Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1924. Heft I

Januar- bis Junisitzung

München 1924
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Kurvennetze und Laplacesche partielle Differentialgleichungen.

Von **A. Voss** in München.

Vorgetragen in der Sitzung am 1. März 1924.

Ein Kurvensystem, bei dem die rechtwinkeligen Koordinaten x, y, z der Punkte auf einer Fläche Funktionen von zwei unabhängigen Variabeln u, v sind, kann durch die quadratische Form des Längenelementes $ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,d^2v = A^2\,du^2 + 2\,A\,C\,du\,dv\cos\omega + C^2\,dv^2$ definiert werden. Die Kurven $u = \text{konst}$, $v = \text{konst}$, sind dann Kurven eines im System gewählten Netzes, und ω ist der Winkel der Koordinatenlinien. Ist die Fläche von der Krümmung Null, so führt die Bestimmung der wesentlichen Koeffizienten A, C bei gegebenem ω auf eine Laplacesche Differentialgleichung von der Normalform

$$Z_{uv} + Z_u a + Z_v b + Zc = 0,$$

in der a, b, c von u, v allein abhängen, und die Indizes u, v bei Z partielle Differentiationen bedeuten. Kann man diese Gleichung allgemein durch Quadraturen integrieren, so lassen sich auch die x, y, z durch Quadraturen in u, v ausdrücken. Auf diesem Wege lassen sich Netze gewinnen, die bei passend gewähltem ω weiteren Bedingungen genügen können. Manche hierher gehörige Beispiele sind längst behandelt; man vergleiche nur die Untersuchungen über Trajektorien, isotherme Systeme und dahin gehöriges. Mit allgemeineren Ausdrücken für die A und C scheint man sich indessen bisher nicht beschäftigt zu haben. Vermöge der Differentialgleichung für Z ist aber die Möglichkeit vorhanden, aus der mit willkürlichen Funktionen von u, v behafteten Lösung Eigenschaften der Netze zu gewinnen, sobald eine der Invarianten der Gleichung für Z Null ist.

Ich beschränke mich dabei zunächst auf die beiden ersten Invarianten J_1 und J_2, da die verwickelte Gestalt der höheren einfache Resultate, die auch geometrisch verwendbar sind, nicht gleich zu versprechen scheint.

Trotzdem dürften die folgenden Bemerkungen nicht ungeeignet erscheinen, neue Fragen und Gesichtspunkte in der Theorie der Netze zu bilden. Der Kürze halber untersuche ich nur ebene Netze; die Übertragung auf den Raum liegt ja auf der Hand. Der Inhalt des folgenden zerfällt in zwei Teile; der erste betrifft hauptsächlich die Bestimmung der A, C, während der zweite sich mit der direkten Ermittelung der x, y mittelst der Gleichung für Z beschäftigt.

Erster Teil.

§ I. Die Laplacesche Gleichung.

Bekanntlich ist die einzige Beziehung zwischen den e, f, g oder A, C, ω

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C_u - A_v \cos\omega}{A \sin\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A_v - C_u \cos\omega}{C \sin\omega}\right) + \omega_{uv} = 0 \text{ [1]}.$$

Schreibt man sie in der Form

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{(C_u - A_v \cos\omega + p\,\omega_v A \sin\omega)}{A \sin\omega} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{(A_v - C_u \cos\omega + q\,\omega_u C \sin\omega)}{C \sin\omega} = 0$$

mit zwei Konstanten p und q, deren Summe gleich Eins ist, so hat man aus derselben für

$$\theta = \varphi_v - p\,\omega_v, \quad \eta = \varphi_u + q\,\omega_u \tag{1}$$

mit φ als einer willkürlichen Funktion von u, v

$$\begin{cases} C_u - A_v \cos\omega = \theta A \sin\omega, \\ A_v - C_u \cos\omega = -\eta C \sin\omega \end{cases} \tag{2}$$

oder auch

$$\begin{cases} C_u \sin\omega = \theta A - \eta C \cos\omega, \\ A_v \sin\omega = \theta A \cos\omega - \eta C. \end{cases} \tag{3}$$

[1] In dieser Gestalt z. B. in Darboux, Théorie générale des surfaces, II, S. 382.

Differentiiert man diese Grundgleichungen für A, C (die erste von 3) nach v, entfernt dann durch die zweite von 3) das A_v, und endlich noch A aus der ersten von 3)), so wird, falls $\theta \neq 0$ vorausgesetzt wird

1) $$C_{uv} + a C_u + b C_v + c C = 0.$$

In dieser Gleichung haben die a, b, c die Werte

4) $$\begin{aligned} a &= (\omega_v - \theta) \operatorname{cotg} \omega - \frac{\theta_v}{\theta}, \\ b &= \eta \operatorname{cotg} \omega, \\ c &= -\eta \frac{\theta_v}{\theta} \operatorname{cotg} \omega + \eta \theta + \eta_v \operatorname{cotg} \omega - \eta \omega_v, \end{aligned}$$

φ und ω sind dabei als willkürliche Funktionen von u, v anzusehen; ω von 0 und π verschieden. A und C kann als positiv angenommen werden, doch ist das unwesentlich[1]).

Die Gleichungen 1), welche noch eine willkürliche Konstante enthalten, kann man vereinfachen. Setzt man

$$\begin{aligned} \theta &= (\varphi + \sigma \omega)_v - \omega_v (p + \sigma), \\ \eta &= (\varphi + \sigma \omega)_u + \omega_u (q - \sigma) \end{aligned}$$

und wählt die Konstante σ so, daß $p + \sigma = q - \sigma$, so wird $p + \sigma = q - \sigma = \frac{1}{2}$, $\varphi + \sigma \omega$ geht in φ_1 über. Schreibt man im folgenden statt φ_1 wieder φ, so hat man an Stelle von 1)

5) $$\theta = \varphi_v - \tfrac{1}{2} \omega_v, \quad \eta = \varphi_u + \tfrac{1}{2} \omega_u.$$

Anstatt φ, ω kann man auch θ, η willkürlich annehmen, denn man hat auch umgekehrt

$$\begin{aligned} \varphi - \tfrac{1}{2} \omega &= \int \theta \, dv + U_1, \\ \varphi + \tfrac{1}{2} \omega &= \int \eta \, du + V_1. \end{aligned}$$

θ, η, ω sind aber nicht voneinander unabhängig. Die Transformation 5) ist zwar allgemein; wenn aber im einzelnen Falle $\varphi =$ konst gewählt ist, bleibt sie nicht so ausführbar, daß nach derselben φ_1 wieder konstant bleibt; dies ist gelegentlich zu beachten[2]).

---

[1]) Alle Stellen, wo $\sin \omega = 0$, $1 + \cos \omega = 0$ sind daher, ebenso wie auch A oder C gleich Null, im folgenden immer als singuläre ausgeschlossen.

[2]) Vgl. die Bemerkungen in § IX.

§ II. Die Invarianten J_1 und J_2.

Bekanntlich ist

$$J_1 = \frac{\partial}{\partial v}(Lb) + ab - c, \quad J_2 = \frac{\partial}{\partial u}(La) + ab - c[1]).$$

Aus den Werten von a, b, c des § I, 4) erhält man

$$ab - c = \eta \frac{(\omega_v - \theta)}{\sin^2 \omega} - \eta_v \operatorname{cotg} \omega$$

und darnach wird

1) $$J_1 = -(\eta\theta) : \sin^2 \omega.$$

Etwas weitläufiger ist J_2; man erhält

$$J_2 = \omega_{uv} \operatorname{cotg} \omega - \frac{\omega_u \omega_v}{\sin^2 \omega} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta_v}{\theta}\right) - \theta_u \operatorname{cotg} \omega + \theta \frac{\omega_u}{\sin^2 \omega}$$

2) $$+ \eta \frac{(\omega_v - \theta)}{\sin^2 \omega} - \eta_v \operatorname{cotg} \omega.$$

Statt der Gleichung für C hätte man auch die für A benutzen können. Sie entsteht, wie man aus den Gleichungen 2) des § I sieht, durch gleichzeitige Vertauschung von u und v, von θ mit $-\eta$, von A und C, so daß

$$A_{uv} + A_v\left((\omega_u + \eta) \operatorname{cotg} \omega - \frac{\eta_u}{\eta}\right) - A_u \theta \operatorname{cotg} \omega$$
$$+ A\left(\theta\left(\frac{\eta_u}{\eta} - \theta_v\right) \operatorname{cotg} \omega + \theta(\eta + \omega_u)\right) = 0.$$

Ist C gefunden, so folgt A aus § I, 3) und muß dann auch der zweiten Gleichung in § I, 2) genügen. Um dies, falls es vielleicht bezweifelt werden könnte, weil Gleichung I des § I nicht durch Differentiation von 2) und 3) in § I entspringt, beachte man zunächst, daß die Gleichungen 2) und 3) dort völlig äquivalent sind, also

2a) $C_u - A_v \cos \omega = \theta A \sin \omega$, 3a) $C_u \sin \omega = \theta A - \eta C \cos \omega$,

2b) $A_v - C_u \cos \omega = -\eta C \sin \omega$, 3b) $A_v \sin \omega = \theta A \cos \omega - \eta C$

lauten, während die Gleichung I des § 1 aus 3a) und 2b) folgt. Setzt man aber die mit $\sin \omega$ multiplizierte 2b) in 3b) ein, welches für einen Augenblick $A_v \sin \omega = \theta A \cos \omega - \eta C + X$ heiße, so

[1]) Statt des log nat x soll immer Lx geschrieben werden.

folgt aus der Identität 3a) sofort $X = 0$, so daß nun auch 2a) und 2b) erfüllt sind. Es ist daher überflüssig, dies mit Hilfe des Wertes von A, was oft weitläufig wird, noch besonders nachzuweisen.

