Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1923
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Transformation des rechtwinkligen Koordinatensystems.

Von **A. Voss.**

Vorgetragen in der Sitzung am 9. Dezember 1922.

Die in der Überschrift genannte elementare Frage ist längst eingehend behandelt, jedoch auch neuerdings wieder untersucht worden.[1]) Seit einer Reihe von Jahren habe ich in Vorlesungen über Raumgeometrie darauf aufmerksam gemacht, daß mittels einer etwas anderen Darstellung dieser Gegenstand einfacher und namentlich in Bezug auf den Drehungswinkel übersichtlicher dargelegt werden kann (vgl. namentlich § III des folgenden).

§ I. Die Gleichung dritten Grades.

Die Formeln für den Übergang von dem rechtwinkligen System, dem Triëder XYZ zum Triëder $X_1 Y_1 Z_1$ entnimmt man aus dem Schema von Lamé

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ x_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ y_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ z_1 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3, \end{array}$$

[1]) Vgl. z. B. Klein und Sommerfeld, Theorie des Kreisels, Leipzig 1897, S. 15 ff.; Salmon Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, 5. Auflage, herausgegeben von K. Kommerell unter Mitwirkung von v. Brill, Leipzig 1922, erste Lieferung, S. 54—63. Vgl. auch die Note von G. Darboux, Nouvelle démonstration des formules d'Euler in den leçons de cinématique von G. Koenigs, Paris 1897, S. 343.

in dem die α_i, β_i, γ_i die Richtungscosinus der neuen Axen x gegen die alten sind. Dabei bestehen die Gleichungen

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1$$
$$\alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k + \gamma_i \gamma_k = 0, \qquad i \neq k,$$

aus denen die weiteren Relationen mit Hilfe der Identität

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

folgen. Das Quadrat der Determinante Δ der Richtungscosinus ist gleich eins; sind die beiden Triëder gleich orientiert, so daß $X_1\, Y_1\, Z_1$ durch Bewegung in das Triëder $X\,Y\,Z$ übergeführt werden kann, so ist $\Delta = +1$, im entgegengesetzten Falle gleich -1. Im ersten Falle ist jedes Element von Δ gleich seiner Unterdeterminante im Laméschen Schema, im zweiten ist es ihr entgegengesetzt gleich.[1])

Hieran schließt sich die Bestimmung der bei der Transformation invarianten Richtungen

$$x_1 = \lambda x, \qquad y_1 = \lambda y, \qquad z_1 = \lambda z,$$

welche den Gleichungen

$$\tag{1} \begin{aligned} \lambda x &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ \lambda y &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ \lambda z &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{aligned}$$

genügen müssen, d. h. der Gleichung dritten Grades

---

[1]) Werden Minimalrichtungen für die Axen des Triëders $X_1\, Y_1\, Z_1$ ausgeschlossen, so gelten die Formeln für die α, β, γ auch bei komplexen Werten derselben. Will man die Gesamtheit der Relationen zwischen den Elementen und ihren zugehörigen Unterdeterminanten erhalten, so bilde man die Identität

$$\Delta \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & u_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & u_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix}$$

und vergleiche auf beiden Seiten die entsprechenden Koeffizienten der $u_i v_k$. Im folgenden werden übrigens nur reelle Werte der α, β, γ vorausgesetzt, da sonst weitere Unterscheidungen nötig werden.

$$2)\qquad \varDelta = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - \lambda & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

während aus 1) noch folgt

$$3)\qquad \lambda^2 (x^2 + y^2 + z^2) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Die bekannten Identitäten (je nachdem $\varDelta = \pm 1$)

$$\begin{aligned} \pm \alpha_1 &= \beta_2 \gamma_3 - \gamma_2 \beta_3, & \pm \beta_1 &= \gamma_2 \alpha_3 - \alpha_2 \gamma_3, & \pm \gamma_1 &= \alpha_2 \beta_3 - \beta_2 \alpha_3 \\ \pm \alpha_2 &= \gamma_1 \beta_3 - \beta_1 \gamma_3, & \pm \beta_2 &= \alpha_1 \gamma_3 - \gamma_1 \alpha_3, & \pm \gamma_2 &= \beta_1 \alpha_3 - \alpha_1 \beta_3 \\ \pm \alpha_3 &= \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2, & \pm \beta_3 &= \gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2, & \pm \gamma_3 &= \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2 \end{aligned}$$

dienen nun zur Entwicklung der Gleichung 2).

