Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1924. Heft I

Januar- bis Junisitzung

München 1924
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Bemerkungen zur Algebra.

Von **Oskar Perron.**

Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1924.

Daß $k+1$ Funktionen von nur k Variabeln nicht voneinander unabhängig sind, wird jedem einleuchten. In der Algebra kann man den Satz dahin verschärfen, daß zwischen $k+1$ Polynomen von nur k Variabeln stets eine algebraische Abhängigkeit besteht. Auch das wird niemand bezweifeln; aber merkwürdigerweise scheint dieser so einfache Satz nirgends bewiesen zu sein. In Nettos Algebra findet sich zwar ein Beweis[1]), der sich auf die Theorie der Resultante und ihre Darstellung durch die endlich vielen simultanen Nullstellen stützt. Aber abgesehen davon, daß die Resultante von mehr als zwei nicht linearen Polynomen schon ein recht komplizierter Begriff ist, der zu der Einfachheit des zu beweisenden Satzes in gar keinem Verhältnis steht, ist der Beweis auch keineswegs ausreichend. Denn die Darstellung der Resultante mit Hilfe der simultanen Nullstellen, deren Verwendung übrigens bei einem Satz der rationalen Algebra auch ein Schönheitsfehler ist, setzt immer den allgemeinen Fall voraus. Bei Spezialisierung aber wird der ganze Beweis hinfällig, wie man schon an dem Beispiel der drei Polynome

$$f = x + y,$$
$$\varphi = 2x + 2y,$$
$$\psi = 3x + 3y$$

sieht. Die Resultante ist hier

---

[1]) E. Netto, Vorlesungen über Algebra, 2. Bd., S. 136.

$$\begin{vmatrix} f & 1 & 1 \\ \varphi & 2 & 2 \\ \psi & 3 & 3 \end{vmatrix},$$

und wenn man sie gleich Null setzt, erhält man die Identität $0 = 0$, aber keine Abhängigkeit zwischen den Polynomen f, φ, ψ.

Wenn zwischen k Polynomen von k Variabeln eine algebraische Abhängigkeit besteht, so verschwindet die Funktionaldeterminante. Dieser bekannte Satz wird meistens nur unvollständig bewiesen; ein einfacher und ausreichender Beweis findet sich bei König[1]). Was nun die Umkehrung anbelangt, daß das identische Verschwinden der Funktionaldeterminante stets eine Abhängigkeit der Funktionen nach sich zieht, so wird sie meistens mit den Hilfsmitteln der Analysis bewiesen, und dann ergibt sich zwar eine Abhängigkeit, aber man weiß nicht, ob sie algebraisch ist. Abgesehen von diesem Mangel haftet aber dieser Beweismethode auch der oben erwähnte Schönheitsfehler an, da es sich ja wieder um einen Satz der rationalen Algebra handelt. Diesen Schönheitsfehler hat die Darstellung bei König (a. a. O., S. 247—259) bewußt vermieden, aber wie mir scheint, doch nicht ganz. Denn König setzt zwar nicht die Wurzelexistenz im Sinne der Analysis voraus (Fundamentalsatz der Algebra), wohl aber benutzt er einen algebraischen Erweiterungskörper, in dem Wurzeln existieren; er geht also unnötigerweise doch aus dem gegebenen Körper heraus. Außerdem wird bei diesem Beweis auch die ganze komplizierte Eliminationstheorie vorausgesetzt.

In Wahrheit lassen sich aber all diese Dinge auf äußerst einfache Art beweisen, und dabei wird es möglich sein, auch über den Grad der zwischen den abhängigen Polynomen bestehenden algebraischen Gleichung bestimmte Aussagen zu machen.

---

[1]) Julius König, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Leipzig 1903, S. 246.

§ I. Abhängigkeit von Polynomen, deren Anzahl die der Variabeln übertrifft.

