Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1922
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Zur topologischen Untersuchung geometrischer Gebilde.

Von H. Künneth in Erlangen.

Vorgelegt von W. v. Dyck in der Sitzung am 17. Juni 1922.

Die einfachsten unterscheidenden Merkmale mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten sind vom Standpunkt der Analysis situs aus die als „Bettische Zahlen"[1]) bekannten Zusammenhangszahlen. In meiner Dissertation[2]) habe ich bewiesen, wie man für gewisse Mannigfaltigkeiten, die durch eine Art Produktbildung[3]) aus gegebenen Mannigfaltigkeiten entstanden sind, die Bettischen Zahlen mittelst einer einfachen Formel berechnen kann, wenn die Bettischen Zahlen der Faktoren bekannt sind, und habe gezeigt, wie man ein vollständiges System durch keine Homologie verbundener, geschlossener, orientierbarer Mannigfaltigkeiten in der Produktmannigfaltigkeit finden kann, wenn solche Systeme in den Faktoren bekannt sind.

Ich will hier einige der dort gemachten Anwendungen der Formel mitteilen auf Mannigfaltigkeiten, wie sie sich an anderen Stellen der Literatur vorfinden. Der Satz selbst lautet:

Sind P_p^α, bzw. P_p^β die Bettischen Zahlen p-ter Dimension einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit A, bzw. einer m-dimen-

---

1) Nach der zweiten Definition Poincarés, „Compl. à l'analysis situs", Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XIII, a. 1899, S. 286 f.

2) „Über die Bettischen Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit." Diss. Erlangen 1922.

3) S. Steinitz, „Beiträge zur Analysis Situs", Sitz.-Ber. d. Berl. Math. Gesellsch., 7. Jahrg. 1908, S. 42 ff. (Archiv d. Math. u. Phys., III. Reihe, Band 13).

sionalen Mannigfaltigkeit B, so findet man die Bettische Zahl P_l^γ l-ter Dimension der Produkmannigfaltigkeit $C = AB$ aus:

$$P_l^\gamma - 1 = \sum_{p=0}^{n} (P_p^\alpha - 1)(P_{l-p}^\beta - 1) \quad [l = 1, \ldots (n + m - 1)]. \quad (1)$$

Dabei sind folgende Festsetzungen getroffen:

Für jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist $P_p = 1$, wenn $p < 0$ oder $p > n$. Für jede n-dimensionale zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist: $P_0 = 2$ und, wenn sie geschlossen orientierbar ist, $P_n = 2$, wenn sie berandet oder nicht orientierbar, geschlossen ist, $P_n = 1$. Diese Festsetzungen sind wegen ihrer Zweckmäßigkeit für den vorliegenden Fall gemacht worden, ergeben sich aber auch, wenn man die formale Definition der Bettischen Zahlen nach der zweiten Art Poincares auf alle Werte von p anwendet.

Ist C das Produkt von mehr als 2 Faktoren, $C = A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n$, so findet man die Bettischen Zahlen von C durch wiederholte Anwendung von (1) aus:

$$P_k^\gamma - 1 = \sum_{\substack{k_1, k_2 \ldots k_n \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k}} (P_{k_n}^n - 1)(P_{k_{n-1}}^{n-1} - 1) \ldots (P_{k_2}^2 - 1)(P_{k_1}^1 - 1), \quad (2)$$

wobei der untere Index eines jeden P die Dimension, der obere die zugehörige Mannigfaltigkeit bezeichnet.

1. Als Anwendung von (1) ergibt sich für den Fall der Torusfläche, dem Produkt zweier Kreise A und B, aus $P_0^\alpha = P_1^\alpha = P_0^\beta = P_1^\beta = 2$:

$$P_1^\gamma = (P_0^\alpha - 1)(P_1^\beta - 1) + (P_1^\alpha - 1)(P_0^\beta - 1) + 1 = 3.$$

2. Wenden wir uns nun den von Steinitz angeführten Beispielen von Produktmannigfaltigkeiten zu. Das eine ist die fünfdimensionale Mannigfaltigkeit der reellen Flächenelemente im projektiven dreidimensionalen Raume $\mathfrak{R}_3$, wobei unter einem Flächenelement die Kombination einer Ebene mit einem auf ihr liegenden Punkt zu verstehen ist. Die Faktoren dieser