Man erhält zunächst

$$\begin{aligned} \varDelta = \varDelta - \lambda^3 - \lambda(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_1 \gamma_3) + \lambda^2 (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) \\ - \lambda(\beta_2 \gamma_3 - \gamma_2 \beta_3) + \lambda(\beta_1 \alpha_2 + \gamma_1 \alpha_3), \end{aligned}$$

oder, wenn man

$$\begin{aligned} \beta_2 \gamma_3 &= \gamma_2 \beta_3 \pm \alpha_1 \\ \gamma_1 \alpha_3 &= \alpha_1 \gamma_3 \pm \beta_2 \\ \alpha_2 \beta_1 &= \alpha_1 \beta_2 \pm \gamma_3 \end{aligned}$$

setzt, mittels des Ausdruckes

$$4)\qquad \Omega = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3,$$

der als Charakteristik der Determinante $\varDelta$ bezeichnet werde, die Gleichung

$$\mathrm{I}\qquad \lambda^3 - \lambda^2 \Omega \pm \lambda \Omega - \varDelta = 0,$$

in der die oberen (unteren) Vorzeichen dem Falle $\varDelta = \pm 1$ entsprechen. Für $\varDelta = +1$ hat daher $\varDelta$ die Wurzel $\lambda = +1$, für $\varDelta = -1$ aber $\lambda = -1$, so daß die beiden anderen Wurzeln durch die reciproken Gleichungen

$$\mathrm{Ia}\qquad \lambda^2 + \lambda(1 - \Omega) + 1 = 0$$

$$\mathrm{Ib}\qquad \lambda^2 - \lambda(1 + \Omega) + 1 = 0$$

in der Form

$$2\lambda_1 = -(1-\Omega) \pm \sqrt{(1-\Omega)^2 - 4}$$
$$2\lambda_2 = +(1+\Omega) \pm \sqrt{(1+\Omega)^2 - 4}$$

gegeben sind.

Aus 3) folgt noch: Ist $\lambda \neq \pm 1$, so muß $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ sein. Dann sind aber die x, y, z notwendig imaginär, also auch die betreffenden Werte des λ selbst.

Für $\Delta = +1$ ist $\lambda = +1$ niemals Doppelwurzel, denn $\Delta = f(\lambda)$ gibt für diesen Fall

$$f'(1) = 3 - \Omega.$$

Dies kann aber nur verschwinden, wenn $\alpha_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\gamma_3 = 1$ ist, d. h. wenn eine von der Identität verschiedene Transformation gar nicht vorliegt. Soll dagegen in diesem Falle $\Delta = +1$, $\lambda = -1$ Wurzel sein, so ist sie immer zugleich Doppelwurzel; mutatis mutandis gelten dieselben Angaben für $\Delta = -1$.[1]) Im allgemeinen erhält man also neben einer reell invarianten Geraden zwei Minimalrichtungen; für den Fall $\Delta = +1$ hat die reelle Gerade die Bedeutung der Drehungsaxe. Aber in einem besonderen Falle können die beiden Minimalrichtungen auch ganz in Wegfall kommen, was vielleicht bisher nicht bemerkt worden ist. Sie vereinigen sich dabei etwa nicht zu einer einzigen Minimalrichtung, was ja auch an und für sich unmöglich sein würde, sondern ergeben nur eine einzige reell-invariante Gerade.