Satz 1. $k+1$ Polynome von k Variabeln[1])

$$f_1(x_1, \ldots, x_k),$$
$$\cdots\cdots$$
$$f_{k+1}(x_1, \ldots, x_k),$$

deren Grade $n_1, n_2, \ldots, n_{k+1}$ sein mögen, sind voneinander abhängig, und zwar besteht zwischen ihnen eine algebraische Identität

$$\Sigma C_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}} f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_{k+1}^{\lambda_{k+1}} = 0,$$

die in bezug auf f_{k+1} höchstens vom Grad $n_1 n_2 \cdots n_k$ ist, und deren Koeffizienten $C_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}}$ dem durch die Koeffizienten der Polynome f_ν bestimmten Körper angehören.

Um eine solche Identität zu finden, wählen wir eine später noch geeignet zu bestimmende positive ganze Zahl m und betrachten die Summe

$$\Sigma C_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}} f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_{k+1}^{\lambda_{k+1}}, \tag{1}$$

erstreckt über alle ganzen nicht negativen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}$, für welche

$$\left\{\begin{array}{c} n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \cdots + n_{k+1}\lambda_{k+1} \leqq m, \\ \lambda_{k+1} < n_1 n_2 \cdots n_k \end{array}\right. \tag{2}$$

ist. Dann steigt die Summe (1) als Polynom von $x_1, \ldots, x_k$ betrachtet höchstens bis zum $m$ten Grad auf. Da ein allgemeines Polynom $m$ten Grades von k Variabeln $\binom{m+k}{k}$ Glieder hat, so ergeben sich also, wenn das Polynom (1) als Funktion von $x_1, \ldots, x_k$ identisch verschwinden soll, $\binom{m+k}{k}$ lineare homogene Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten $C_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}}$.

Wenn nun die Anzahl dieser Koeffizienten größer ist als $\binom{m+k}{k}$, so lassen sich die Bedingungsgleichungen innerhalb des in Satz 1 genannten Körpers gewiß erfüllen, und eine Identität der gesuchten Art ist dann gefunden. Die Anzahl der Koeffizienten $C_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}}$ ist aber gleich der Anzahl der Zahlensysteme λ_1,

[1]) Der Fall, daß es noch weniger als k Variable sind, ist dabei miteingeschlossen, da ja nicht alle Variable wirklich vorzukommen brauchen.

$\lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}$, welche den Bedingungen (2) genügen. Somit ist nur zu zeigen, daß die Ungleichungen (2) bei geeigneter Wahl von m mehr als $\binom{m+k}{k}$ ganzzahlige nicht negative Lösungssysteme $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}$ haben. Wir wählen zu dem Zweck

$$m = n_1 n_2 \cdots n_{k+1} + p n_1 n_2 \cdots n_k - 1$$

und werden sehen, daß dann bei genügend großem p das Gewünschte sicher eintritt.

Dann hat nämlich die erste Ungleichung (2) bei festem λ_{k+1}, weil $\lambda_{k+1} \leqq n_1 n_2 \cdots n_k$ sein soll, noch mindestens soviel Lösungen wie die Ungleichung

$$\begin{aligned} n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 + \cdots + n_k \lambda_k &\leqq m - n_1 n_2 \cdots n_{k+1} \\ &= p n_1 n_2 \cdots n_k - 1 . \end{aligned} \tag{3}$$

Nun sei $q_1 + 1, q_2 + 1, \ldots, q_k + 1$ ein System von k positiven ganzen Zahlen, deren Summe höchstens gleich p ist; es gibt $\binom{p}{k}$ verschiedene solche Systeme. Wählt man dann $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ so, daß

$$\begin{gathered} q_1 n_1 n_2 \cdots n_k \leqq n_1 \lambda_1 < (q_1 + 1) n_1 n_2 \cdots n_k , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_k n_1 n_2 \cdots n_k \leqq n_k \lambda_k < (q_k + 1) n_1 n_2 \cdots n_k , \end{gathered}$$

was auf genau $(n_1 n_2 \cdots n_k)^{k-1}$ Arten möglich ist, so ist (3) erfüllt. Somit hat die Ungleichung (3) mindestens

$$\binom{p}{k} (n_1 n_2 \cdots n_k)^{k-1}$$

Lösungen. Mindestens ebensoviele hat also die erste Ungleichung (2) bei festem λ_{k+1}. Da aber für λ_{k+1} nach der zweiten Ungleichung (2) die $n_1 n_2 \cdots n_k + 1$ Werte

