\nu(\xi, \eta) = 0 \text{ für alle Punkte } \xi, \eta \text{ in } E',$$

oder

25) $$\lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{\nu} \lg |Q_\nu(x)| = \lg \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{2} \right|.$$

Um (24) zu beweisen, denke man sich das Gebiet E' auf das Kreisgebiet $r < 1$ (r Abstand vom Nullpunkte) konform abgebildet der Art, daß dem Punkte $x = \infty$ der Punkt $r = 0$ entspricht. Jedem Punkte mit den Polarkoordinaten r, φ in diesem Kreisgebiet ordne man den nämlichen Potentialwert $w_\nu(r, \varphi) = w_\nu(\xi, \eta)$[1]) zu, der zu dem entsprechenden Punkte $x = \xi + i\eta$ in E' gehörte. Die Funktion $\overset{+}{w_\nu}(\psi)$ sei mit der Randfunktion $w_\nu(1, \psi)$ $(0 \leq \psi < 2\pi)$ identisch da, wo diese

[1]) Wegen der numerischen Übereinstimmung in entsprechenden Punkten sei es erlaubt, zwei verschiedene Funktionen mit dem nämlichen Buchstaben w_ν zu bezeichnen, wie es ja in Physik und Mechanik üblich ist.

$\geqq 0$ ist, sonst sei $w_\nu^+(\psi) = 0$; die ganz entsprechend gebildete nirgends positive Funktion $w_\nu^-(\psi)$ kann dann als durch die Identität

26) $$w_\nu^+(\psi) + w_\nu^-(\psi) = w_1(1, \psi)$$

erklärt angesehen werden; daß $w_\nu^-(\psi)$ für gewisse Werte ψ gleich $-\infty$ wird, ist für das folgende nicht störend. Nach (23) ist

27) $$w_\nu^+(\psi) < \varepsilon_\nu \text{ und also } 0 \leqq \int_0^{2\pi} w_\nu^+(\psi)\, d\psi < 2\pi\varepsilon_\nu.$$

Da ferner $w_\nu(r, \varphi)$ für $r = 0$ wegen (22) $= 0$ ist, hat man

28) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (w_\nu^+(\psi) + w_\nu^-(\psi))\, d\psi = 0,$$

also wegen (27):

29) $$0 \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_\nu^-(\psi)\, d\psi > -\varepsilon_\nu.$$

Für irgend einen Punkt r, φ des Kreisgebietes $r < 1$ ist nach dem Poissonschen Integralsatze

30) $$w_\nu(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(w_\nu^+(\psi) + w_\nu^-(\psi))(1 - r^2)}{1 - 2r\cos(\psi - \varphi) + r^2}\, d\psi$$

$$> \frac{1 - r^2}{(1 + r)^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_\nu^+(\psi)\, d\psi + \frac{(1 - r^2)}{(1 - r)^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_\nu^-(\psi)\, d\psi$$

$$> \frac{1 + r}{1 - r}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_\nu^-(\psi)\, d\psi > -\varepsilon_\nu\,\frac{1 + r}{1 - r} \quad \text{(nach (29))}.$$

Dagegen ist wegen (23):

31) $$w_\nu(r, \varphi) < \varepsilon_\nu.$$

Aus (30), (31) ergibt sich

32) $$\lim_{\nu \to \infty} w_\nu(r, \varphi) = \lim_{\nu \to \infty} w_\nu(\xi, \eta) = 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Aus (20) und (25) folgt nun weiter

33) $$\lim_{\nu \to \infty} \left| \sqrt[\nu]{Q_\nu(x)} \right| = \frac{R}{2}$$

für alle Punkte der Ellipse R.

Daher konvergiert, wenn

34) $$\lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \frac{2}{R} \quad (< 2)$$

ist (was wegen (14) mit (7) gleichbedeutend ist) die Reihe

35) $$\sum_0^\infty {}^\nu \, a_\nu \, Q_\nu(x)$$

gleichmäßig in jedem Gebiet, das ganz innerhalb der Ellipse R liegt, während außerhalb dieser Ellipse Divergenz stattfindet.

Umgekehrt sei eine analytische Funktion $F(x)$ vorgelegt, die im Innern der Ellipse $R\,(> 1)$ regulär und eindeutig sei, auf dieser aber mindestens eine singuläre Stelle besitze; und es soll gezeigt werden, daß $F(x)$ durch eine im Innern der Ellipse R konvergente Reihe der Form (35) dargestellt werden kann, und zwar mit eindeutig bestimmten Koeffizienten

36) $$a_\nu = \frac{1}{k_\nu^2} \int_{-1}^{+1} F(x)\, Q_\nu(x)\, p(x)\, d\,x\,.$$

Zum Beweise gehe man davon aus, daß bekanntlich $F(x)$ im Innern der Ellipse R durch eine Reihe