Mannigfaltigkeit sind die projektive Ebene[1]); d. h. eine nicht orientierbare geschlossene zweidimensionale Mannigfaltigkeit, für welche $P_1 = 1$, und der projektive Raum $\mathfrak{R}_3$, d. h. eine orientierbare geschlossene, dreidimensionale Mannigfaltigkeit, für welche $P_1 = P_2 = 1$ ist. Für die Produktmannigfaltigkeit erhält man dann:

$$P_1 = P_2 = P_4 = P_5 = 1; \quad P_3 = 2$$

3. Das zweite von Steinitz angeführte Beispiel einer Produktmannigfaltigkeit liefert die komplexe Punktmannigfaltigkeit einer Fläche 2. Grades und die durch die gleiche Produktmannigfaltigkeit darstellbare Mannigfaltigkeit der reellen, mit Richtungssinn versehenen Geraden im $\mathfrak{R}_3$. Beide Mannigfaltigkeiten sind vom Typus des Produktes zweier Kugelflächen. Dieselbe Mannigfaltigkeit finden wir auch bei Study[2]) in „Beiträgen zur nicht-euklidischen Geometrie". Nach Study läßt sich das Kontinuum aller reellen Speere im elliptischen (oder sphärischen) Raum überall eindeutig und stetig abbilden auf das Kontinuum aller reellen Paare von Punkten, die man 2 Kugeln (des reellen euklidischen Raumes) vom Radius 1 entnehmen kann[3]). Das Kontinuum dieser Punktpaare läßt sich wieder eindeutig und stetig abbilden auf das Kontinuum der Punkte der aus den beiden Kugeln gebildeten vierdimensionalen Produktmannigfaltigkeit C. In diesem Falle sind A und B Kugelflächen, also $P_1^\alpha = P_1^\beta = 1$. Aus (1) ergeben sich dann für C die Bettischen Zahlen:

$$P_1^\gamma = 1; \quad P_2^\gamma = 3; \quad P_3^\gamma = 1.$$

Es gibt also, da $P_2^\gamma - 1 = 2$ ist, 2 Arten von geschlossenen orientierbaren, unabhängigen zweidimensionalen Mannig-

[1]) Nach dem Dualitätsprinzip ist die Mannigfaltigkeit aller Flächenelemente (Ebenen) durch einen Punkt X des $\mathfrak{R}_3$ gleichwertig der Mannigfaltigkeit aller Geraden durch X und daher durch Perspektivität gleichwertig der Mannigfaltigkeit aller Punkte einer Ebene.

[2]) American Journal of Mathematics, vol. XXIX, 1907.

[3]) Ebenda, S. 121.

faltigkeiten in C, die nicht homolog Null sind, und zwar sind dies die Produkte von A mit Punkten aus B und die Produkte von B mit Punkten aus A. Im elliptischen Raum ergeben diese zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten Speerkongruenzen; es sind die „rechts-, bzw. links-syntaktischen Kongruenzen“ Studys[1]). Die Geraden, auf welchen diese Speere liegen, bilden Strahlennetze ohne (reelle) Leitstrahlen. Diese zweierlei Arten von geschlossenen Mannigfaltigkeiten in C, die sich nicht durch stetige Transformation auf einen Punkt zusammenziehen lassen, liefern im elliptischen Raum die linksseitigen und rechtsseitigen Schiebungen. Bei der komplexen Punktmannigfaltigkeit einer Fläche 2. Grades, die ja auch C äquivalent ist, entspricht jeder geschlossenen Mannigfaltigkeit der einen oder der anderen Art die zweidimensionale komplexe Punktmenge einer Erzeugenden der einen oder der anderen Schar.

4. Kehren wir nun wieder zum Beispiel Studys zurück und betrachten auch den Fall, wo das Komplexe in die Untersuchung miteinbegriffen wird. Je nach der Art der zu Grunde gelegten Definition für die komplexen Speere erhält man zwei verschiedene Kontinua. Study unterscheidet deshalb zwischen „Speeren“ und „Pfeilen“. Die reellen und komplexen Speere sind gerichtete Gerade, die zwei, einen oder unendlich viele Punkte mit der absoluten Fläche gemeinsam haben[2]). Die reellen und komplexen Pfeile werden dagegen eindeutig dargestellt durch die Paare von Punkten auf der absoluten Fläche[2]), wobei auch die verschiedene Reihenfolge der Punkte innerhalb eines Paares zu unterscheiden ist, oder durch das achtdimensionale Kontinuum aller Quadrupel reeller Punkte, die man einzeln vier reellen Kugelflächen entnehmen kann[3]). Dieses Kontinuum läßt sich aber wieder eindeutig und stetig abbilden auf das Kontinuum der Punkte der aus den vier Kugelflächen gebildeten Produktmannigfaltigkeit C.