$$0, 1, 2, \ldots, n_1 n_2 \cdots n_k$$

zugelassen sind, so ergeben sich für (2) mindestens

$$(n_1 n_2 \cdots n_k + 1) \binom{p}{k} (n_1 n_2 \cdots n_k)^{k-1} \tag{4}$$

Lösungen, und wir müssen nur zeigen, daß das mehr als

$$\binom{m+k}{k} = \binom{n_1 n_2 \cdots n_{k+1} + p n_1 n_2 \cdots n_k - 1 + k}{k} \tag{5}$$

sind. Nun sind die Ausdrücke (4) und (5) in bezug auf p Polynome vom $k$ten Grad. In (4) hat p^k den Koeffizienten

$$\frac{1}{k!}(n_1 n_2 \cdots n_k + 1)(n_1 n_2 \cdots n_k)^{k-1};$$

in (5) aber hat p^k den Koeffizienten $\frac{1}{k!}(n_1 n_2 \cdots n_k)^k$, der offenbar kleiner ist. Wenn also p genügend groß, so ist in der Tat der Ausdruck (4) größer als der Ausdruck (5). W. z. b. w.

In der Formulierung von Satz 1 nimmt das Polynom f_{k+1} eine Sonderstellung ein. Die gleiche Sonderstellung hätte man aber einem beliebigen andern Polynom f_μ einräumen können, wodurch man eine Identität gefunden hätte, die in Bezug auf f_μ höchstens vom Grad $\frac{n_1 n_2 \cdots n_{k+1}}{n_\mu}$ ist. Von dieser Bemerkung werden wir mehrfach Gebrauch zu machen haben.

§ 2. Abhängigkeit bei Verschwinden der Funktionaldeterminante.

Satz 2. Seien $r+1$ Polynome von k Variabeln gegeben:

$$\begin{gathered} f_1(x_1, \ldots, x_k), \\ \cdots\cdots \\ f_{r+1}(x_1, \ldots, x_k), \end{gathered}$$

wobei $r+1 < k$ ist, und zwar sei f_ν vom Grad n_ν. Wenn dann die $(r+1)$-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_k} \end{Vmatrix}$$

identisch verschwinden, während die r-reihige Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet, so besteht zwischen den Funktionen $f_1, \ldots, f_{r+1}$ eine algebraische Identität

$$\Sigma C_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r+1}} f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_{r+1}^{\lambda_{r+1}} = 0,$$

die in bezug auf eine beliebig wählbare der Funktionen f_μ höchstens vom Grad $\frac{n_1 n_2 \cdots n_{r+1}}{n_\mu}$ ist, und deren Koeffizienten $C_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r+1}}$ dem durch die Koeffizienten der Polynome f_ν bestimmten Körper angehören.

Betrachtet man nämlich die $k+1$ Funktionen

$$f_1, f_2, \ldots, f_{r+1}, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_k,$$

so muß zwischen diesen nach Satz 1 und der Schlußbemerkung des vorigen Paragraphen eine Identität

$$\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_{r+1}, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_k) = 0 \tag{6}$$

bestehen, die in bezug auf f_μ höchstens von dem angegebenen Grad ist[1]) und deren Koeffizienten dem besagten Körper angehören. Dabei kann die Identität (6) nicht von allen Funktionen f_ν frei sein, weil ja zwischen $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_k$ natürlich keine Abhängigkeit besteht. Wenn in (6) die Variabeln $x_{r+1}, \ldots, x_k$ nicht explizit vorkommen, so hat man in (6) bereits eine Identität der gesuchten Art. Wenn aber etwa x_s explizit in (6) vorkommt, so bilde man die Derivierten nach $x_1, x_2, \ldots, x_r, x_s$, wodurch sich ergibt:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \Phi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial f_{r+1}}\frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_1} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial \Phi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_r} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial f_{r+1}}\frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_r} = 0, \\
\frac{\partial \Phi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_s} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial f_{r+1}}\frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_s} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0.
\end{gathered}$$

Hieraus folgt aber:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_r} & \cdots & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_r} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_s} & \cdots & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_s} \end{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial f_{r+1}} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_r} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s}.$$

---

[1]) Vorläufig natürlich nicht in bezug auf jedes f_μ, sondern nur in bezug auf ein beliebig auswählbares f_μ.