37) $$F(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \, b_\nu \, P_\nu(x)$$

dargestellt werden kann (vgl. (9), (10)) mit

38) $$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \left| \sqrt[\nu]{b_\nu} \right| = \frac{2}{R}\,{}^{1)} \quad (R > 1)\,.$$

[1]) Aus der Darstellung (38) folgt nebenbei noch folgendes: Ist $F(x)$ eine im Intervall $-1, +1$ gegebene Funktion und $\Pi_\nu(x)$ des Polynoms ν^{ten} Grades, für das das Maximum der Differenz $|F(x) - \Pi_\nu(x)|$ möglichst klein $(= \vartheta_\nu^\nu)$ ausfällt, so ist $\lim\limits_{\nu \to \infty} \vartheta_\nu$ dann und nur dann $= \dfrac{1}{R} < 1$,

Bildet man für diese Funktion (37) die Koeffizienten a_ν (36), so erhält man

39) $$a_\mu = \frac{1}{k_\mu^2} \sum_\mu^\infty{}^\nu b_\nu \int_{-1}^{+1} P_\nu(x)\, Q_\mu(x)\, p(x)\, dx,$$

40) $$|a_\mu| < (2+\varepsilon_\mu)^{2\mu} \sum_\mu^\infty{}^\nu \frac{(2+\varepsilon_\nu)^\nu}{R^\nu} \frac{G'}{2^\nu \cdot 2^\mu} \int_{-1}^{+1} p(x)\, dx$$
$$< \left(\frac{2}{R}\right)^\mu \cdot G'_\mu, \text{ also}$$

41) $$\overline{\lim_{\mu \to \infty}} \sqrt[\mu]{|a_\mu|} \leqq \frac{2}{R}.$$

Die mit diesen Koeffizienten gebildete Reihe (35) konvergiert somit im Innern der Ellipse R; es ist leicht zu zeigen, daß sie auch die gegebene Funktion $F(x)$ darstellt, woraus dann ohne weiteres folgt, daß in (41) das Zeichen $=$, nicht $<$ gilt. Jedenfalls stellt die Reihe (35) eine im Innern der Ellipse R reguläre analytische Funktion $\Phi(x)$ dar, die also in eine Reihe

42) $$\Phi(x) = \sum_0^\infty{}^\nu B_\nu P_\nu(x)$$

entwickelbar ist, wo für $n = 0, 1, 2, \ldots$:

43) $$B_n = \frac{2^{2n-2}}{\pi} \sum_n^\infty{}^\mu a_\mu \int_{-1}^{+1} Q_\mu(x)\, P_n(x)$$

$$= \frac{2^{2n-2}}{\pi} \sum_n^\infty{}^\mu \sum_\mu^\infty{}^\nu \frac{1}{k_\mu^2} b_\nu \int_{-1}^{+1} P_\nu(x) Q_\mu(x) p(x) dx \int_{-1}^{+1} Q_\mu(x) P_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(vgl. (39)).

---

wenn $F(x)$ innerhalb der Ellipse R regulär ist, auf dieser aber mindestens eine singuläre Stelle besitzt. Dagegen gilt nur $\lim\limits_{\nu \to \infty} \nu^k \vartheta_\nu^\nu = 0$ für jedes $k > 0$, falls $F(x)$ auf der Strecke $-1, +1$ überall unendlich oft differenzierbar ist. Wenn also z. B. $x = \cos\vartheta$, $F(x) = \sum\limits_1^\infty{}^\nu \frac{1}{B_\nu^{m_\nu}} \cos B_\nu \vartheta$ gesetzt wird, wo B_1 ganzzahlig, $B_{\nu+1} : B_\nu$ ganzzahlig > 1, $\lim\limits_{\nu\to\infty} m_\nu = \infty$, $\lim\limits_{\nu \to \infty} (m_\nu \lg B_\nu) : B_\nu = 0$, so ist $F(x)$ an jeder Stelle der Strecke $-1, +1$ unbeschränkt differenzierbar, an keiner regulär analytisch.

Daß die hier rechts stehende Doppelreihe absolut konvergiert, ist ohne weiteres ersichtlich (vgl. (17)).

Der zu führende Beweis der Identität $\Phi(x) = F(x)$ wird erbracht sein, wenn gezeigt ist, daß aus (43)

44) $$B_n = b_n$$

folgt. Nun sind aber offenbar in den Darstellungen

45) $$P_\nu(x) = \sum_0^\nu{}^\mu \beta_\mu^{(\nu)} Q_\mu(x),$$

46) $$Q_\mu(x) = \sum_0^\mu{}^n \alpha_n^{(\mu)} P_n(x)$$

die Koeffizienten

47) $$\beta_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{k_\mu^2} \int_{-1}^{+1} P_\nu(x)\, Q_\mu(x)\, p(x)\, dx,$$