Dieser Fall entspricht bei $\Delta = +1$ dem Werte $\Omega = -1$. Zunächst hat man für $\lambda = +1$ die bekannte Lösung von

$$x(\alpha_1 - 1) + y\beta_1 + z\gamma_1 = 0$$
$$x\alpha_2 + y(\beta_2 - 1) + z\gamma_2 = 0$$
$$x\alpha_3 + y\beta_3 + z(\gamma_3 - 1) = 0,$$

[1]) Dies entspricht dem (vgl. Göttinger Nachrichten 1887, S. 430) von mir bereits 1878 in den Mathematischen Annalen, Bd. XIII bewiesenen, bei allen orthogonalen Substitutionen gültigen Satze, vgl. auch die spätere Note von Stieltjes in den Acta mathematica, Bd. VI, 1886.

die auf $$x : y : z = \gamma_2 - \beta_3 : \alpha_3 - \gamma_1 : \beta_1 - \alpha_2$$

führt. Ist aber auch $\lambda = -1$ Wurzel, so hat man für die entsprechende Richtung ξ, η, ζ

$$\begin{aligned} \xi(\alpha_1 + 1) + \eta\beta_1 + \zeta\gamma_1 &= 0 \\ \xi\alpha_2 + \eta(\beta_2 + 1) + \zeta\gamma_2 &= 0 \\ \xi\alpha_3 + \eta\beta_3 + \zeta(\gamma_3 + 1) &= 0, \end{aligned}$$

woraus durch Multiplikation mit den α_1, α_2, α_3 usw. und Addition

$$\begin{aligned} \xi(\alpha_1 + 1) + \eta\alpha_2 + \zeta\alpha_3 &= 0 \\ \xi\beta_1 + \eta(\beta_2 + 1) + \zeta\beta_3 &= 0 \\ \xi\gamma_1 + \eta\gamma_2 + \zeta(\gamma_3 + 1) &= 0, \end{aligned}$$

also nun durch Subtraktion

$$\begin{aligned} \eta(\beta_1 - \alpha_2) + (\gamma_1 - \alpha_3)\zeta &= 0 \\ \xi(\alpha_2 - \beta_1) + (\gamma_2 - \beta_3)\zeta &= 0 \\ \xi(\alpha_3 - \gamma_1) + \eta(\beta_3 - \gamma_2) &= 0, \end{aligned}$$

also wieder

$$\xi : \eta : \zeta = \gamma_2 - \beta_3 : \alpha_3 - \gamma_1 : \beta_1 - \alpha_2$$

entsteht.[1])

§ II. Der Drehungswinkel.

Zur Bestimmung des Drehungswinkels um die reell invariante Gerade $\Lambda = +1$ soll hier eine Formel von **Darboux**[2]) benutzt werden, obwohl sie der Natur der Sache nach nur den absoluten Wert von $\operatorname{tg} \Theta/2$ desselben liefern kann, die ich hier in etwas anderer Form ableite: Sind A, B, C die Cosinus einer Drehungsaxe, x, y, z die Koordinaten irgend eines Raumpunktes P, der durch die Drehung Θ in der Uhrzeigerbewegung in $P_1(x_1, y_1, z_1)$ verwandelt wird, ferner Q der Fußpunkt,

[1]) Die vollständige Diskussion der Ausnahmefälle, die für das folgende nicht in Betracht kommt, mag hier der Kürze halber unterbleiben.

[2]) Siehe die Anmerkung 1) zu § II.

der von P und P_1 auf die Drehaxe gezogenen Senkrechten, so schneiden sich die in P und P' auf QP und QP' und zur Richtung A, B, C senkrecht gezogenen Geraden in einem Punkte R mit den Koordinaten X, Y, Z. Ist O der Anfang der Koordinaten und $OQ = p$, so sind die Richtungen von $QP = l$ durch die drei Cosinus[1])

$$\frac{x - pA}{l}, \quad \frac{y - pB}{l}, \quad \frac{z - pC}{l}$$

gegeben. Nennt man sie λ, μ, ν, so ist

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y + \nu z &= 0 \\ \lambda A + \mu B + \nu C &= 0, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} l\lambda &= Bz - Cy \\ l\mu &= Cx - Az \\ l\nu &= Ay - Bz \end{aligned}$$