Die Invariante J_1 ist symmetrisch in η und θ, sie bildet überhaupt einen einfachen Fall. Dagegen sind bei der vorhin angegebenen Vertauschung die Werte der J_2 verschieden, und mögen gelegentlich als J_2^*, J_2^{**} bezeichnet werden, so daß man etwa zur Lösung die geeignete Form wählen kann.

Sind endlich θ und η beide Null, so hat man aus § I, 3) $C = V'$, $A = U'$[1]). Nun wird

$$ds^2 = (U' du)^2 + (V' dv)^2 + 2 du\, U' dv\, V' \cos\omega$$

durch Einführung neuer Variabeln u_1, v_1 also auch

$$ds^2 = du_1^2 + dv_1^2 + 2\, du_1\, dv_1 \cos\omega.$$

Aus $\varphi_{v_1} - \frac{\omega_{v_1}}{2} = 0$, $\varphi_{u_1} + \frac{\omega_{u_1}}{2} = 0$ folgt jetzt

$$\omega = V_1 - U_1, \quad 2\varphi = U_1 + V_1,$$

so daß nun

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2\, du\, dv \cos(V - U)$$

gesetzt werden kann. Um die zugehörigen Werte von x, y für dieses Längenelement zu finden, setze man

$$x_u = \cos\Phi, \quad x_v = \cos\Psi,$$
$$y_u = \sin\Phi, \quad y_v = \sin\Psi.$$

Die Integrabilität dieser Gleichungen verlangt aber

$$\Phi_v \sin\Phi = \Psi_u \sin\Psi, \quad \Phi_v \cos\Phi = \Psi_u \cos\Psi,$$

also $\sin(\Psi - \Phi) = 0$, oder nach Ausschließung des trivialen Falles $\Psi = \Phi$.

$$\Phi = U, \quad \Psi = V, \quad \cos\omega = V - U,$$

wo jetzt U, V wie überall im folgenden, willkürliche Funktionen der einzelnen Argumente u, v sind; demnach wird

$$x = \int \cos U\, du + \int \cos V\, dv, \quad y = \int \sin U\, du + \int \sin V\, dv.$$

[1]) Obere Indizes-Striche bei willkürlichen Funktionen einer Variablen bedeuten im folgenden immer Differentialquotienten, $V' = \frac{dV}{dv}$ etc.

§ III. Die Krümmungsradien der Netzkurven.

Nach den O. Bonnetschen Formeln sind die geodätischen Krümmungen $\frac{1}{\varrho_u}, \frac{1}{\varrho_v}$ der Kurven $u =$ konst, $v =$ konst[1]), in der Ebene also ihre Krümmungsradien ϱ_u, ϱ_v gegeben durch

$$\frac{\sqrt{eg-f^2}}{\varrho_u} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f}{\sqrt{g}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{g}), \quad \frac{\sqrt{eg-f^2}}{\varrho_v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f}{\sqrt{e}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{e}),$$

so daß

$$1) \quad \begin{cases} \dfrac{AC\sin\omega}{\varrho_u} = \dfrac{\partial}{\partial v}(A\cos\omega) - \dfrac{\partial C}{\partial u} = A_v\cos\omega - C_u - A\sin\omega\,\omega_v\,, \\ \dfrac{AC\sin\omega}{\varrho_v} = \dfrac{\partial}{\partial u}(C\cos\omega) - \dfrac{\partial A}{\partial v} = C_u\cos\omega - A_v - C\sin\omega\,\omega_u\,. \end{cases}$$

Setzt man nach § I, 2) für die rechten Seiten von 1) die betreffenden Werte ein, so erhält man die durch Einfachheit ausgezeichneten Formeln

$$2) \quad \frac{1}{\varrho_u} = -\frac{(\theta + \omega_v)}{C}, \quad \frac{1}{\varrho_v} = +\frac{\eta - \omega_u}{A},$$

die für jedes Netz auf einer abwickelbaren Fläche gelten und im folgenden oft zur Verwendung kommen.

Kurvennetze für die $\theta + \omega_v = 0$, $\eta - \omega_u = 0$ bestehen also aus geraden Linien, analog ist es, wenn nur eine dieser Bedingungen erfüllt ist.

Kurvennetze, für die $A = C$ ist, sollen im folgenden als rhombische Netze bezeichnet werden. Die Kurven des Netzes zerlegen dann die Ebene (resp. Fläche) in infinitesimale Rhomben und man hat nach 2) dann

$$\frac{\varrho_v}{\varrho_u} = -\frac{\partial}{\partial v}\left(\varphi + \frac{\omega}{2}\right) : \frac{\partial}{\partial u}\left(\varphi - \frac{\omega}{2}\right),$$

für $\varphi =$ konst, insbesondere

$$\frac{\varrho_v}{\varrho_u} = \frac{\omega_v}{\omega_u}.$$

[1]) u, v sind hier nicht Differentiations-Indizes, entgegen der früher festgesetzten Bezeichnung.

§ IV. Die Invarianten J_1 und J_2.

Ist $J_1 = 0$, also $\eta = 0$, so hat man nach § I

$$C_{uv} + C_u(\omega_v - \theta)\operatorname{cotg}\omega - \frac{\theta_v}{\theta} = 0,$$

während aus $\eta = 0$ jetzt $\theta = V' - \omega_v$ folgt. Es wird also

$$1)\qquad C_u = \frac{\theta\, U_2}{\sin\omega}\, e^{\int \theta \operatorname{cotg}\omega\, dv} = \frac{\theta\, U_2}{\sin^2\omega}\, e^{\int V' \operatorname{cotg}\omega\, dv}.$$

Man erhält daher

$$A = \frac{U_2\, e^{\int V' \operatorname{cotg}\omega\, dv}}{\sin\omega},$$

$$C = \int \frac{\theta\, U_2}{\sin^2\omega}\, e^{\int V' \operatorname{cotg}\omega\, dv}\, du + V_2 \text{[1]}.$$

Die Invariante J_2 kann allgemein durch Quadratur nicht gleich Null gemacht werden. Indessen kann man doch mehrere Fälle angeben, in denen die in der Form von J_2 liegenden Schwierigkeiten ($J_2 = 0$ ist eine Ampèresche Gleichung, die nur bei bestimmt gewähltem $\cos\omega$ direkt angebbare Charakteristiken hat), nicht auftreten.

Als ein einfacher Fall bietet sich zunächst

$$\theta = V', \quad \eta = U'$$

dar. Dann ist aber

$$\omega = U + V_1 - V - U_1,$$
$$2\varphi = U + V_1 + V + U_1.$$

Es wird dann

$$\sin^2\omega\, J_2 = U_1'(V_1' - 2V').$$

Ist nun $U_1' = 0$, so ist $\omega_u = U' = \eta$; die eine Schar des Netzes $v =$ konst ist geradlinig, während für die andere $\theta + \omega_v = V_1'$ im allgemeinen von Null verschieden bleibt. Ist dagegen $V_1' - 2V' = 0$, so sind beide Scharen des Netzes gekrümmt,

---

[1]) Ich unterlasse es, spezielle Formen zu betrachten, bei denen sich die Integrale weiter ausführen lassen. Auch für die Bestimmung der x, y ist hier nur in einzelnen Fällen Platz vorhanden, doch wird man im folgenden mehrere charakteristische Beispiele finden.

denn $\theta + \omega_v = 2V' \neq 0$. Ist endlich $U_1' = 2U'$, $V_1' = 2U'$, so sind die beiden (im allgemeinen verschiedenen Formen von J_2^* und J_2^{**}) gleich, so daß A und C durch Ausdrücke gleicher Gestalt, aber mit verschiedenen willkürlichen Funktionen bestimmt sind; alle Kurven des Netzes sind gekrümmt.

Man kann auch U' und V' als konstant annehmen; diese Annahme ist hier nicht weiter verfolgt, da sie mir, abgesehen von speziellen Fällen, nicht zu besonders beachtenswerten Resultaten zu führen schien.