48) $$\alpha_n^{(\mu)} = \frac{2^{2n-2}}{\pi} \int_{-1}^{+1} Q_\mu(x)\, P_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

eindeutig bestimmt; durch Einsetzen von (46) in (45) ergeben sich daher die Identitäten:

49) $$\alpha_\nu^{(\nu)} \beta_\nu^{(\nu)} = 1, \quad \sum_n^\nu{}^\mu \alpha_n^{(\mu)} \beta_\mu^{(\nu)} = 0, \text{ falls } \nu > n.$$

Mit Benutzung von (47), (48) läßt sich (43) so schreiben:

50) $$B_n = \sum_n^\infty{}^\nu \left(b_\nu \sum_n^\nu{}^\mu \alpha_n^{(\mu)} \beta_\mu^{(\nu)} \right);$$

es ist also wegen (49)

51) $$B_n = b_n \; (n = 0, 1, 2, \ldots), \text{ w. z. b. w.}$$

Daß die so bewiesene Darstellung der gegebenen Funktion $F(x)$ durch eine auf der Strecke $-1, +1$ gleichmäßig konvergente Reihe der Form (35) nur auf eine Weise, nämlich mit den Koeffizienten (36) möglich ist, leuchtet unmittelbar ein, denn aus

52) $$F(x) = \sum_0^\infty{}^\nu a'_\nu Q_\nu(x)$$

folgt durch gliedweise Integration nach Multiplikation mit $p(x)$:

53) $$a'_\nu = \frac{1}{k_\nu^2}\int_{-1}^{+1} F(x)\, Q_\nu(x)\, p(x)\, dx = a_\nu.$$

Dagegen würde es zweifellos, genau wie bei den Fourierschen Reihen, eines weiteren Ausholens bedürfen, wenn man beweisen wollte, daß überhaupt keine zweite Darstellung (52) der Funktion $F(x)$ möglich wäre, auch keine ungleichmäßig konvergente oder in einzelnen Punkten versagende; von vornherein ist klar, daß eine solche zweite Darstellung jedenfalls für keinen Punkt außerhalb der Strecke $-1, +1$ konvergieren könnte.

§ 2. Ergänzungen. Abschätzung von Polynomen.

Die bisherige Voraussetzung $p(x) > g$ möge nun durch folgende ersetzt werden:

Außerhalb einer endlichen Anzahl m von Intervallen der Gesamtlänge ε_ν sei

54) $$p(x) > g_\nu$$

($\lim\limits_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = 0$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{g_\nu} = 1$; es würde übrigens keine Erschwerung des Beweises bedeuten, wenn man m durch m_ν mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} m_\nu = \infty$ ersetzen wollte).

Bei dem folgenden Beweise dürfen und wollen wir der Einfachheit halber $m = 1$ voraussetzen; i_ν sei dann das Intervall der Länge ε_ν, J_ν der Rest der Strecke $-1, +1$. Für J_ν gibt es ein Tschebyscheffsches Polynom ν^{ter} Ordnung

55) $$T_\nu(x) = x^\nu + \cdots,$$

dessen Maximalbetrag in J_ν möglichst klein $= \vartheta_\nu^\nu$ ist. J_ν kann aus einem oder aus zwei Intervallen bestehen. Im ersteren Falle ist

56) $$\vartheta_\nu^\nu = 2\left(\frac{2-\varepsilon_\nu}{4}\right)^\nu.$$

Es ergibt sich dies sofort daraus, daß die Strecke J_ν durch die Substitution von const. $+ x:(2-\varepsilon_\nu)$ an Stelle von x aus der Strecke $-1, +1$ entsteht, und daß für die zur Strecke $-1, +1$ gehörigen Tschebyscheffschen Funktionen (9) $\vartheta_\nu^\nu = 2^{-\nu+1}$ ist. Besteht aber J_ν aus 2 Strecken $-1, a$ und $b, +1$, wo $b - a = \varepsilon_\nu$, so ist

57) $$\vartheta_\nu^\nu < 2\left(\frac{2-\varepsilon_\nu}{4}\right)^\nu,$$

aber natürlich $< 2^{-\nu+1}$.

Um (57) zu beweisen, ersetze man jede Nullstelle ξ des Polynoms $T_\nu(x)$, die $> b$ ist, durch $\xi - \varepsilon_\nu$ und eine etwa im Intervall a, b gelegene Nullstelle durch a. Dadurch geht $T_\nu(x)$ in ein Polynom $\overline{T_\nu(x)} = x^\nu + \cdots$ über, dessen Maximalwert auf der Strecke $-1, 2-\varepsilon_\nu$ einerseits nach (56) $> 2\left(\frac{2-\varepsilon_\nu}{4}\right)^\nu$ ist, während er andererseits offenbar kleiner als der Maximalwert von $|T_\nu(x)|$ in J_ν ist. Aus (56), (57) folgt, gleichviel, aus wie viel Strecken J_ν besteht,

58) $$\vartheta_\nu = \frac{1-\varepsilon_\nu'}{2}.$$

Mit $L_\nu(x)$ bezeichne ich das Polynom ν^{ten} Grades

59) $$L_\nu(x) = x^\nu + \cdots,$$

für das

60) $$\int_{J_\nu} L_\nu^2(x)\,dx$$

möglichst klein ausfällt; dieser Minimalwert sei $\varkappa_\nu^\nu$. Indem man zum Vergleich die Polynome (11) heranzieht, beweist man

61) $$\varkappa_\nu = \frac{1-\varepsilon_\nu''}{2}$$

genau wie (58).