Da nun die Determinante links identisch verschwindet, die rechts dagegen nicht, so folgt, daß $\frac{\partial \Phi}{\partial x_s}$ identisch Null ist.

Außer der Identität (6) besteht also auch die Identität

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0$$

und diese ist in bezug auf x_s von geringerem Grad als (6). Natürlich kann auch sie wieder nicht von allen f_ν frei sein. Hierauf kann man den gleichen Prozeß anwenden und so oft wiederholen, bis man eine Identität erhält, in der x_s nicht mehr explizit vorkommt. Auf diese Art kann man also durch fortgesetzte Derivation aus der Identität (6) die $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_k$ herausschaffen und erhält schließlich eine Identität

$$\Psi(f_1, f_2, \ldots, f_{r+1}) = 0.$$

Diese ist in bezug auf das bestimmt gewählte f_μ gewiß nicht von höherem Grad als (6), also höchstens vom Grad $\frac{n_1 n_2 \cdots n_{r+1}}{n_\mu}$, und damit ist Satz 2 bewiesen.

§ 3. Verschärfung der vorausgehenden Sätze.

Unter den Voraussetzungen von Satz 2 besteht, wenn μ eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots, r+1$ bedeutet, nach eben diesem Satz zwischen den Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_{r+1}$ eine Identität

$$\Psi_\mu(f_1, f_2, \ldots, f_{r+1}) = 0, \tag{7}$$

die in bezug auf f_μ höchstens vom Grad $\frac{n_1 n_2 \cdots n_{r+1}}{n_\mu}$ ist, und deren Koeffizienten dem erwähnten Körper angehören. Wir führen jetzt $r+1$ neue Variable $y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}$ ein und betrachten die Polynome

$$\tag{8} \left\{ \begin{array}{l} \Psi_1(y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}), \\ \Psi_2(y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}), \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Psi_{r+1}(y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}). \end{array} \right.$$

In jedem kommt y_{r+1} wirklich vor. Denn wenn etwa Ψ_μ von y_{r+1} frei wäre, so wäre die Identität $\Psi_\mu(f_1, f_2, \ldots, f_{r+1}) = 0$

von f_{r+1} frei, und man hätte eine Abhängigkeit zwischen $f_1, f_2, \ldots, f_r$. Eine solche gibt es aber nicht, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{vmatrix}$$

nach Voraussetzung nicht identisch verschwindet.

Nun zerlege man das Polynom $\Psi_1(y_1, y_2, \ldots, y_{r+1})$ in seine irreduzibeln Teiler (innerhalb des mehrfach genannten Körpers). Einer dieser Teiler muß dann, wenn man darin $y_1 = f_1, \ldots, y_{r+1} = f_{r+1}$ einsetzt, verschwinden, weil ja ihr Produkt Ψ_1 verschwindet. Sei

$$\Omega(y_1, y_2, \ldots, y_{r+1})$$

dieser irreduzible Teiler. Ebenso wie oben erkennt man, daß y_{r+1} in ihm wirklich vorkommt.

Ist nun $P(y_1, y_2, \ldots, y_{r+1})$ irgend ein Polynom mit Koeffizienten aus dem gleichen Körper und so beschaffen, daß $P(f_1, f_2, \ldots, f_{r+1})$ als Funktion von $x_1, \ldots, x_k$ identisch verschwindet, so kann auch $P(y_1, \ldots, y_{r+1})$ nicht von y_{r+1} frei sein. Bezeichnet man dann mit