[1]) Study, a. a. O., S. 132.
[2]) Study, a. a. O., S. 157.
[3]) Study, a. a. O., S. 158.

Nach (2) ergibt sich für die Bettischen Zahlen von C:

$$P_1 = P_7 = 1; \quad P_2 = P_6 = 5; \quad P_3 = P_5 = 1; \quad P_4 = 7.$$

5. Eine Verallgemeinerung der Produktmannigfaltigkeit zweier Kugelflächen, d. h. also zweier zweidimensionaler sphärischer Mannigfaltigkeiten auf die Produktmannigfaltigkeiten zweier sphärischer Mannigfaltigkeiten höherer Dimension findet sich bei Poincaré in seiner ersten Arbeit über „Analysis situs“ [1]). Er bespricht dort als 8. Beispiel eine Mannigfaltigkeit W von $(2q - 2)$ Dimensionen im $2q$-dimensionalen Raum, die durch folgende Gleichungen in den inhomogenen Koordinaten y_i, z_i gegeben ist:

$$\text{(a)} \qquad y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_q^2 = 1,$$

$$\text{(b)} \qquad z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_q^2 = 1.$$

Diese Mannigfaltigkeit ist vom Typus eines Produktes aus zwei $(q-1)$ dimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeiten. Betrachtet man nämlich (a) und (b) als die Gleichungen je einer sphärischen $(q-1)$ dimensionalen Mannigfaltigkeit A bzw. B im q-dimensionalen Raum, so entspricht jedem Punktpaar aus A und B, wobei immer ein Punkt des Paares aus A, der andere aus B zu entnehmen ist, umkehrbar eindeutig ein Punkt von W. Es ist also W gleichwertig dem Produkte $A \cdot B$, und da für jede $(q-1)$ dimensionale sphärische Mannigfaltigkeit $P_p = 1$, wenn $0 < p < q - 1$, und $P_0 = P_{q-1} = 2$, so ergibt sich für die Bettischen Zahlen von W aus (1)[2]):

$$P_p = 1 \text{ für } 0 < p < q-1 \text{ und } q-1 < p < 2q-2; \quad P_{q-1} = 3.$$

Zwei voneinander unabhängige geschlossene, zweiseitige, $(q-1)$ dimensionale Mannigfaltigkeiten, die nicht homolog Null sind, werden dabei erhalten durch das Produkt von A mit einem Punkte von B, bzw. durch das Produkt von B mit einem Punkte von A.

---

1) Journal de l'école polyt., 2. sér., cah. 1, S. 88.

2) Poincaré kommt zu dem gleichen Ergebnis auf anderem Wege, a. a. O., S. 96 f.

6. Es seien jetzt einige Mannigfaltigkeiten betrachtet, wie sie bei W. v. Dyck in den „Beiträgen zur Analysis situs" auftreten[1]). Dyck hat dort ein Verfahren gezeigt, wie man jede, im reellen projektiven $\mathfrak{R}_{n+1}$ gelegene n-dimensionale Mannigfaltigkeit 2. Grades M_n^2, die bei Verwendung homogener Koordinaten gegeben sei durch die Gleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2 - x_{\nu+1}^2 - x_{\nu+2}^2 - \cdots - x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2 = 0$$
$$[\nu < n+1]$$

ein = eindeutig abbilden kann auf eine Mannigfaltigkeit N_n, die gegeben ist durch:

$$F = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i^2\right)^2 - a^2 \xi_{n+1}^2 \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i^2 < 0 \qquad a > 2$$

(in homogenen Koordinaten im $\mathfrak{R}_n$).

Die durch $F < 0$ bestimmte berandete Mannigfaltigkeit sei mit $\overline{N}_n$, ihre durch die Gleichung $F = 0$ gegebene Berandung mit R_{n-1} bezeichnet. Die Bettischen Zahlen von $\overline{N}_n$ und R_{n-1} sollen berechnet werden. Es sei noch folgendes bemerkt: Für die im projektiven Sinn im Unendlichen geschlossene M_n^2 würde man eine ein = eindeutige Abbildung erhalten durch eine Mannigfaltigkeit N_n, die aus $\overline{N}_n$ entsteht, wenn man die Punkte der Berandung R_{n-1}, die den uneigentlichen Punkten von M_n^2 entsprechen, in bestimmter Weise paarweise als inzident betrachtet[2]).