Die Polynome $Q_\nu(x)$ und die Konstanten k_ν sollen die gleiche Bedeutung haben wie in § 1, nur mit Voraussetzung (54) statt (8). Dann tritt an Stelle von (12) folgende Ungleichung

$$62)\quad k_\nu^2 > \int_{J_\nu} p(x)\, Q_\nu^2(x)\, dx > g_\nu \int_{J_\nu} L_\nu^2(x)\, dx > \frac{g'_\nu}{2^{2\nu}} \quad \text{(wegen (61))}.$$

Da die Ungleichung (13) neben (62) ohne weiteres auch jetzt gilt, ist das Weiterbestehen von

$$14)\quad \lim_{\nu \to \infty} \left| k_\nu^{\frac{1}{\nu}} \right| = \tfrac{1}{2}$$

auch unter der Voraussetzung (54) bewiesen.

Die Ungleichung (15) überträgt sich ohne weiteres nur in der Form

$$63)\quad \int_{J_\nu} Q_\nu^2(x)\, dx < \frac{G_\nu}{2^{2\nu}}$$

und hieraus folgt (wie (17) aus (15)):

$$64)\quad \left| Q_\nu^2(x) \right| < \frac{G'_\nu}{2^{2\nu}}$$

für alle x in J_ν. Daß dann aber ganz von selber (64) auch für alle x der Strecke -1, $+1$ gilt, ergibt sich sofort aus dem zweiten der beiden in der Fußnote S. 160 bewiesenen Sätze. Nachdem aber einmal das Fortbestehen der Beziehungen (14), (17) auch unter der erweiterten Voraussetzung (54) festgestellt ist, verläuft der Rest des Beweises wörtlich wie in § 1.

Ganz anders werden die Verhältnisse, wenn wir nunmehr voraussetzen, daß $p(x)$ auf einer Anzahl m von Teilstrecken i_1, i_2, ... i_m des Intervalls -1, $+1$ identisch Null ist. J sei der Rest dieses Intervalls nach Abzug der Strecken $i_1, i_2, \ldots i_m$; J besteht also aus einer Anzahl Strecken $J_1, J_2, \ldots J_k$, wo $k \geqq m - 1$ und $\leqq m + 1$ ist; in J möge $p(x)$ der Bedingung (8) oder (54) genügen. Ich schicke einige Hilfssätze voraus, die zum Teil auch abgesehen von ihrer Anwendung auf die vorliegende Aufgabe mitteilenswert erscheinen und die ich daher gleich etwas allgemeiner fasse, als für den augenblicklichen Zweck nötig wäre.

In der $x = \xi + i\eta$-Ebene sei ein p fach zusammenhängendes, den Punkt ∞ enthaltendes Gebiet G gegeben; jeder der p Ränder $C_1, C_2, \ldots C_p$ von G darf aus einer einfachen Jordan-Kurve oder auch aus einem geradlinigen oder krummlinigen Schlitze bestehen. Mit Γ bezeichne ich den aus C_1, $C_2, \ldots C_p$ bestehenden Gesamtrand von G, mit $z = \xi' + i\eta'$ irgend einen Punkt von Γ.

$u(\xi, \eta)$ sei das logarithmische Potential einer einfachen Belegung

65) $$u(\xi, \eta) = \int_{\Gamma} \lg|z - x|\,\mu(z)\,|dz|,$$

das durch folgende Bedingungen eindeutig bestimmt ist:

66) $$\lim_{\xi^2+\eta^2 \to \infty} (u(\xi, \eta) - \lg|x|) = 0,$$

67) $$u(\xi, \eta)$$

nimmt einen und den nämlichen konstanten Wert $\lg \varrho$ in allen Punkten des Gesamtrandes Γ an. Mit Γ_σ bezeichne ich die Kurve

68) $$u(\xi, \eta) = \lg \sigma \; (> \lg \varrho);$$

Γ_ϱ ist also so viel wie Γ.

Es gibt eine untere Grenze τ, der Art, daß für $\sigma > \tau$ keine Kurve Γ_σ einen Doppelpunkt hat; nur im Falle $p = 1$ ist $\tau = \varrho$.