$$\chi(y_1, y_2, \ldots, y_r) \tag{9}$$

die Resultante (Sylvestersche Determinante) von

$$P(y_1, \ldots, y_{r+1}) \text{ und } \Omega(y_1, \ldots, y_{r+1}) \tag{10}$$

in bezug auf y_{r+1}, so muß

$$\chi(f_1, f_2, \ldots, f_r) = 0 \tag{11}$$

sein, weil ja die Gleichungen

$$P(f_1, \ldots, f_r, y_{r+1}) = 0,$$
$$\Omega(f_1, \ldots, f_r, y_{r+1}) = 0$$

eine gemeinsame Wurzel $y_{r+1} = f_{r+1}$ haben. Daraus folgt, daß die Resultante (9) identisch in $y_1, y_2, \ldots, y_r$ verschwindet, weil sonst durch (11) eine Abhängigkeit zwischen $f_1, f_2, \ldots, f_r$ gegeben wäre, die es doch in Wahrheit nicht gibt. Weil nun also die Resultante (9) identisch verschwindet, haben die Polynome (10) einen größten gemeinsamen Teiler, der y_{r+1} enthält. Da aber Ω irreduzibel, so ist Ω selbst dieser Teiler. Somit erkennt man, daß $P(y_1, y_2, \ldots, y_{r+1})$ durch $\Omega(y_1, y_2, \ldots, y_{r+1})$ teilbar ist.

Die Polynome $\Psi_\mu(y_1, y_2, \ldots, y_{r+1})$ erfüllen die an $P(y_1, y_2, \ldots, y_{r+1})$ gestellten Forderungen; nach dem soeben Bewiesenen sind sie also durch $\Omega(y_1, y_2, \ldots, y_{r+1})$ teilbar. Da aber Ψ_μ in bezug auf y_μ höchstens vom Grad $\frac{n_1 n_2 \cdots n_{r+1}}{n_\mu}$ ist, so ist auch Ω in bezug auf jedes y_μ höchstens vom Grad $\frac{n_1 n_2 \cdots n_{r+1}}{n_\mu}$. Verlangt man von dem Polynom P außerdem Irreduzibilität, so kann es sich, da es durch Ω teilbar ist, von Ω nur um einen konstanten Faktor unterscheiden; es ist also von einem konstanten Faktor abgesehen eindeutig. Zusammenfassend gewinnt man somit den

Satz 3. Unter den Voraussetzungen von Satz 2 gibt es ein Polynom $\Omega(y_1, y_2, \ldots, y_{r+1})$, welches in dem durch die Koeffizienten der f_ν bestimmten Körper irreduzibel ist und so beschaffen, daß $\Omega(f_1, f_2, \ldots, f_{r+1})$ als Funktion von $x_1, \ldots, x_k$ identisch verschwindet. Ω ist durch diese Forderung bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt und in bezug auf jedes y_μ höchstens vom Grad $\frac{n_1 n_2 \cdots n_{r+1}}{n_\mu}$.

In ähnlicher Weise läßt sich auch Satz 1 verschärfen. Wenn nämlich unter den Voraussetzungen von Satz 1 eine k-reihige Determinante der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_k} \end{matrix} \right\|, \tag{12}$$

etwa die aus den k ersten Zeilen gebildete, identisch verschwindet, so gibt es (bei passender Numerierung der Polynome $f_1, \ldots, f_k$) auch eine Zahl r ($< k - 1$) derart, daß die Voraussetzungen von

Satz 2 erfüllt sind[1]). Daher hat man nach Satz 3 eine Identität

$$\Omega(f_1, f_2, \ldots, f_{r+1}) = 0,$$

die in bezug auf jede darin vorkommende Funktion f_μ höchstens vom Grad $\frac{n_1 n_2 \cdots n_{r+1}}{n_\mu}$ ist, also erst recht höchstens vom Grad $\frac{n_1 n_2 \cdots n_{k+1}}{n_\mu}$.