Die Mannigfaltigkeiten $\overline{N}_n$ und R_{n-1} sind nun, wie die Dyckschen Betrachtungen zeigen, darstellbar als Produktmannigfaltigkeiten, und zwar ist $\overline{N}_n$ äquivalent dem Produkt einer $(\nu - 1)$ dimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeit[3]) $S_{\nu-1}$ mit einer $(n - \nu + 1)$ dimensionalen Elementar-Mannigfaltigkeit

[1]) Mathematische Annalen, Bd. 37, S. 284 ff. und S. 308 ff.

[2]) Dyck, a. a. O., S. 309.

[3]) Die sphärische 0-dimensionale Mannigfaltigkeit ist dabei das Punktepaar, die geschlossene zusammenhängende 0-dimensionale Mannigfaltigkeit der einzelne Punkt.

$E_{n-\nu+1}$, und R_{n-1} ist äquivalent dem Produkte von $S_{\nu-1}$ mit der sphärischen Berandung $S_{n-\nu}$ von $E_{n-\nu+1}$. Auch für $\nu = n+1$ läßt sich eine entsprechende Produktmannigfaltigkeit $\overline{N}_n$ bilden. Eine R_{n-1} ist in diesem Falle nicht vorhanden. $\overline{N}_n$ ist dann identisch mit M_n^2.

Für die Bettischen Zahlen von $\overline{N}_n$ erhält man nach (1)

$$P_l = 1, \text{ für } l \neq \nu - 1; \quad P_{\nu-1} = 2$$

und für die Bettischen Zahlen von R_{n-1}:

$$\text{wenn } \nu \neq \frac{n+1}{2}: \ P_l = 1, \text{ für } l \neq \nu - 1,\ n-\nu; \quad P_{\nu-1} = P_{n-\nu} = 2,$$

$$\text{wenn } \nu = \frac{n+1}{2}: \ P_l = 1, \text{ für } l \neq \frac{n-1}{2}; \quad P_{\frac{n-1}{2}} = 3.$$

Dieselbe Mannigfaltigkeit R_{n-1} erhält man nach Dyck auch als Produkt einer sphärischen $(\nu-1)$ dimensionalen Mannigfaltigkeit $S'_{\nu-1}$ mit einer linearen Mannigfaltigkeit $(n-\nu)$ter Dimension $L_{n-\nu}$, die sich ins Unendliche erstreckt. Faßt man aber alle unendlich fernen Elemente zu einem einzigen Punkt zusammen, so ist $L_{n-\nu}$ äquivalent einer $(n-\nu)$ dimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeit $S'_{n-\nu}$, und man erhält dieselbe Bildung von R_{n-1}, wie oben.

Die Gesamtheit der durch $F \geqq 0$ bestimmten Punkte des sphärischen $\mathfrak{R}_n$ sei bezeichnet mit $\overline{N}'_n$. Auch $\overline{N}'_n$ ist vom Typus einer Produktmannigfaltigkeit und zwar äquivalent dem Produkte von $S'_{n-\nu}$ mit der Elementarmannigfaltigkeit E'_ν, deren Berandung $S'_{\nu-1}$ ist.

Die Bettischen Zahlen von $\overline{N}'_n$ sind demnach:

$$P_l = 1, \text{ für } l \neq n - \nu; \quad P_{n-\nu} = 2.$$

Für $\overline{N}_n$, $\overline{N}'_n$ und R_{n-1} wurden von Dyck die Charakteristiken bestimmt[1]). Benützt man zu ihrer Bestimmung die verallgemeinerte Eulersche Polyederformel, die sich unter Berücksichtigung der Festsetzungen, P_0 und P_n betreffend, darstellen läßt durch:

[1]) A. a. O., S. 288 und S. 297.

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (P_i - 1),$$

so erhält man:

für $\overline{N}_n$: 2, wenn ν ungerade; 0, wenn ν gerade,

für $\overline{N}'_n$: 2, wenn $n - \nu$ gerade; 0, wenn $n - \nu$ ungerade,

für R_{n-1}: 0, wenn n gerade, oder wenn n ungerade und ν gerade,

4, wenn n und ν ungerade.

Was nun die Bettischen Zahlen von N_n und damit von M_n^2 betrifft, so hängen diese nicht allein von den Bettischen Zahlen von $\overline{N}_n$ und R_{n-1} ab, sondern auch von der Art der Zuordnung der Elemente von R_{n-1}, die als inzident zu betrachten sind. Doch soll hier auf diese Frage nicht weiter eingegangen werden, da sie besondere Betrachtungen erfordern würde.