$q_n(x)$ sei irgend ein Polynom n^{ten} Grades der Form

69) $$q_n(x) = x^n + \cdots$$

I. Satz: Das Maximum von $|q_n(x)|$ auf Γ_σ ist $\geqq \sigma^n$.

Das logarithmische Potential

70) $$\frac{1}{n} \lg|q_n(x)| - u(\xi, \eta)$$

verschwindet im Unendlichen (wegen (66), (69)). Es nimmt also in dem unendlichen von Γ_σ begrenzten abgeschlossenen Gebiete seinen Maximalwert auf Γ_σ an, und dieser ist nicht negativ. D. h. aber das Maximum von $\frac{1}{n}\lg|q_n(x)|$ auf Γ_σ ist $\geqq \lg\sigma$. Das Zeichen $=$ kann hier offenbar nur dann gelten, wenn das Potential (70) identisch Null ist.

II. Satz: Es gibt Polynome $q_n(x)$ der Form (69), deren Betrag auf $\Gamma_\sigma < (\sigma + \varepsilon_n)^n$ ist mit $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$; und zwar gilt dies gleichmäßig für alle $\sigma > \sigma'$, falls nur $\sigma' > \varrho$ ist.

Denn (ein hinreichend großes n von vornherein vorausgesetzt) kann man in einem beliebig vorgeschriebenen Teilgebiete G' von G die rechte Seite von (65) mit beliebiger Annäherung durch eine Summe

$$71)\qquad \sum_1^m {}^i \frac{\mu_i}{n} \lg|z_i - x|$$

ersetzen, wo die z_i-Punkte auf Γ und μ_i positive ganze Zahlen sind, deren Summe $= n$ ist. Das Polynom

$$72)\qquad \prod_1^m {}^i (x - z_i)^{\mu}$$

hat dann die verlangte Eigenschaft.

III. Satz:[1]) Ist auf irgend einer Kurve Γ_σ (einschließlich des Grenzfalles $\Gamma_\varrho = \Gamma$) der Betrag irgend eines Polynoms n^{ten} Grades $k_n(x)$ kleiner als L, so ist auf einer Kurve Γ_ω, wo $\omega > \sigma$ ist,

$$73)\qquad |k_n(x)| < L\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)^n.$$

Das logarithmische Potential

$$74)\qquad \frac{1}{n}\lg|k_n(x)| - \mu(\xi,\eta)$$

besitzt nämlich auf Γ_ω einen jedenfalls nicht größeren Maximalwert als auf Γ_σ.

---

[1]) In dem besonderen Fall, wo Γ aus einer Strecke besteht, schon von S. Bernstein bewiesen: Mém. publiés par l'Acad. des sciences de Belgique 1912.

Diesem Satze kann der folgende gegenüber gestellt werden:

IV. Satz: Hat das Polynom $k_n(x)$ im Außengebiet von Γ_σ und auf Γ_σ keine Nullstellen und ist auf Γ_σ

$$|k_n(x)| > l, \tag{75}$$

so ist auf Γ_ω, falls $\omega > \sigma$:

$$|k_n(x)| > l\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)^n. \tag{76}$$

Das Minimum des Potentials (74) ist nämlich auf Γ_ω nicht kleiner als auf Γ_σ.

Ferner gilt der folgende

V. Satz: Sind $q_n(x) = x^n + \cdots$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ Polynome mit dem Koeffizienten 1 der höchsten Potenz, und liegt keine Nullstelle dieser Polynome im Außengebiet von Γ_σ $(\sigma \geqq \varrho)$, ist ferner (was nach Satz II möglich ist), für einen Wert $\sigma' \geqq \sigma$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\begin{matrix}\text{Maximum von } |q_n(x)|^{\frac{1}{n}}\\ \text{auf } \Gamma_{\sigma'}\end{matrix}\right) = \sigma', \tag{77}$$

so konvergiert die Folge

$$\sqrt[n]{\frac{1}{q_n(x)}} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{78}$$

wo die n^{ten} Wurzeln durch die Bedingung

$$\lim_{x\to\infty} x\sqrt[n]{\frac{1}{q_n(x)}} = 1 \tag{79}$$

eindeutig definiert sind, gleichmäßig im Außengebiete G_λ von Γ_λ, falls nur $\lambda > \sigma$, gegen eine reguläre analytische für $x = \infty$, aber sonst nirgends in G_λ verschwindende Funktion $F(x)$ und es ist in G_λ

$$-\lg|F(x)| = u(\xi, \eta). \tag{80}$$

Insbesondere hat also die Beziehung (77) die viel bestimmtere

81) $$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|q_n(x)|} = \lambda\,^{1})$$

gleichmäßig für alle x auf Γ_λ und alle $\lambda > \sigma$ zur Folge.