Wenn aber von den k-reihigen Determinanten der Matrix (12) keine identisch verschwindet, so gibt es nach Satz 1 und der am Schluß des § 1 gemachten Bemerkung identische Gleichungen

$$\begin{aligned} \Phi_1(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}) &= 0, \\ \Phi_2(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_{k+1}(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}) &= 0, \end{aligned}$$

wobei Φ_μ in bezug auf f_μ höchstens vom Grad $\frac{n_1 n_2 \cdots n_{k+1}}{n_\mu}$ ist. In keiner dieser Gleichungen kann eine der Funktionen f_1, $f_2, \ldots, f_{k+1}$ fehlen; sonst müßte ja die Funktionaldeterminante der k übrigen, also eine k-reihige Determinante der Matrix (12) verschwinden. Genau wie vorhin erschließt man daraus auch die Existenz einer einzigen irreduzibeln Identität

$$\Omega(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}) = 0,$$

die in bezug auf jede Funktion f_μ höchstens vom Grad $\frac{n_1 n_2 \cdots n_{k+1}}{n_\mu}$ ist, und man erhält den

Satz 4. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 gibt es auch (mindestens) eine Identität zwischen den Polynomen $f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}$, die in bezug auf *jedes* f_μ höchstens vom Grad $\frac{n_1 n_2 \cdots n_{k+1}}{n_\mu}$ ist, und deren Koeffizienten dem durch die Koeffizienten der f_ν bestimmten Körper angehören.

Wenn außerdem von den k-reihigen Determinanten der Matrix (12) keine identisch verschwindet, gibt es ein Polynom $\Omega(y_1, y_2, \ldots, y_{k+1})$, welches in dem erwähnten

[1]) Es kann auch $r = 0$ sein; das bedeutet dann, daß alle Elemente in den k ersten Zeilen der Matrix (12) verschwinden, so daß die Polynome $f_1, \ldots, f_k$ einfach Konstanten sind — ein trivialer Fall.

Körper irreduzibel ist und so beschaffen, daß $\Omega(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1})$ als Funktion von $x_1, \ldots, x_k$ identisch verschwindet. Ω ist durch diese Forderung bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt und in bezug auf jedes y_μ höchstens vom Grad $\frac{n_1 n_2 \cdots n_{k+1}}{n_\mu}$.

§ 4. Abhängigkeit gebrochener rationaler Funktionen.

Seien

$$R_\nu(x_1, \ldots, x_k) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k+1)$$

$k+1$ rationale Funktionen von k Variabeln $x_1, \ldots, x_k$. Wir schreiben sie als Quotienten von Polynomen mit gemeinsamem Nenner und setzen also

$$R_\nu(x_1, \ldots, x_k) = \frac{g_\nu(x_1, \ldots, x_k)}{g_0(x_1, \ldots, x_k)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k+1).$$

Jedes der Polynome $g_0, g_1, \ldots, g_{k+1}$ ist von einem gewissen Grad und die größte dieser Gradzahlen sei n. Wir führen dann noch eine Variable x_0 ein und setzen

$$x_0^n g_\nu\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_k}{x_0}\right) = f_\nu(x_0, x_1, \ldots, x_k) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, k+1).$$

Die f_ν sind dann $k+2$ homogene Polynome n^{ten} Grades von den $k+1$ Variabeln $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Nach Satz 4 besteht also eine Abhängigkeit der Form

$$\Sigma C_{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}} f_0^{\lambda_0} f_1^{\lambda_1} \cdots f_{k+1}^{\lambda_{k+1}} = 0, \tag{13}$$

wobei jedes $\lambda_\nu \leq n^{k+1}$ ist, und wo die Koeffizienten $C_{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}}$ dem durch die Koeffizienten der f_ν bestimmten Körper angehören. Nimmt man nun aus (13) diejenige Teilsumme heraus, für welche $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{k+1}$ den Minimalwert annimmt, der mit N bezeichnet sein möge, so muß diese Teilsumme für sich verschwinden; denn sie umfaßt, da die f_ν homogen vom n^{ten} Grad sind, alle diejenigen Glieder aus (13), welche in bezug auf die x_ν homogen vom Grad nN sind, während alle andern Glieder von höherem Grad sind.