Ist J_2 überhaupt gleich Null, also $V_1' - 2V' = 0$, $\omega = U - U_1 + V$, so wird aus der Gleichung für C in § I nach 4)

$$C_{uv} - C_u \frac{V''}{V'} + C_v U' \operatorname{cotg} \omega - C U' \frac{V''}{V'} \operatorname{cotg} \omega = 0$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial u} L\left(C_v - C \frac{V''}{V'}\right) = - U' \operatorname{cotg} \omega,$$

$$C_v - C \frac{V''}{V'} = V_2 e^{-\int U' \operatorname{cotg} \omega \, du},$$

so daß endlich

$$C = V' \left(\int \frac{V_2}{V'} e^{-\int U' \operatorname{cotg} \omega \, du} dv + U_2\right)$$

wird, woraus dann auch A zu entnehmen ist.

Es scheint aber bemerkenswert, daß J_2 schon Null ist, wenn $\eta = \omega_u$, also die Netzkurven $v =$ konst Gerade sind. Allerdings ist das ein Fall, der in rechtwinkeligen Koordinaten durch Gleichungen von der Form $x V_1 + y V_2 + V_3 = 0$, $F(x, y, u, v) = 0$ gegeben wird; aber für A und C ergeben sich dann keine übersichtlichen Werte. Ist nun $\eta = \omega_u$, so folgt $\varphi - \frac{\omega}{2} = V$ und daraus $\theta = \varphi_v - \frac{\omega_v}{2} = V'$. Die Gleichung für C wird jetzt

$$C_{uv} + C_u \left((\omega_v - V') \operatorname{cotg} \omega - \frac{V''}{V'}\right)$$

$$+ C_v \omega_u \operatorname{cotg} \omega + C\left(- \omega_u \frac{V''}{V'} \operatorname{cotg} \omega + \omega_u V' + \omega_{uv} \operatorname{cotg} \omega - \omega_u \omega_v\right) = 0$$

und

$$J_2 = \omega_{uv} \operatorname{cotg} \omega - \frac{\omega_u \omega_v}{\sin^2 \omega} + \frac{V' \omega_u}{\sin^2 \omega} - \frac{V' \omega_u}{\sin^2 \omega} - \omega_{vu} \operatorname{cotg} \omega + \frac{\omega_u \omega_v}{\sin^2 \omega} = 0.$$

Man erhält so

$$\frac{\partial}{\partial u} L\left[C_v + C\left((\omega_v - V')\operatorname{cotg}\omega - \frac{V''}{V'}\right)\right] = -\omega_u \operatorname{cotg}\omega,$$

also $$C\frac{\sin\omega}{V'}e^{-\int V'\operatorname{cotg}\omega\, dv} = \int V_2 e^{-\int V'\operatorname{cotg}\omega\, dv} dv + U_2 .$$

Dabei ist ω noch eine willkürliche Funktion von u, v, so daß bei den Integrationen, welche in Bezug auf partielle Differentiale du, dv auszuführen sind, die angegebenen Reduktionen eintreten.

§ V. Isogonale Netzkurven.

Ist ω eine Konstante, so wird $\theta = \varphi_v$, $\eta = \varphi_u$ also

$$C_{uv} - C_u\left(\varphi_v \operatorname{cotg}\omega + \frac{\varphi_{vv}}{\varphi_v}\right) + C_v\varphi_u \operatorname{cotg}\omega + Cc = 0 .$$

Ist nun $J_1 = 0$, so erhält man, da jetzt $\varphi = V$ sein muß:

$$\frac{\partial}{\partial v} L C_u = V'\operatorname{cotg}\omega + \frac{V''}{V'}$$

oder $$C_u = U_2 V' e^{V\operatorname{cotg}\omega}, \text{ also}$$

1) $$C = \int U_2 V' e^{V\operatorname{cotg}\omega} du + V_2, \quad A = U_2 e^{V\operatorname{cotg}\omega}\sin\omega,$$

wo wieder U_2, V_2 willkürliche Funktionen sind. Führt man an Stelle von $U_2\, du$ eine neue Variable du_1 ein, so hat man aus 1)

2) $$C = u_1 V' e^{V\operatorname{cotg}\omega} + V_2,$$
$$A = U_2 e^{V\operatorname{cotg}\omega}\sin\omega .$$

Zur Bestimmung von x, y setze man wieder

3) $$x_{u_1} = A\cos\Phi; \quad y_{u_1} = A\sin\Phi,$$
$$x_v = C\cos\Psi; \quad y_v = C\sin\Psi,$$

wobei nun $$\omega = \Psi - \Phi$$

sein muß. Der Kürze halber sollen die Gleichungen 3) nur für den Fall $\omega = \pi/2$ integriert werden, der allgemeine Fall unterscheidet sich nur durch größere Weitläufigkeit. Man hat dann aus 3)

4) $$x_{u_1} = U_2\cos\Phi, \quad x_v = (u_1 V' + V_2)\cos\Psi,$$
$$y_{u_1} = U_2\sin\Phi, \quad y_v = (u_1 V' + V_2)\sin\Psi,$$
$$\Psi = \Phi + \pi/2 .$$

Die Integrabilitätsbedingungen von 4) geben jetzt ($U_2 = 1$ gesetzt): $$-\sin\Phi\,\Phi_v = -\sin\Phi\,V' - \cos\Phi\,\Phi_{u_1}(u_1 V' + V_2)$$
$$+\cos\Phi\,\Phi_v = +\cos\Phi\,V' - \sin\Phi\,\Phi_{u_1}(u_1 V' + V_2)$$
oder $$\Phi = V, \quad \Phi_{u_1} = 0.$$

Die beiden Ausdrücke

5) $$\begin{aligned} x &= \int \cos V\,du_1 - \int (u_1 V' + V_2)\sin V\,dv,\\ y &= \int \sin V\,du_1 + \int (u_1 V' + V_2)\cos V\,dv \end{aligned}$$

sind in der Tat total integrierbar und liefern

6) $$\begin{aligned} x &= u_1 \cos V - \int V_2 \sin V\,dv,\\ y &= u_1 \sin V + \int V_2 \cos V\,dv. \end{aligned}$$

Bei konstantem v wird also

$$\sin V\left(x + \int V_2 \sin V\,dv\right) = \cos V\left(y - \int V_2 \cos V\,dv\right),$$

man erhält also geradlinige Kurven des Netzes für $v =$ konst, welche nicht durch einen Punkt gehen. Die Krümmungsradien der Kurven $u =$ konst werden dagegen

$$\frac{1}{\varrho_u} = -\frac{V'}{u_1 V' + V_2}.$$

Die Invariante J_2 wird für ein isogonales Netz gleich Null, wenn

7) $$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi_{vv}}{\varphi_v}\right) + 2\varphi_{uv}\operatorname{cotg}\omega + \frac{\varphi_u \varphi_v}{\sin^2\omega} = 0.$$

Da durch Quadratur keine Lösung dieser Gleichung bekannt ist, sei zur Lösung derselben $\varphi = f(u+v)$, $u + v = s$ vorausgesetzt. Für $z = f' = e^{\zeta}$ hat man dann aus 7)

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{d\zeta}{ds}\right) + 2e^{\zeta}\operatorname{cotg}\omega\,\frac{d\zeta}{ds} + \frac{e^{2\zeta}}{\sin^2\omega} = 0.$$

Wird ζ zur unabhängigen Variablen gemacht, so erhält man

$$-\frac{d^2 s}{d\zeta^2} + 2e^{\zeta}\left(\frac{ds}{d\zeta}\right)^2\operatorname{cotg}\omega + \frac{e^{2\zeta}}{\sin^2\omega}\left(\frac{ds}{d\zeta}\right)^3 = 0$$

oder für $\dfrac{ds}{d\zeta} = \sigma$ die Differentialgleichung erster Ordnung

$$-\frac{d\sigma}{d\zeta} + e^{2\zeta}\sigma^2\operatorname{cotg}\omega + \frac{e^{2\zeta}}{\sin^2\omega}\sigma^3 = 0.$$

Ließe sich diese schon über den Typus der Riccatischen Gleichungen hinausgehende Gleichung lösen, so hätte man $\sigma = \Phi(\zeta)$, also auch $\zeta = \Psi(s)$, endlich aus $f' = e^{\Psi(s)}$, $f = \int e^{\Psi(s)}\, ds +$ Konst, und hierin mag man den Grund erblicken, weshalb so wenige von willkürlichen Funktionen abhängige isogonale Systeme geläufig sind.

§ VI. Rhombische Netze mit konstantem Koordinatenwinkel.