Jedenfalls kann man nach einem bekannten Montelschen Satze aus der Folge (78) eine Teilfolge auswählen, die in G_λ gleichmäßig gegen eine reguläre für $x = \infty$ aber nirgends sonst verschwindende Funktion $f(x)$ konvergiert. Auf $\Gamma_{\sigma'}$ ist

82) $$\text{Maximum von } |f(x)|^{-1} = \sigma'.$$

Im Außengebiet von $\Gamma_{\sigma'}$ ist also das Potential

83) $$-\lg|f(x)| - u(\xi, \eta)$$

das auf der Randkurve $\Gamma_{\sigma'}$ seinen Maximalwert Null erreicht < 0 und identisch Null, wenn es in einem inneren Punkte dieses Außengebietes verschwindet, was tatsächlich für $x = \infty$ stattfindet. Die Funktion $f(x)$ hat somit alle von $F(x)$ behaupteten Eigenschaften, und es braucht nur noch gezeigt zu werden, daß die Folge (78) selbst, nicht nur eine aus ihr herausgehobene Teilfolge konvergiert. Wäre das nicht der Fall, so konnte man aus (78) eine zweite Teilfolge herausheben, die gegen eine andere Funktion als $f(x)$, etwa $\varphi(x)$ in G_λ konvergiert; dann würde aber wieder

84) $$-\lg|\varphi(x)| \equiv u(\xi, \eta), \text{ also } |\varphi(x)| = |f(x)|$$

folgen; nach dieser Gleichung könnte sich $\varphi(x)$ nur durch einen konstanten Faktor vom Betrage 1 von $f(x)$ unterscheiden; da aber $\lim\limits_{x \to \infty} (\varphi(x) : f(x)) = 1$ ist, hat die Annahme, $\varphi(x)$ sei nicht mit $f(x)$ identisch, auf einen Widerspruch geführt. Die Gleichmäßigkeit der Konvergenz der Folge (78) in G_λ ist selbstverständlich, da jede in einem Gebiete G_λ konvergente

---

[1]) Falls die Randkurve Γ aus der Strecke $-1, +1$ besteht, ist die Behauptung (81) offenbar mit (33) identisch. Doch ist das dort benutzte einfache Beweisverfahren nur anwendbar, wenn das Außengebiet der Kurve Γ_σ einfach zusammenhängend ist. Durch das oben Bewiesene wird zugleich eine Vermutung bestätigt, die ich in einer früheren Arbeit (Math. Ann. 64 (1907), S. 121, Gl. (20)) ausgesprochen habe.

Folge beschränkter analytischer Funktionen in G_λ gleichmäßig konvergiert.

Wir nehmen nun an, die Kurve $\Gamma\,(=\Gamma_\varrho)$ bestehe aus den doppelt zählenden, S. 168 eingeführten Strecken $J_1, J_2, \ldots J_k$; das Außengebiet von Γ ist also ein sog. Schlitzbereich.

$$T_\nu(x) = x^\nu + \cdots \tag{85}$$

sei das zu $J = J_1 + J_2 + \cdots + J_k$ gehörige Tschebyscheffsche Polynom ν^{ter} Ordnung; sein Maximalwert auf J sei ϱ_ν^ν, dann folgt aus den Sätzen I, II sofort, daß

$$\lim_{\nu \to \infty} \varrho_\nu = \varrho \tag{86}$$

ist. Es ist einleuchtend, daß die sämtlichen Nullstellen der Polynome $T_\nu(x)$ auf der Strecke $-1, +1$ liegen, auch ist leicht einzusehen, daß in jedem der Intervalle $i_1, i_2, \ldots i_m$, die mit $J_1, J_2, \ldots J_k$ zusammen die Strecke $-1, +1$ ausfüllen, höchstens eine Nullstelle von $T_\nu(x)$ liegt[1]). Lägen nämlich beispielsweise in i_k zwei Nullstellen x' und $x'' > x'$ von $T_\nu(x)$ und würde man dann $\varepsilon > 0$ so klein wählen, daß auch die Punkte $x' - \varepsilon$ und $x'' + \varepsilon$ in i_k liegen, so würde die Ersetzung der beiden Faktoren $(x - x')$, $(x - x'')$ in $T_\nu(x)$ durch $(x - (x' - \varepsilon))$, $(x - (x'' + \varepsilon))$ bewirken, daß das so aus $T_\nu(x)$ hervorgehende Polynom an jeder Stelle in J, die keine Nullstelle von $T_\nu(x)$ ist, einen dem Betrage nach kleineren Wert annimmt als $T_\nu(x)$, was im Widerspruch steht mit der Definition des Tschebyscheffschen Polynoms $T_\nu(x)$.