mit $l^2 = r^2 - p^2$, falls $OP = OP'$ durch r bezeichnet wird. Darnach hat man

$$\begin{aligned} X &= x + \operatorname{tg}(\Theta/2)(Bz - Cy) \\ Y &= y + \operatorname{tg}(\Theta/2)(Cx - Az) \\ Z &= z + \operatorname{tg}(\Theta/2)(Ay - Bx), \end{aligned}$$

für die Drehung $-\Theta/2$ aber, die den Punkt P' in R verwandelt

$$\begin{aligned} X &= x_1 - \operatorname{tg}(\Theta/2)(Bz_1 - Cy_1) \\ Y &= y_1 - \operatorname{tg}(\Theta/2)(Cx_1 - Az_1) \\ Z &= z_1 - \operatorname{tg})\Theta/2)(Ay_1 - Bx_1), \end{aligned}$$

so daß die Identitäten bestehen:

$$\text{I)} \quad \begin{aligned} x + \operatorname{tg}(\Theta/2)(Bz - Cy) &= x_1 - \operatorname{tg}(\Theta/2)(Bz_1 - Cy_1) \\ y + \operatorname{tg}(\Theta/2)(Cx - Az) &= y_1 - \operatorname{tg}(\Theta/2)(Cx_1 - Az_1) \\ z + \operatorname{tg}(\Theta/2)(Ay - Bx) &= z_1 - \operatorname{tg}(\Theta/2)(Ay_1 - Bx_1) \end{aligned}$$

[1]) Durch eine Figur, auf die hier natürlich verzichtet werden mußte, hätte sich die Beschreibung viel kürzer darstellen lassen.

für alle korrespondierenden $x\,y\,z$; $x_1\,y_1\,z_1$,[1]) d. h. sie finden statt, falls durch Uhrzeigerbewegung um die Drehaxe P der Punkt P' entsteht.

Die Identitäten I kann man nun zur Bestimmung von $\operatorname{tg}(\Theta/2)$ durch irgend welche korrespondierende P, P_1 verwenden; wählt man P im Abstande $+1$ auf der X-Axe, so ist nach § I

$$x_1 = \alpha_1, \quad y_1 = \alpha_2, \quad z_1 = \alpha_3,$$

so daß

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 - \operatorname{tg}(\Theta/2)(B\alpha_3 - C\alpha_2) \\ C\operatorname{tg}(\Theta/2) &= \alpha_2 - \operatorname{tg}(\Theta/2)(C\alpha_1 - A\alpha_3) \qquad (1) \\ -B\operatorname{tg}(\Theta/2) &= \alpha_3 - \operatorname{tg}(\Theta/2)(A\alpha_2 - B\alpha_1), \end{aligned}$$

während

$$\begin{aligned} A &= k(\gamma_2 - \beta_3) \\ B &= k(\alpha_3 - \gamma_1) \qquad (2) \\ C &= k(\beta_1 - \alpha_2) \end{aligned}$$

zu setzen, aber das Vorzeichen von k unbekannt ist. Wählt man die erste der Gleichungen 1), so folgt für $\Delta = +1$

$$\begin{aligned} 1 - \alpha_1 &= -\operatorname{tg}(\Theta/2)\,k(\alpha_3 - \gamma_1)\,\alpha_3 - (\beta_1 - \alpha_2)\,\alpha_2) \\ &= -\operatorname{tg}(\Theta/2)\,k\,\{1 - \alpha_1^2 - \gamma_1(\alpha_3 - \beta_1\alpha_2)\} \\ &= -\operatorname{tg}(\Theta/2)\,k\,\{1 - \alpha_1^2 - \alpha_1\gamma_3 + \gamma_3 - \alpha_1\beta_2 + \beta_2), \end{aligned}$$

also, wenn man den Faktor $1 - \alpha_1$ auf beiden Seiten fort läßt

$$\operatorname{tg}(\Theta/2) = -\frac{1}{k}(1 + \Omega).$$

Zur Berechnung von k^2 aber hat man nach 2) die Gleichung

$$k^2\{(\gamma_2 - \beta_3)^2 + (\alpha_3 - \gamma_1)^2 + (\beta_1 - \alpha_2)^2\} = 1. \qquad (3)$$