Unter der Voraussetzung $A = C$ hat man

$$1)\qquad \frac{C_u}{C} = \frac{\theta - \eta \cos\omega}{\sin\omega}, \quad \frac{C_v}{C} = \frac{\theta\cos\omega - \eta}{\sin\omega},$$

also die Bedingung

$$2)\qquad \begin{aligned} &\theta_v - \eta_v \cos\omega + \frac{\eta\,\omega_v}{\sin\omega} - \theta\,\omega_v \frac{\cos\omega}{\sin\omega} \\ &= \theta_u \cos\omega - \theta \frac{\omega_u}{\sin\omega} - \eta_u + \eta\,\omega_u \frac{\cos\omega}{\sin\omega}, \end{aligned}$$

deren beide Seiten durch die angegebenen Vertauschungen ineinander übergehen. Es ist das aber nicht etwa eine lineare Differentialgleichung für θ, η, da, wie schon bemerkt, θ, η und ω nicht voneinander unabhängig sind. Man muß daher $\theta = \varphi_v - \frac{\omega_v}{2}$, $\eta = \varphi_u + \frac{\omega_u}{2}$ setzen und erhält so eine Ampèresche Gleichung für φ, wenn ω als gegebene Funktion von u, v betrachtet werden soll. Setzt man zunächst ω als konstant voraus, so hat man aus 2)

$$\varphi_{vv} - 2\,\varphi_{uv} \cos\omega + \varphi_{uu} = 0$$

mit der allgemeinen Lösung für φ

$$3)\qquad \varphi = F(u + e^{\omega i} v) + \bar{F}(u + e^{-\omega i} v),$$

wobei der Strich bei F die durch den Übergang der komplexen Konstanten in F in ihre konjugierten Werte entstandene Funktion ist, da u, v als reelle Variable[1]) anzusehen sind. Man erhält dann aus 1) die Lösung

[1]) An der an und für sich gar nicht gebotenen Beschränkung auf reelle Verhältnisse ist hier überall festgehalten; in Rücksicht auf den geometrischen Zweck dieses Versuches schien dies das natürlichste.

4) $$L(C) = i(F - \bar{F}) \text{ oder } C = e^{i(F-\bar{F})},$$

also das Längenelement

$$ds^2 = C^2 (du^2 + dv^2 + 2\,du\,dv \cos\omega).$$

Um jetzt x, y in möglichst übersichtlicher Form zu erhalten, setze man wieder

5) $$\begin{matrix} x_u = C\cos\Phi, & y_u = C\sin\Phi \\ x_v = C\cos\Psi, & y_v = C\sin\Psi \end{matrix}; \quad \Psi - \Phi = \omega,$$

also
$$\frac{\partial}{\partial u}(LC) = \Phi_v - \cos\omega\,\Phi_u : \sin\omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(LC) = \cos\omega\,\Phi_v - \Phi_u : \sin\omega,$$

wobei
$$\Psi_u = \Phi_u, \quad \Psi_v = \Phi_v$$

zu setzen ist.

Dies sind aber gerade wieder die Gleichungen 1), wenn $\Phi = \varphi$, $\Psi = \varphi + \omega$ gesetzt wird, wie eine unmittelbare Vergleichung zeigt.

Man hat also jetzt aus 5)

$$x_u + i y_u = C(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$x_v + i y_v = C(\cos(\varphi + \omega) + i\sin(\varphi + \omega))$$

und hieraus

$$d(x + iy) = C e^{i\varphi}(du + e^{i\omega} dv),$$

oder
$$d(x - iy) = C e^{-i\varphi}(du + e^{-i\omega} dv)$$

6) $$ds^2 = C^2(du^2 + dv^2 + 2\,du\,dv\cos\omega)$$ und

7) $$(x + yi) = \int e^{i(F-\bar{F})} e^{i\varphi}(du + e^{i\omega} dv),$$

wobei $\varphi = F + \bar{F}$ zu setzen ist.

Es hat sich darnach der Satz ergeben:

Zerlegt man das Integral in 7) in seinen reellen und imaginären Bestandteil, so ergeben sich aus 7) die rechtwinkligen Koordinaten x, y.

Man kann übrigens sofort ganz spezielle Netze angeben, welche aus parallelen geraden Linien bestehen und rhombisch mit konstantem Koordinatenwinkel sind. Ein solches ist z. B.

$$x = v \sin \omega,$$
$$y = u + v \cos \omega$$

mit dem Längenelemente

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2\, du\, dv \cos \omega,$$

welches für $(u + v) \cos \frac{\omega}{2} = u_1$, $(u - v) \sin \frac{\omega}{2} = v_1$

die isotherme Gestalt $ds^2 = du_1^2 + dv_1^2$ annimmt. Indem man dann die bekannte komplexe Transformation $u_2 + i v_2 = F(u_1 + i v_1)$ anwendet, erhält man den Zugang zu rhombisch isothermen Netzen mit dem Winkel ω, die man wieder entsprechend zu transformieren hat. Doch sind dazu weniger übersichtliche Eliminationen erforderlich, so daß die Gleichung 7) wohl vorzuziehen ist. Von einem gewissen Interesse scheint es hier zu sein, daß die Funktion $f(u + e^{i\omega} v)$ als Verallgemeinerung der Funktion $f(u + iv)$ auftritt, welche den rhombischen Teilungen mit dem Winkel $\omega = \pi/2$ zu Grunde liegt. Sie hat aber ganz andere Eigenschaften, auf die hier hingewiesen sein möge, da sie bisher, soviel mir bekannt, keine Erwähnung gefunden haben.

Wenn $$f(u + e^{i\omega} v) = P + iQ$$

gesetzt und die Ableitung nach dem Argumente $u + e^{i\omega} v$ mit einem oberen Strich bezeichnet wird, dabei zugleich auch die Buchstaben C und S für einen Augenblick der Kürze halber $\cos \omega$ und $\sin \omega$ bedeuten, so hat man

$$f' = P_u + i Q_u, \quad e^{i\omega} f' = P_v + i Q_v,$$

also auch
$$(P_u + i Q_u) e^{i\omega} = P_v + i Q_v,$$
$$(P_u - i Q_u) e^{-i\omega} = P_v - i Q_v.$$

8)
$$P_u C - Q_u S = P_v,$$
$$P_u S + Q_u C = Q_v.$$

Aus 8) folgt

9) $$P_u^2 + Q_u^2 = P_v^2 + Q_v^2.$$

Differentiiert man 8) nach u, v, so hat man

10)
$$\text{a) } P_{uu} C - Q_{uu} S = P_{uv},$$
$$\text{b) } P_{uv} C - Q_{uv} S = P_{vv};$$

$$11)\quad \begin{aligned} &a)\ P_{uu} S + Q_{uu} C = Q_{vu}.\\ &b)\ P_{uv} C + Q_{uv} C = Q_{vv}.\end{aligned}$$

Bildet man die Summe der Quadrate aus 10 a) und 11 a) etc., so hat man

$$12)\quad P^2_{uu} + Q^2_{uu} = P^2_{uv} + Q^2_{uv} = P^2_{vv} + Q^2_{vv}.$$

Wird der gemeinsame Wert der drei Ausdrücke in 12) mit Δ bezeichnet, so erhält man durch Auflösung von 10) und 11):

$$\begin{aligned} C\Delta &= P_{uv} P_{uu} + Q_{uv} Q_{uu},\\ S\Delta &= Q_{uv} P_{uu} - P_{uv} Q_{uu},\\ C\Delta &= P_{vv} P_{uv} + Q_{vv} Q_{uv},\\ S\Delta &= Q_{vv} P_{uv} - P_{vv} Q_{uv};\end{aligned}$$

hieraus folgt

$$13)\quad \begin{aligned} P_{uv} P_{uu} + Q_{uv} Q_{uu} &= P_{vv} P_{uv} + Q_{vv} Q_{uv},\\ Q_{uv} P_{uu} - P_{uv} Q_{uu} &= Q_{vv} P_{uv} - P_{vv} Q_{uv}, \text{ also}\end{aligned}$$

$$14)\quad \begin{aligned} P_{uv}(P_{uu} - P_{vv}) &= Q_{uv}(Q_{vv} - Q_{uu}),\\ Q_{uv}(P_{uu} + P_{vv}) &= P_{uv}(Q_{vv} + Q_{uu}),\end{aligned}$$

so daß auch

$$15)\quad P^2_{uu} - P^2_{vv} = Q^2_{vv} - Q^2_{uu}.$$

Außer diesen Identitäten kann man noch andere, aber von ihnen nicht verschiedene herleiten. Ist nun das Netz rhombisch und orthogonal, so ist $C = 0$, $S = 1$, also jetzt

$$\begin{aligned} P_{uv} P_{uu} + Q_{uv} Q_{uu} &= 0,\\ P_{vv} P_{uv} + Q_{uv} Q_{vv} &= 0,\end{aligned}$$

also auch $\quad P_{uv}(P_{uu} + P_{vv}) + Q_{uv}(Q_{uu} + Q_{vv}) = 0.$

Aus der zweiten Gleichung 14) hat man aber

$$Q_{uv}(P_{uu} + P_{vv}) - P_{uv}(Q_{uu} + Q_{vv}) = 0$$

und erst jetzt folgen die für komplexe Variable charakteristischen Gleichungen $\quad P_{uu} + P_{vv} = Q_{uu} + Q_{vv} = 0,$

deren Ableitung aus den allgemeinen Eigenschaften der Funktion $f(u + e^{i\omega} v)$ allerdings unerwartet umständlich erscheinen mag.

§ VII. Isogonale Netze mit Krümmungsradien im Verhältnisse $b : - a$.