Wir zerlegen $T_\nu(x)$ in zwei Faktoren:

$$T_\nu(x) = t_{\nu-\beta}(x)\,\tau_\beta(x) = (x^{\nu-\beta} + \cdots)\,(x^\beta + \cdots), \tag{87}$$

deren zweiter gerade an den in den Intervallen $i_1, i_2, \ldots i_m$ gelegenen Nullstellen von $T_\nu(x)$ verschwindet; sind solche nicht vorhanden, so ist $\tau_\beta(x) \equiv 1$. Jedenfalls also ist der Grad β von τ_β höchstens gleich m.

---

[1]) Es kommen nur solche Intervalle i_l in Frage, die ganz im Innern der Strecke $-1, +1$ liegen; denn es ist von vornherein klar, daß in einem Intervall i_l, das einen der Punkte ± 1 zum einen Endpunkt hat, keine Nullstelle von $T_\nu(x)$ liegen kann.

$$L_\nu(x) = x^\nu + \cdots \tag{88}$$

habe die Eigenschaft, daß

$$\int\limits_J L_\nu^2(x)\,dx \tag{89}$$

möglichst klein ausfällt; dieser Minimalwert ist $g_\nu'' \varrho_\nu^{2\nu}$; denn einerseits ist er $\leqq \int\limits_J T_\nu^2(x)\,dx < \varrho_\nu^{2\nu}$ mal der Summe der Längen der Intervalle $J_1, J_2, \ldots J_k$. Andererseits aber würde die Annahme, (89) sei für unendlich viele ν kleiner als $(\varrho_\nu a)^{2\nu}$, mit $a < 1$ durch den Schluß, der von (15) zu (17) führte, ergeben, daß für jene ν

$$|L_\nu(x)| < G_\nu (a\,\varrho_\nu)^\nu \text{ in } J \tag{90}$$

wäre, was wieder einen Widerspruch mit der Definition der Tschebyscheffschen Polynome bedeutet.

Jetzt aber ist alles so weit geklärt, daß man die Gleichungen

$$\lim_{\nu\to\infty} |\sqrt[\nu]{k_\nu}| = \varrho, \tag{91}$$

$$|Q_\nu(x)| < G_\nu\,\varrho^\nu \text{ in } J \tag{92}$$

genau wie zuvor die Gleichungen (14), (64) beweisen kann.

Nun besitzt $Q_\nu(x)$ genau wie $T_\nu(x)$ in jedem der Intervalle $i_1, i_2, \ldots i_m$ höchstens eine Nullstelle, so daß eine (87) ganz entsprechende Zerlegung

$$Q_\nu(x) = q_{\nu-\gamma}(x)\,\varkappa_\gamma(x) \tag{93}$$

möglich ist. Aus (92) folgt dann nach Satz V an Stelle von (81) zunächst nur

$$\lim_{\nu\to\infty} |q_{\nu-\beta}(x)|^{\frac{1}{\nu-\beta}} = \lambda \tag{94}$$

gleichmäßig auf C_λ, während die allgemeinere Beziehung

$$\lim_{\nu\to\infty} |Q_\nu(x)|^{\frac{1}{\nu}} = \lambda \tag{95}$$

für gewisse Punkte der Strecken $i_1, i_2, \ldots i_m$, die übrigens nur eine Menge vom Maße Null bilden, nicht zu gelten braucht.

Um die Reihen $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu Q_\nu(x)$ zu untersuchen, bilde man

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \frac{1}{a}. \tag{96}$$

Es sei 1) $a > \tau$[1]) (vgl. S. 169).

Dann konvergiert die Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu Q_\nu(x)$ in dem einfach zusammenhängenden Innengebiet der Kurve Γ_a, während sie außerhalb divergiert. Die durch die Reihe dargestellte Funktion hat auf der Kurve Γ_a mindestens eine singuläre Stelle. Umgekehrt läßt sich jede im Innern von Γ_a reguläre analytische Funktion $F(x)$ in eine Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu Q_\nu(x)$ entwickeln mit eindeutig bestimmten Koeffizienten a_ν. Ist 2) $\varrho < a < \tau$, so konvergiert die Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu Q_\nu(x)$ wieder im Innengebiet von Γ_a, aber dieses besteht jetzt aus mehreren getrennten Bereichen, in denen die angegebene Reihe verschiedene analytische Funktionen darstellen kann. Auch ist es möglich, daß die Reihe in einzelnen außerhalb Γ_a gelegenen Ausnahmepunkten der Intervalle $i_1, i_2, \ldots i_m$ konvergiert.

§ 3. Ergänzungen. Zusätze.

Nur um mit einer bestimmten Vorstellung zu rechnen und um des dadurch ermöglichten bequemeren Ausdrucks willen setze ich im folgenden voraus, daß $p(x)$ auf keiner Teilstrecke des Intervalls $-1, +1$ identisch Null ist; die Ergebnisse und Beweise übertragen sich leicht sinngemäß auf den allgemeinen Fall.

---

[1]) τ kann im vorliegenden Falle offenbar auch so definiert werden: $\tau = \overline{\lim_{\nu \to \infty}}$ Maximum von $\sqrt[\nu]{|Q_\nu(x)|}$ für alle x des Intervalls $-1, +1$.