[1]) Daß die Determinante

$$\frac{1}{l^2}\begin{vmatrix} A & B & C \\ x - pA & y - pB & z - pC \\ Bz - Cy & Cx - Az & Ay - Bx \end{vmatrix}$$

den Wert $+1$ hat, erkennt man, wenn es erforderlich sein sollte, durch direkte Ausrechnung z. B.

Setzt man nun

$$w^2 = (\gamma_2 - \beta_3)^2 + (\alpha_3 - \gamma_1)^2 + (\beta_1 - \alpha_2)^2,$$

so ergibt sich

$$w^2 = 3 - (\alpha_1^2 + \beta_2^2 + \gamma_3^2) - 2\,\gamma_2\,\beta_3 - 2\,\alpha_3\,\gamma_1 - 2\,\beta_1\,\alpha_2,$$

was sich durch die Transformation der Unterdeterminanten, die hier beständig anzuwenden ist, in

$$\text{4)} \quad \begin{aligned} w^2 &= 3 - (\alpha_1^2 + \beta_2^2 + \gamma_3^2) + 2\,(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) \\ &= 4 - (1 - \Omega)^2 = (3 - \Omega)\,(1 + \Omega) \end{aligned}$$

verwandelt. Hiernach ist

$$\text{II)} \qquad \operatorname{tg}(\Theta/2) = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{3-\Omega}{1+\Omega}},$$

also bis auf das Vorzeichen von k wieder nur von der Charakteristik der Richtungscosinus abhängig.

Würde man an Stelle der ersten Gleichung 1) eine der beiden anderen wählen, so würde beiderseits der Faktor α_2, resp. α_3, oder bei allen den 6 Fällen, wo P im Abstande $+1$ auf die Y, resp. Z-Axe legt, immer der betreffende Cosinusfaktor durch Division herausfallen.[1])

§ III. Direkte Bestimmung von $\operatorname{tg}\Theta$.

Um endlich, ohne bereits die Formeln von Euler oder Cayley für orthogonale Substitutionen oder irgend eine andere, wie die in § II benutzte, die sich allerdings durch Einfach-

---

[1]) Wählt man an Stelle der A, B, C die bekannten Ausdrücke

$$\begin{aligned} k_1 A_1 &= 1 + \alpha_1 - (\beta_2 + \gamma_3) \\ k_1 B_1 &= \alpha_2 + \beta_1 \\ k_1 C_1 &= \alpha_3 + \gamma_1 \end{aligned}$$

nebst den analogen, so folgt

$$k_1^2 = (1 + \alpha_1 - (\beta_2 + \gamma_3))\,(3 - \Omega),$$

so daß

$$\begin{aligned} 1 + \alpha_1 - (\beta_2 + \gamma_3) &\geqq 0 \\ 1 + \gamma_3 - (\alpha_2 + \beta_2) &\geqq 0 \\ 1 + \beta_2 - (\gamma_3 + \alpha_1) &\geqq 0 \end{aligned}$$

sein muß, was übrigens schon im § 1 angedeutet ist.

heit empfiehlt, vorauszusetzen, den Wert von $\operatorname{tg}\Theta$ mit seinem Vorzeichen zu bestimmen, betrachte man neben den beiden Triëdern X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1 noch ein drittes Ξ, H, Z, dessen Axe Z die Richtungscosinus

$$\begin{aligned} A &= k(\gamma_2 - \beta_3) \\ B &= k(\alpha_3 - \gamma_1) \\ C &= k(\beta_1 - \alpha_2) \end{aligned} \tag{1}$$

hat, während k eine positive Zahl sein soll, so daß dann die Orientierung von Z völlig bestimmt ist. Alsdann führe man die Axe H senkrecht zur X-Axe und zur Richtung 1) und wähle die Axe Ξ so, daß das Triëder $\Xi\, H\, Z$ ebenso orientiert ist wie $x\, y\, z$. Sind nun die Richtungscosinus der Axen $\Xi\, H\, Z$ der Reihe nach ξ, η, ζ: o, μ, ν; A, B, C, so ist