Aus den Gleichungen des § II

$$\frac{1}{\varrho_u} = -\frac{\theta + \omega_v}{C}, \quad \frac{1}{\varrho_v} = \frac{\eta - \omega_u}{A}$$

wird für die Forderung

$$\varrho_u = -\lambda a, \quad \varrho_v = \lambda b,$$

$$C = a\lambda(\theta + \omega_v), \quad A = b\lambda(\eta - \omega_u) \tag{1}$$

und aus den Gleichungen des § I für konstantes ω erhält man jetzt, weil nach 1)

$$C_u = a(\theta_u \lambda + \theta \lambda_u), \quad A_v = b(\eta_v \lambda + \eta \lambda_v),$$
$$a(\theta_u \lambda + \theta \lambda_u) = \eta \theta \lambda (b - a \cos\omega) : \sin\omega,$$
$$b(\eta_v \lambda + \eta \lambda_v) = \eta \theta \lambda (b \cos\omega - a) : \sin\omega \text{ oder}$$

$$\begin{aligned} \frac{\theta_u}{\theta} + \frac{\lambda_u}{\lambda} &= \eta\left(\frac{b}{a} - \cos\omega\right) : \sin\omega, \\ \frac{\eta_v}{\eta} + \frac{\lambda_v}{\lambda} &= \theta\left(\cos\omega - \frac{a}{b}\right) : \sin\omega. \end{aligned} \tag{2}$$

Hier ist λ die einzige unbekannte Funktion, da $\theta = \varphi_v$, $\eta = \varphi_u$ bei konstantem ω zu setzen ist. Die geforderte Existenz von λ liefert nach 2) die Gleichung

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta_u}{\theta}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\eta_v}{\eta}\right) \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial v}\left(\frac{b}{a} - \cos\omega\right) : \sin\omega - \frac{\partial \theta}{\partial u}\left(\cos\omega - \frac{a}{b}\right) : \sin\omega. \end{aligned} \tag{3}$$

Diese Gleichung nimmt aber durch Eintragen von θ und η die Form an

$$\frac{\partial^2}{\partial u \, \partial v} L\left(\frac{\varphi_v}{\varphi_u}\right) = \varphi_{uv}\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2\cos\omega\right) : \sin\omega \tag{4}$$

und das ist eine Differentialgleichung für φ allein, deren allgemeines Integral ist

$$L\left(\frac{\varphi_v}{\varphi_u}\right) = \varkappa \varphi + V - U, \tag{5}$$

wenn noch

$$\varkappa = \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2\cos\omega\right) : \sin\omega$$

gesetzt wird. Setzt man endlich

$$\frac{\varphi_v}{\varphi_u} = e^{\varkappa\varphi}\, e^V e^{-U}$$

und
$$e^V \partial v = \partial v_1, \quad e^U \partial u = \partial u_1,$$

so hat man die lineare Differentialgleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\, e^{\varkappa\varphi},$$

deren allgemeines Integral aus den beiden Integralgleichungen

$$u_1 + v_1 e^{c_1\varkappa} = F(c_1), \quad \varphi = c_1$$

durch

6)
$$u_1 + v_1 e^{\varkappa\varphi} = F(\varphi)$$

gegeben ist, wobei F eine willkürliche Funktion bedeutet. Aus 6) kann man, eventuell bei geeigneter Annahme von F, φ als Funktion von u, v und $\varkappa$ entnehmen. Man kann z. B., um nur die einfachsten Fälle zu erwähnen, $F = \alpha\varphi + \beta$, $F = e^{\alpha\varphi} + \beta$ etc. nehmen, doch ist hier nicht der Ort, um das weiter auszuführen. Ist so φ bestimmt, so erhält man aus 2) die Unbekannte λ, und endlich aus 1) auch C und A. Ganz einfache Beispiele dafür werden übrigens noch an einer anderen Stelle gegeben[1]).

§ VIII. Orthogonale Netzkurven.

Da die Bestimmung isogonaler Netze im § V abgesehen vom Falle $J_1 = 0$ auf größere Schwierigkeiten geführt hat, sei noch die Voraussetzung orthogonaler Kurven gemacht, oder $\omega = \pi/2$. Nach § I hat man dann

$$C_u = A\varphi_v,$$
$$A_v = -C\varphi_u,$$

also

1)
$$C_{uv} - C_u \frac{\varphi_{vv}}{\varphi_v} + C\varphi_u\varphi_v = 0.$$

---

[1]) Vgl. § IX, S. 64.

Die Invariante J_1 ist Null, wenn φ nur Funktion von v ist; es wird dann, wie schon vorhin bemerkt, $A = U_2$, $C = \int U_2 V' du + V_2$. J_2 wird gleich Null, wenn

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi_{vv}}{\varphi_v}\right) + \varphi_u \varphi_v = 0$$

ist. Da ein allgemeines Integral dieser jetzt noch willkürlich gebliebenen Funktion φ nicht bekannt ist durch Quadratur, so werde

$$\varphi = f(u+v), \quad u + v = s^{1)}$$

gesetzt. Man erhält jetzt für $\varphi_u = \varphi_v = f'$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{f''}{f'}\right) + f'^2 = 0$$

oder für $$f' = F$$

2) $$\frac{F'}{F}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{F'}{F}\right) + FF' = 0$$

mit dem Integrale

3) $$\left(\frac{F'}{F}\right)^2 + F^2 = k^2,$$

wo k eine notwendiger Weise reelle Konstante. Es wird demnach

4) $$F = \frac{2k}{e^{ks} + e^{-ks}}$$

und nach 1)

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(C_v - C\frac{F'}{F}\right) + C\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{f''}{f'}\right) + f'^2\right) = 0,$$

also: $$C_v - C\frac{F'}{F} = V_2 \quad \text{und}$$

5) $$C = F\left(\int \frac{V_2}{F} dv + U_2\right), \quad A = \frac{C_u}{F},$$

$$A = \frac{F'}{F}\left(\int V_2 \frac{dv}{F} + U_2\right) - \int V_2 \frac{F' dv}{F^2} + U_2'$$

und es läßt sich auch durch direkte Rechnung verifizieren, daß

[1]) Dieser Fall läßt sich auch behandeln, wenn man $\varphi = f(u+v) + av$ setzt. Vgl. auch § X, S. 67.

$$A_v = \left(\frac{F'}{F}\right)' \left(\int \frac{V_2}{F}\, d v + U_2\right) = - F C$$

wird. Aus A und C sind wieder x und y durch Quadratur zu entnehmen, doch mag diese schon mehrfach wiederholte Rechnung, die auch nicht ganz einfach ausfällt, übergangen werden. In dem speziellen Falle, wo V_2 gleich einer Konstanten v_0, $U_2 = 0$ genommen wird, findet man als Werte der Krümmungsradien

$$\frac{1}{\varrho_u} = -\frac{F}{C}, \quad \frac{1}{\varrho_v} = \frac{k^2}{v_0},$$

da $A = \dfrac{2 v_0}{k(e^{ks} + e^{-ks})}$ wird.

Die Kurven $v =$ konst. des Netzes sind also Kreise von konstantem Radius, endlich ist

$$\varrho_u = - v_0 \left(\frac{e^{ks} - e^{-ks}}{2 k^2}\right).$$

Es ist aber zu bemerken, daß die Gleichung 1) noch eine andere Lösung für C liefern kann, die allerdings keine willkürlichen Funktionen U, V mehr enthält, wenn man

$$C = F(u + v), \quad \varphi = f(u + v), \quad u + v = s$$

setzt. Man findet jetzt die Gleichung

$$F'' - F' \frac{f''}{f'} + F f'^2 = 0$$

oder

$$\frac{F'}{f'} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{F'}{f'}\right) + F F' = 0$$

mit der Lösung

$$\left(\frac{F'}{f'}\right)^2 + F^2 = k^2,$$

deren Integral $F = k \sin f$ ist, und der zugehörige Wert von A wird dann $k \cos f$, wobei $\varphi = f$ ist. Das Längenelement ist jetzt

6) $$d s^2 = k^2 (\cos^2 f\, d u^2 + \sin^2 f\, d v^2),$$

wobei $f = \varphi$ noch eine willkürliche Funktion von s bleibt. Um nun die Werte der Koordinaten x, y zu finden, setze man, den

Werten von A und C gemäß, die ersichtlich einer Fläche von der Krümmung Null entsprechen, nach 6)

$$\text{7)}\qquad \begin{cases} x_u = \cos\varphi\cos\lambda, & x_v = \sin\varphi\cos\mu, \\ y_u = \cos\varphi\sin\lambda, & y_v = \sin\varphi\sin\mu. \end{cases}$$

Damit die Orthogonalitätsbedingung erfüllt sei, hat man

$$x_u x_v + y_u y_v = \cos\varphi\sin\varphi(\cos\lambda\cos\mu + \sin\lambda\sin\mu)$$

zu setzen, es ist also $\lambda - \mu = \pi/2$. Man hat daher aus 7)

$$x_u = -\cos\varphi\sin\mu, \quad x_v = \sin\varphi\cos\mu,$$
$$y_u = \cos\varphi\cos\varphi, \quad y_v = \sin\varphi\sin\mu.$$

Jetzt liefern die Integrabilitätsbedingungen

$$\sin\varphi\sin\mu(\varphi' + \mu_u) - \cos\varphi\cos\mu(\varphi' + \mu_v) = 0,$$
$$\sin\varphi\cos\mu(\varphi' + \mu_u) + \cos\varphi\sin\mu(\varphi' + \mu_v) = 0,$$

also, wenn φ willkürlich bleiben soll, was ja in der Natur der Aufgabe liegt $\sin\varphi\cos\varphi(\sin^2\mu + \cos^2\mu) = 0$.