Als Zähler $Z_\nu(z)$ des Kettenbruchs für das Integral (2) findet man bekanntlich

$$97)\qquad Z_\nu(z) = -\int_{-1}^{+1} \frac{Q_\nu(x) - Q_\nu(z)}{x - z}\, p(x)\, dx\,.$$

Für alle z eines unendlichen Gebietes T, das ganz außerhalb der Strecke $-1,\ +1$ liegt und für alle x dieser Strecke gilt nach dem in § 1 und 2 Bewiesenen

$$98)\qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{Q_\nu(x)}{Q_\nu(z)} = 0\,.$$

Daher folgt aus (97):

$$99)\qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{Z_\nu(z)}{Q_\nu(z)} = \int \frac{p(x)\,dx}{x - z}$$

gleichmäßig für alle z in T[1]).

Aus (99) ergibt sich weiter für alle z in T:

$$100)\qquad \lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\left|\frac{Z_\nu(z)}{Q(z)}\right|} = 1$$

und also wegen (33):

$$101)\qquad \lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu-1]{|Z_\nu(z)|} = \frac{R}{2}$$

für alle Punkte z der Ellipse R.

Die Reihe $\sum\limits_0^\infty{}_\nu\, a_\nu Z_{\nu+1}(z)$ konvergiert daher genau wie die Reihe $\sum\limits_0^\infty{}_\nu\, a_\nu Q_\nu(z)$ im Innern der Ellipse R und divergiert außerhalb, wenn

$$102)\qquad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \frac{2}{R} < 2$$

vorausgesetzt wird. Es läßt sich auch umgekehrt leicht zeigen,

[1]) Für (99) gibt es einen ganz anderen Beweis von Markoff; s. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, S. 385.

daß jede im Innern dieser Ellipse reguläre analytische Funktion sich in eine Reihe $\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu Z_{\nu+1}(z)$ mit eindeutig bestimmten Koeffizienten a_ν entwickeln läßt; nur gibt es für diese nach Kettenbruchzählern fortschreitende Reihen nicht so einfache Koeffizientenformeln wie für die Reihen nach Kettenbruchnennern.

Ferner ist klar, daß jede im Innern einer Ellipse R reguläre Funktion daselbst als Grenzwert der Lagrangeschen Interpolationsformel dargestellt werden kann, wenn als Interpolationsstellen die Nullstellen der Polynome $Q_\nu(x)$ (oder auch $Z_\nu(x)$) gewählt werden.

Endlich beweist man leicht, daß für die Anzahl n_ν der auf einer Teilstrecke a, b ($> a$) der Strecke -1, $+1$ gelegenen Nullstellen des Polynoms $Q_\nu(x)$ (oder auch $Z_\nu(x)$) die Formel

103) $$\lim_{\nu \to \infty} \frac{n_\nu}{\nu} = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

gilt. Allgemein sind die Nullstellen von $Q_\nu(x)$ für $\nu \to \infty$, auch wenn Intervalle $i_1, \ldots i_m$, in denen $p(x) \equiv 0$ ist, zugelassen werden, auf die Intervalle $J_1, J_2, \ldots J_k$ nach dem gleichen Gesetze verteilt wie die Elektrizitätsmenge 1, falls die als unendlich dünne leitende Stäbe aufzufassenden Strecken J_1, $J_2, \ldots J_k$ durch diese Belegung alle auf das gleiche konstante Potential gebracht werden sollen.

Hat man neben dem Integral (2) noch ein zweites

104) $$\int_{-1}^{+1} \frac{p_1(x)\,dx}{x-z}$$

wo $p_1(x)$ in keinem Teilintervall der Strecke -1, $+1$ identisch verschwindet, in dem $p(x)$ nicht identisch verschwindet, und umgekehrt, bedeutet ferner $S_\nu(z)$ einen Näherungszähler oder Nenner ν^{ten} Grades des Kettenbruchs für das eine oder andere dieser Integrale und ist endlich

105) $$U_\nu(z) = -\int_{-1}^{+1} \frac{S_\nu(x) - S_\nu(z)}{x - z}\, p(x)\, dx,$$

so ist wegen

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{S_\nu(x)}{S_\nu(z)} = 0$$

(für irgend ein z außerhalb der Strecke $-1, +1$ und alle x auf dieser Strecke):

107) $$\lim_{\nu \to \infty} \frac{U_\nu(z)}{S_\nu(z)} = \int_{-1}^{+1} \frac{p(x)\, dx}{x - z}.$$

Das ist eine sehr weit reichende Verallgemeinerung des Markoffschen Satzes (99).

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1922

Band/Volume: 1922

Autor(en)/Author(s): Faber Georg

Artikel/Article: Über nach Polynomen fortschreitende Reihen 157-178