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ o & \mu & \nu \\ A & B & C \end{vmatrix} = +1. \tag{2}$$

Jetzt projiziere man den Punkt P, der auf x den Abstand $+1$ hat, auf das Triëder $\Xi\, H\, Z$; seine Koordinaten werden dann u, v, w, wobei $u = \xi$, $v = 0$, $w = A$ wird. Die 3 Koordinaten des Punktes P im System X_1, Y_1, Z_1, welche durch die Drehung wieder in das System $X\, Y\, Z$ geführt sind, seien ebenfalls in dem Triëder $\Xi\, H\, Z$ mit u_1, v_1, w_1 bezeichnet. Dann ist

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta \\ v_1 &= \alpha_2 \mu + \alpha_3 \nu \\ w_1 &= A, \end{aligned}$$

und es ist

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{v_1}{u_1}. \tag{3}$$

Nach der Voraussetzung über die Richtung von H ist

$$\mu B + \nu C = 0, \qquad \mu = \sigma C, \qquad \nu = -\sigma B;$$

nach dem Schema 2)

$$u_1 = \alpha_1(\mu C - \nu B) + \alpha_2 \nu A - \alpha_3 \mu A = \sigma(\alpha_1 - A^2).$$

Hieraus folgt nach 1)

$$u_1 = k^2 \sigma \left[\alpha_1 \{(\gamma_2 - \beta_3)^2 + (\alpha_3 - \gamma_1)^2 + (\beta_1 - \alpha_2)^2\} - (\gamma_2 - \beta_3)^2\right]$$

$$\begin{aligned} u_1 = k^2 \sigma [(\alpha_1 - 1)\,((\gamma_2 - \beta_3)^2 + \alpha_1 (\alpha_3 - \gamma_1)^2 + (\beta_1 - \alpha_2)^2) \\ + (\alpha_3 - \gamma_1)^2 + (\beta_1 - \alpha_2)^2]. \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} (\alpha_3 - \gamma_1)^2 + (\beta_1 - \alpha_2)^2 &= 2\,[1 - \alpha_1 - 2\,\alpha_1 \gamma_3 - 2\,\alpha_1 \beta_2 + 2\,\beta_2 + 2\,\gamma_3 \\ &= 2\,(1 - \alpha_1)\,(1 + \Omega). \end{aligned}$$

Wird nun aus § II, 4 der Wert von w^2 in u_1 eingesetzt, so erhält man

$$u_1 = (\alpha_1 - 1)\, k^2 \sigma\, (1 - \Omega)\,(1 + \Omega).$$

Für

$$\begin{aligned} v_1 &= \sigma k\,(\alpha_2 (\beta_1 - \alpha_2) - \alpha_3 (\alpha_3 - \gamma_1)) \\ &= \sigma k\,(\alpha_1^2 - 1 + \alpha_1 \beta_2 - \gamma_3 + \alpha_1 \gamma_3 - \beta_2) \end{aligned}$$

erhält man

$$v_1 = (\alpha_1 - 1)\,(1 + \Omega),$$

so daß

$$\frac{v_1}{u_1} = \operatorname{tg} \Theta = \frac{1}{k}\,\frac{1}{1 - \Omega} = \frac{\sqrt{1 + \Omega} \cdot \sqrt{3 - \Omega}}{1 - \Omega}$$

wird, so daß Übereinstimmung mit dem früher gefundenen Werte von $\operatorname{tg} \Theta/2$ bis auf das Vorzeichen jedesmal durch den positiven Wurzelwert von k vorhanden ist. Für alle Systeme gleichen Wertes von Ω ist also auch der Drehungswinkel derselbe.