Es bleibt daher jetzt

$$\varphi' = -\mu_u, \quad \varphi' = -\mu_v \text{ oder } \varphi = -\mu$$

und es wird

$$x_u = \cos\varphi\sin\varphi, \quad x_v = \sin\varphi\cos\varphi,$$
$$y_u = \sin\varphi\cos\varphi, \quad y_v = -\sin\varphi\sin\varphi$$

und endlich hat man die totalen Differentialformeln:

$$x = \int\cos\varphi\sin\varphi(du + dv), \quad y = \int(\cos^2\varphi\, du - \sin^2\varphi\, dv).$$

§ IX. Geradlinige rhombische Netzkurven.

Die einfachsten rhombischen Netze sind wohl diejenigen, die nur von geraden Linien gebildet werden. Ich gebe hier ein ganz einfaches Beispiel, das mich überhaupt zu einer weiteren Untersuchung solcher Netze veranlaßte.

Wenn die Kurven des Netzes aus zwei Strahlenbüscheln bestehen, die von den Punkten $+a, 0$; $-a, 0$ des rechtwinkligen Systems der x und y auslaufen, so sind in

$$y = (x + a)f, \quad y = (x - a)\varphi$$

f und φ Funktionen von u und v respektive allein. Man hat dann

$$1)\qquad x = \frac{a(f+\varphi)}{\varphi - f}, \quad y = \frac{2af\varphi}{\varphi - f},$$

also

$$2)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{x_u}{a} &= \frac{2f'\varphi}{p^2}, & \frac{x_v}{a} &= -\frac{2f\varphi'}{p^2}, \\ \frac{y_u}{a} &= \frac{2f'\varphi^2}{p^2}, & \frac{y_v}{a} &= -\frac{2\varphi' f^2}{p^2}, \end{aligned} \right.$$

$$p = \varphi - f.$$

Soll eine rhombische Teilung entstehen, so muß

$$f'^2(\varphi^2 + \varphi^4) = \varphi'^2(f^2 + f^4)$$

sein. Das ist aber nur möglich, wenn

$$3)\qquad \frac{f'^2}{f^2 + f^4} = \frac{\varphi'^2}{\varphi^2 + \varphi^4} = k^2,$$

wo k eine reelle Konstante ist. Man erhält aus 3)

$$\frac{2}{f} = e^{ku} - e^{-ku}, \quad \frac{2}{\varphi} = \pm(e^{kv} - e^{-kv}),$$

doch genügt es, das + Zeichen zu benutzen. Man hat also aus 1)

$$4)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{e^{kv} - e^{-kv} + e^{ku} - e^{-ku}}{e^{ku} - e^{-ku} - (e^{kv} - e^{-kv})}, \\ \frac{y}{a} &= \frac{4}{e^{ku} - e^{-ku} - (e^{kv} - e^{-kv})}. \end{aligned} \right.$$

Für $e^{ku} = u_1$, $e^{kv} = v_1$ entsteht also

$$\frac{x}{a} = \frac{(v_1 + u_1)(u_1 v_1 - 1)}{(-v_1 + u_1)(u_1 v_1 + 1)},$$

$$\frac{y}{a} = \frac{4 u_1 v_1}{(-v_1 + u_1)(u_1 v_1 + 1)}.$$

Diese Kurven sind aber Kegelschnitte des Systems, wenn man

$$v_1 = k u_1 \quad \text{oder} \quad v_1 u_1 = k$$

setzt; sie werden zu rationalen Kurven dritter Ordnung, wenn z. B. $u_1 + v_1 =$ konst. ist.

Nach diesem einfachen Beispiele betrachten wir die allgemeine rhombische Teilung durch gerade Linien. Es ist dann $\theta = -\omega_v$, $\eta = \omega_u$ zu setzen, also auch

5) $$\omega = U + V, \quad 2\varphi = U - V$$

und $$-\frac{C_u}{C} = \frac{\omega_v + \omega_u \cos\omega}{\sin\omega}, \quad -\frac{C_v}{C} = \frac{\omega_v \cos\omega + \omega_u}{\sin\omega},$$

woraus für ω die Bedingung folgt:

6) $$\omega_{vv} - \omega_v^2 \frac{\cos\omega}{\sin\omega} = \omega_{uu} - \omega_u^2 \frac{\cos\omega}{\sin\omega},$$

deren allgemeines Integral

7) $$L\left(\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right) = f(u+v) + F(u-v)$$

sich aus 6) ergibt, sowie dieselbe durch Division mit $\sin\omega$ auf die Form
$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(L\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(L\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right)$$
gebracht wird. Die Gleichung 6) ist zunächst sicher erfüllt, wenn ω selbst eine Funktion von $u + v$, also $U = u$, $V = v$ ist. Dann hat man aus 5)

$$-dLC = \frac{(1+\cos\omega)}{\sin\omega}(du + dv) = 2\,\frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}, \quad d\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

so daß
$$C\sin^2\frac{\omega}{2} = \frac{k}{2} \text{ für } k = 1 \text{ in}$$

8) $$C = \frac{1}{1-\cos(u+v)}$$

übergeht. Um in diesem speziellen Falle die Koordinaten x, y zu erhalten, ist jetzt zu setzen

9) $$\begin{aligned} x_u &= C\cos\Phi, & y_u &= C\sin\Phi, \\ x_v &= C\cos\Psi, & y_v &= C\sin\Psi, \end{aligned}$$

$$\Psi - \Phi = u + v, \quad \Psi_u = \Phi_u + 1, \quad \Psi_v = \Phi_v + 1,$$

da ja $x_u x_v + y_u y_v = C^2\cos(\Psi - \Phi) = C^2\cos\omega$ sein muß.

Aus 9) ergeben sich die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{C_v}{C}\cos\Phi - \sin\Phi\,\Phi_v = \frac{C_u}{C}\cos\Psi - \sin\Psi\,\Psi_u,$$
$$\frac{C_v}{C}\sin\Phi + \cos\Phi\,\Phi_v = \frac{C_u}{C}\sin\Psi + \cos\Psi\,\Psi_u,$$

woraus durch Multiplikation mit $-\sin\Phi$, $\cos\Phi$ und $-\sin\Psi$, $\cos\Psi$ und jedesmalige Addition

$$\Phi_v = \frac{C_u}{C}\sin(u+v) + \Psi_u\cos(u+v),$$
$$-\frac{C_v}{C}\sin(u+v) + \Phi_v\cos(u+v) = \Psi_u$$

folgt. Diese Gleichungen sind identisch erfüllt, wenn $\Phi = -v$, $\Psi = u$ gesetzt wird, wie aus den Werten von C in 5) sofort zu ersehen ist. Man erhält also

$$x = \int C\cos v\,du + \int C\cos u\,dv,$$
$$y = -\int C\sin v\,du + \int C\sin u\,dv;$$

dx, dy sind dann totale Differentiale, was man übrigens auch durch die Gleichungen

$$\frac{\partial C\cos v}{\partial v} = \frac{\partial C\cos u}{\partial u},$$
$$-\frac{\partial C\sin v}{\partial v} = \frac{\partial C\sin u}{\partial u}$$

bestätigen kann. Man erhält nun auch x und y selbst in der Gestalt

$$-x = \cos\frac{u-v}{2} : \sin\frac{u+v}{2},$$
$$-y = \sin\frac{u-v}{2} : \sin\frac{u+v}{2}$$

und bestätigt so die Richtigkeit der Gleichungen

$$dx = du\cos v + dv\sin u : 1 - \cos(u+v),$$
$$dy = -du\sin v + dv\sin u : 1 - \cos(u+v).$$

Aus diesen folgt endlich durch Multiplikation und Addition

$$-x\sin u + y\cos u = 1,$$
$$x\sin v + y\cos v = -1$$

und dies sind die Geraden, welche zum cosinus des Winkels $\cos(v+u) = \cos\omega$ haben. Es sind das aber gerade Linien, welche den Kreis mit dem Radius 1 (weil $k = 1$ genommen wurde) berühren. Dies ist ein zweites einfaches Beispiel; es soll jetzt zur allgemeinen Auflösung der Aufgabe übergegangen werden. Die Gleichung 7), die man bequemer wieder durch 6) ersetzt, nimmt, wenn (in $\omega = U + V$) $-V$ für V gesetzt wird, die Gestalt an

$$10)\qquad \begin{cases} U'' + V'' = (U'^2 - V'^2)\operatorname{cotg}(U - V) \\ \text{oder} \quad \operatorname{arctg}\left(\dfrac{U'^2 - V'^2}{U'' + V''}\right) = U - V. \end{cases}$$

Eine Lösung der Gleichung 6) ist allerdings unmittelbar zu sehen. Sie besteht darin, daß man $U =$ konst, noch einfacher $U = 0$ setzt. Es ergibt sich dann aus 6)

$$\omega_v = k \sin\omega .$$

Die Koordinaten x, y lassen sich durch dieselbe Methode wie vorhin bestimmen. Man findet so

$$11)\qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{k} e^{-ku} \dfrac{\cos\omega}{\sin\omega}, \\ y = \dfrac{e^{-ku}}{k}. \end{cases}$$

In der Tat wird jetzt

$$x_u = e^{-ku}\frac{\cos\omega}{\sin\omega}, \qquad y_u = -e^{-ku},$$

$$x_v = \frac{e^{-ku}}{k}\,\frac{\omega_v}{\sin^2\omega}, \qquad y_v = 0.$$

Darnach wird

$$x_u^2 + y_u^2 = E = \frac{e^{-2ku}}{\sin^2\omega}, \qquad x_v^2 + y_v^2 = G = \frac{e^{-2ku}}{\sin^2\omega}.$$

also $E = G$. Da auch

$$\frac{x_u x_v + y_u y_v}{\sqrt{EG}} = \cos\omega$$

wird, so sind alle Bedingungen durch 11) erfüllt. Die Netzkurven $u =$ konst sind hier die Parallelen zur x Axe; die Kurven v

$=$ konst. aber durch $y/x = -\operatorname{tg}\omega$ vertreten, also Gerade durch den Koordinatenanfang. Dies einfache Beispiel entsteht aus den beiden im Eingange dieses Paragraphen behandelten Strahlenbüscheln, wenn das Zentrum des einen im Koordinatenanfang, das des andern unendlich weit auf der x Axe entfernt ist.

Aber dies sind sämtlich nur spezielle Lösungen der Gleichung 10), die mittelst der gebräuchlichen Methode der Differentiation nach den unabhängigen u, v zu behandeln ist. Mein Kollege, Herr O. Perron in München, dem ich diese Funktionalgleichung mitteilte, gab mir auch alsbald die allgemeine Lösung derselben, die einen überraschend einfachen Charakter besitzt.

Durch Differentiation von 10) nach u entsteht

12) $$\begin{aligned} &(U'')^2 - U'U''' - (U')^4 - [(V'')^2 + (V')^4] \\ &\qquad + \left(2(U')^2 + \frac{U'''}{U'}\right)(V')^2 = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist von der Form

12a) $$f(u) + \varphi(v) + F(u)\,\Phi(v) = 0,$$

in der f, φ, F, Φ Funktionen sind, die allein von den bezüglichen Argumenten u, v abhängen. Durch Differentiation nach u und v folgt aber aus 12a)

$$F'(u)\,\Phi'(v) = 0.$$

Es muß also $F(u)$ oder $\Phi(v)$ konstant sein. Wäre aber $\Phi(v)$ konstant, so würde nach 12) V' selbst konstant, etwa gleich a sein; das führt aber auf einen der bereits ausgeschlossenen, oder andere einfache Fälle. Es bleibt also nur die Möglichkeit, daß $F(u)$ konstant ist, und dann ist nach 12a) $f(u)$ von u unabhängig, also wieder konstant.

Diese entscheidenden Bemerkungen verdanke ich Herrn Perron, und es ist daher nach 12)

13) $$\left\{\begin{aligned} &2(U')^2 + \frac{U'''}{U'} = a, \\ &(U'')^2 - U'U''' - (U')^4 = b \end{aligned}\right.$$

zu setzen, wo a und b Konstanten sind.

Man erhält also zwei Differentialgleichungen für U als Funktionen von u, und es ist nun zu zeigen, was Perron eben-falls erkannte, daß diese Gleichungen 13) gemeinsame Lösungen haben. Da es aber für das Folgende wesentlich ist, daß a, b willkürliche Konstanten bleiben können, gebe ich den Beweis dafür mit einer allerdings nur unwesentlichen Änderung seiner Analyse.

Man betrachte die Differentialgleichung

14) $$(U')^4 + (U'')^2 - a(U')^2 - b = 0$$

mit willkürlichen Konstanten a, b, deren Lösung U ist. Durch Differentiieren hat man

$$2\,U'^3\,U'' + U''\,U''' - a\,U'\,U'' = 0$$

oder, bei Ausschluß des speziellen Falles $U'' = 0$, der wieder nur auf spezielle Lösungen führen kann,

15) $$2\,U'^3 + U''' - a\,U' = 0,$$

was die erste Gleichung 13) ist.

Schreibt man jetzt 15) in der Form

$$2(U')^4 + U'''\,U' - a\,U'^2 = 0$$

und subtrahiert davon die Gleichung 14), so erhält man die zweite Gleichung 13). Endlich folgt nun nach 14) die Gleichung

$$U'' = \sqrt{a(U')^2 + b - (U')^4}$$

und aus 12) nebst den beiden Gleichungen 13)

$$b + a(V')^2 = (V'')^2 + (V')^4$$

oder
$$V'' = \sqrt{a(V')^2 + b - (V')^4}.$$

Es ist also

$$\int \frac{\partial U'}{\sqrt{a(U')^2 + b - (U')^4}} = u,$$

$$\int \frac{\partial V'}{\sqrt{a(V')^2 + b - (V')^4}} = v$$

und aus diesen nur durch die Bezeichnung verschiedenen elliptischen Differentialgleichungen lassen sich jetzt die Funktionen U', V' mit zwei willkürlichen Konstanten bestimmen. Damit sind denn auch allgemeinere Lösungen für das Längenelement

$$ds^2 = C^2(du^2 + dv^2 + 2\,du\,dv\cos\omega)$$

gewonnen, oder ∞^2 Paare reeller Kurven, deren Tangenten ein rhombisches System bilden. Die Lösung derselben, sowie die Darstellung der Koordinaten x und y erfordert eine ausführliche Betrachtung, für die in diesen Sitzungsberichten kein Raum ist.

Besonders nahe liegend würde es sein, die besonderen Fälle näher zu untersuchen, wo die elliptischen Integrale durch Exponentialfunktionen sich reduzieren lassen, was für

$$2a^2 + 4b - a^4 = 0$$

stattfindet, und das in diesem Paragraphen angeführte erste Beispiel ist ein besonderer Fall dafür.

Die Lösung der Funktionalgleichung 10) hat aber noch eine viel allgemeinere Bedeutung, auf die hier hingedeutet sein möge. Aus den Bedingungen

$$\theta = \frac{a}{2}\omega_v, \quad \eta = -\frac{a}{2}\omega_u$$

folgt nämlich

$$\varphi - \frac{\omega}{2}(1 + a) = -(1 + a)U; \qquad \omega = U + V,$$

$$\varphi + \frac{\omega}{2}(1 + a) = \quad (1 + a)V; \quad 2\varphi = (V - U)(1 + a).$$

Das führt aber für die Integrabilitätsbedingung eines rhombischen Systems $C = A$ auf dieselbe Gleichung

$$\omega_{vv} - \omega_v^2 \frac{\cos\omega}{\sin\omega} = \omega_{uu} - \omega_u^2 \frac{\cos\omega}{\sin\omega}$$

wie bei der eben ausgeführten Untersuchung, so daß U, V aus denselben elliptischen Funktionen entnommen werden können, während

$$\frac{2}{a} d(LC) = ((\omega_v + \omega_u \cos\omega)\,du + (\omega_v \cos\omega + \omega_u)\,dv) : \sin\omega$$

rechts als vollständiges Differential bei beliebigen Werten von a gegeben ist. Der speziell geometrische Charakter, der den Fall $a = -2$ auszeichnet, ist hier allerdings nicht mehr vorhanden. Dem Falle, wo $U = u$, $V = v$ genommen wird, entsprechen aber jetzt die Krümmungshalbmesser

$$\frac{1}{\varrho_u} = -\frac{(1 + a/2)}{C}, \quad \frac{1}{\varrho_v} = -\frac{(1 + a/2)}{C},$$

so daß nun an irgend einer Stelle die beiden von derselben ausgehenden Kurven des Netzes beständig gleiche, von ∞ verschiedene

Krümmungen haben. Die verschiedenen Fälle, welche jedesmal $C^{\frac{2}{a}}$ durch eine Funktion des Koordinatenwinkels $\omega = u + v$ ausdrücken, auch in Bezug auf die Werte der x, y durchzuführen, ist hier wohl überflüssig; einfach ist es, namentlich $a = 1$, $a = 2$ zu wählen.

Der Wert $a = -1$ aber zeigt ein ganz besonderes Verhalten, da jetzt aus dem Ansatze für θ, $\eta\,\varphi =$ konst oder Null folgt, während ω jetzt eine willkürliche Funktion von u und v bleiben kann. Man erhält nun

$$-2\,d(L\,C) = [(\omega_v + \omega_u \cos\omega)\,du + (\omega_v \cos\omega + \omega_u)\,dv] : \sin\omega$$

mit der Lösung

$$L \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) = f(u+v) + F(u-v),$$

aber mit dem Unterschiede, daß jetzt ω rechts durch die willkürlichen Funktionen f, F bestimmt ist. Es wird demnach

$$C^2 \sin\omega = e^{f-F}.$$

Da nun

$$\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{1}{1+e^{2(f+F)}}, \quad \sin^2\frac{\omega}{2} = \frac{e^{2(f+F)}}{1+e^{2(f+F)}},$$

so wird
$$2(f+F)\cos\omega = \frac{1-e^{2(f+F)}}{1+e^{2(f+F)}},$$

$$\sin\omega = 2\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{2\,e^{(f+F)}}{1+e^{2(f+F)}}$$

und das Längenelement nimmt die Form

$$ds^2 = C^2(du^2 + dv^2 + 2\,du\,dv\cos\omega),$$

in der rechts die Werte aus den voranstehenden Formeln einzusetzen sind; endlich sind daraus auch x, y zu entnehmen.

Schon im § II ist erwähnt, daß die Formeln

$$\theta = \varphi_v - \frac{\omega_v}{2}, \quad \eta = \varphi_u + \frac{\omega_u}{2},$$

von denen bisher immer Gebrauch gemacht wurde für den Fall, daß $\varphi = 0$ ist, durch die noch eine Konstante enthaltenden

$$\theta = -p\,\omega_v, \quad \eta = q\,\omega_u, \quad p + q = 1, \quad p \neq q$$

zu ersetzen sind. Aus der Integrabilität der Gleichung

$$-d(LC) = [(p\omega_v + q\omega_u \cos\omega)\, du + (p\omega_v \cos\omega + q\omega_u)\, dv] : \sin\omega$$

erhält man für ω die folgende Bedingung:

$$o = p\omega_{vv} - q\omega_{uu} - \omega_{uv}\cos\omega\,(p-q) + (p-q)\frac{\omega_u\omega_v}{\sin\omega} - (p\omega_v^2 - q\omega_u^2)\frac{\cos\omega}{\sin\omega},$$

deren allgemeine Integration in dem hier geforderten Sinne nicht bekannt ist. Nimmt man aber $\omega = f(u+v)$ als partikuläre Lösung, $u + v = s$, an, so folgt durch Beseitigung des Faktors $1 - \cos\omega$

$$(p-q)\left(f'' + \frac{f'^2}{\sin f}\right) = 0.$$

Ist also der zweite Faktor Null, so braucht p nicht gleich q zu sein.

Daraus ergibt sich dann der Wert von C, wenn man die rechte Seite von 1) in der Gestalt

$$f'[(p\,du + q\,dv) + \cos f\,(q\,du + p\,dv)] : \sin f$$

passend umformt. In der Tat ist, da

2) $$f' \operatorname{tg}(f/2) = k$$

sein soll, dieser Ausdruck gleich

$$p\,df\,\frac{(1+\cos f)}{\sin f} + (q-p)\,k\,dv.$$

so daß $$C(\sin f/2)^{2p} = k e^{-(q-p)v}$$

wird; die Konstante k ist wie immer unwesentlich.

§ X. Allgemeinere rhombische Systeme.

Um die Differentialgleichung der rhombischen Netze

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta - \eta\cos\omega}{\sin\omega}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta\cos\omega - \eta}{\sin\omega}\right)$$

etwas allgemeiner zu behandeln, setze man an Stelle von θ und η nach 1)

1) $$\theta = \varphi_v - \frac{\omega_v}{2}, \quad \eta = \varphi_u + \frac{\omega_u}{2}.$$

Man erhält so die Gleichung

2) $$\varphi_{vv} - 2\varphi_{uv}\cos\omega + \varphi_{uu} + \tfrac{1}{2}(\omega_{uu} - \omega_{vv}) + \left(\varphi_u + \frac{\omega_u}{2}\right)\frac{\omega_v - \omega_u\cos\omega}{\sin\omega} + \left(\varphi_v - \frac{\omega_v}{2}\right)\left(\frac{\omega_u - \omega_v\cos\omega}{\sin\omega}\right) = 0.$$

Man wird sich, um in der Anlage der hier beabsichtigten Betrachtungen zu bleiben, darauf beschränken, partikuläre Lösungen der Ampèreschen Gleichung zu suchen, indem man

I) $$\omega = f(u+v), \quad \varphi = F(u+v) + a v \text{ resp.}$$

II) $$\omega = f(u+v), \quad \varphi = F(u-v) + a v$$

setzt. Im ersten Falle I) ergibt sich für $F' = \Phi$ die lineare Differentialgleichung

3) $$F'' + \frac{F' f'}{\sin f} + \frac{a f'}{2 \sin f} = 0$$

oder $$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\Phi'}{\Phi + a/2}\right) + \frac{f'}{\sin f} = 0.$$

Aus ihr findet man

4) $$\Phi = F' = \frac{k}{\operatorname{tg}(f/2)} - \frac{a}{2}.$$

Für $a = 0$ wird

$$d(LC) = \left(F' - \frac{f'}{2} - \left(F' + \frac{f'}{2}\right)\cos f\right) du : \sin f$$
$$+ \left(\left(F' - \frac{f'}{2}\right)\cos f - \left(F' + \frac{f'}{2}\right)\right) dv : \sin f$$

und die rechte Seite wird nach 4) und $u + v = s$ gesetzt

$$k\, d(u-v) - f'/2 \, \frac{(1+\cos f)}{\sin f}\, ds = k\, d(u-v) - \frac{df}{2}\cdot \operatorname{cotg} f/2,$$

so daß $$C \sin f/2 = h e^{k(u-v)},$$

doch ist die Konstante h unwesentlich.

Ist aber a nicht 0, so hat man zu setzen

$$d(LC) = (F' + a - f'/2 - (F' + f'/2)\cos f)\, du : \sin f$$
$$+ ((F' + a - f'/2)\cos f - (F' + f'/2))\, dv : \sin f.$$

Schreibt man die rechte Seite in der Form

$$\left[F' + \frac{a}{2} - \frac{f'-a}{2} - \left(F' + \frac{a}{2} + \frac{f'-a}{2}\right)\cos f\right] du : \sin f$$
$$\left[\left(F' + \frac{a}{2} - \frac{f'-a}{2}\right)\cos f - \left(F' + \frac{a}{2} + \frac{f'-a}{2}\right)\right] dv : \sin f,$$

so erhält man auf der rechten Seite wieder ein totales Differential und es wird

$$d(LC) = k\,d(u - v) - \left(\frac{f' - a}{2}\right)\frac{(1 + \cos f)}{\sin f}\,ds,$$

woraus $C = A$ gefunden ist.

Setzt man nach II $\varphi = F(u - v) + a\,v$, so folgt aus 2)

$$2\,F''(1 + \cos f) + a\,\frac{1 - \cos f}{\sin f}\,f' = 0.$$

Ist $a = 0$, so muß F eine lineare Funktion $c(u - v)$ sein, und damit ergibt sich

$$C = \frac{k}{\left(\sin\frac{f}{2}\right)^{c}}.$$

Ist aber $a \neq 0$, so hat man

$$F'' + \frac{a}{2}f'\,\frac{(1 - \cos f)}{\sin f(1 + \cos f)} = 0$$

zu setzen, so daß

$$F'' = -\,c, \quad \frac{a\sin\frac{f}{2}\left(\frac{f'}{2}\right)}{2\cos^3\frac{f}{2}} = c$$

aus der letzteren einfachen Gleichung ist f zu entnehmen, während

$$F = -\,c\,\frac{(u - v)^2}{2} + p\,(u - v)$$

wird. Damit sind wieder verschiedene Gruppen von Längenelementen gegeben, aus denen die x, y dann durch Quadratur zu bestimmen sind. Jedenfalls würde aus dem Inhalt der vorstehenden Paragraphen hervorgehen, daß hier noch ein reiches Material für weitere Verallgemeinerungen resp. für eine vollständige geometrische Ausführung der betreffenden Quadraturen vorhanden ist. Es hat sich dabei zunächst immer um die Bestimmung des Längenelementes gehandelt. In einem zweiten Teil dieser kurzen Note soll dagegen die direkte Bestimmung der Koordinaten x, y mit Benutzung der Laplaceschen Gleichung behandelt werden.

Berichtigung.

S. 41 Zeile 2 v. o. lies: durch die zweite von 2) des A_v.

S. 42 Zeile 3 v. o. lies: $\frac{\partial b}{\partial v}, \frac{\partial a}{\partial u}$ statt $\frac{\partial L b}{\partial v}$ und $\frac{\partial L a}{\partial u}$; Zeile 12 v. u. lies: $\left(\theta\,\frac{\eta_u}{\eta} - \theta_u\right)\operatorname{cotg}\omega$.

S. 43 Zeile 2 v. o. lies: 3 b); Zeile 4 v. u. lies: $\omega = V - U$.

S. 48 Zeile 1 v. u. lies: $2\,e^{z}\sigma^2\operatorname{cotg}\omega$.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1924

Band/Volume: 1924

Autor(en)/Author(s): Voss Aurel Edmund

Artikel/Article: Kurvennetze und Laplacesche partielle Differentialgleichungen 39-68