Wir dürfen und wollen daher annehmen, (13) selbst sei bereits die so gewonnene Relation, so daß in allen Gliedern $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{k+1} = N$ ist. Dividiert man dann (13) durch f_0^N und setzt alsdann $x_0 = 1$, wodurch f_ν in g_ν übergeht, so ergibt sich:

$$\Sigma C_{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}} \left(\frac{g_1}{g_0}\right)^{\lambda_1} \cdots \left(\frac{g_{k+1}}{g_0}\right)^{\lambda_{k+1}} = 0.$$

Zur Bezeichnung der Koeffizienten C ist nun der Index λ_0 offenbar überflüssig, und wir können unser Ergebnis aussprechen in

Satz 5. Sind

$$R_\nu(x_1, \ldots, x_k) = \frac{g_\nu(x_1, \ldots, x_k)}{g_0(x_1, \ldots, x_k)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k+1)$$

$k+1$ rationale Funktionen von k Variabeln $x_1, \ldots, x_k$ und ist n der Maximalgrad der Polynome $g_0, g_1, \ldots, g_{k+1}$, so besteht zwischen den R_ν (mindestens) eine algebraische Identität der Form

$$\Sigma C_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}} R_1^{\lambda_1} \cdots R_{k+1}^{\lambda_{k+1}} = 0,$$

wobei alle $\lambda_\nu \leq n^{k+1}$ sind, und wo die Koeffizienten $C_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}}$ dem durch die Koeffizienten der R_ν bestimmten Körper angehören.

Um auch Satz 3 auf gebrochene Funktionen auszudehnen, setzen wir

$$R_\nu(x_1, \ldots, x_k) = \frac{g_\nu(x_1, \ldots, x_k)}{g_0(x_1, \ldots, x_k)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, r+1),$$

wobei $r+1 \leq k$ sein soll, und nehmen an, daß die $(r+1)$-reihigen Determinanten der Matrix

$$(14) \qquad \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial R_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial R_1}{\partial x_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial R_{r+1}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial R_{r+1}}{\partial x_k} \end{matrix} \right\|$$

identisch verschwinden, während die r-reihige Determinante

(15)
$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial R_1}{\partial x_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial R_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial R_r}{\partial x_r} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwinden soll. Nun ist offenbar

$$g_0^{r+1}\Delta = g_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ R_1 & g_0\frac{\partial R_1}{\partial x_1} & \cdots & g_0\frac{\partial R_1}{\partial x_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_r & g_0\frac{\partial R_r}{\partial x_1} & \cdots & g_0\frac{\partial R_r}{\partial x_r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_0 & \frac{\partial g_0}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_0}{\partial x_r} \\ g_1 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_r & \frac{\partial g_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial x_r} \end{vmatrix},$$

wie man sofort erkennt, wenn man in der Determinante links die Elemente der ersten Spalte, nachdem sie mit $\frac{\partial g_0}{\partial x_\nu}$ multipliziert sind, zur $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Spalte addiert.

Ist nun wieder n der Maximalgrad der Polynome $g_0, g_1, \dots, g_{r+1}$ und führt man die homogenen Polynome n^{ten} Grades

$$x_0^n g_\nu\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_k}{x_0}\right) = f_\nu(x_0, x_1, \dots, x_k) \qquad (\nu = 0, 1, \dots, r+1)$$

ein, so ist die letzte Determinante auch gleich

(16)
$$\begin{vmatrix} f_0 & \frac{\partial f_0}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_0}{\partial x_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_r & \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{vmatrix}$$

für $x_0 = 1$. Das Nichtverschwinden der Determinante Δ besagt also soviel wie das Nichtverschwinden der Determinante (16).

Da aber nach der Eulerschen Formel für homogene Funktionen n^{ten} Grades

$$f_\nu = \frac{1}{n}\left(x_0\frac{\partial f_\nu}{\partial x_0} + x_1\frac{\partial f_\nu}{\partial x_1} + \dots + x_k\frac{\partial f_\nu}{\partial x_k}\right)$$

ist, so folgt, indem man das in die erste Spalte der Derterminante (16) einsetzt, daß die $(r+1)$-reihigen Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} & \frac{\partial f_0}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial x_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_0} & \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_k} \end{matrix} \right\|$$

nicht alle identisch verschwinden. Ist also $y_0, y_1, \ldots, y_k$ eine geeignete Anordnung der $x_0, x_1, \ldots, x_k$, so wird die $(r+1)$-reihige Determinante

$$\left| \begin{matrix} \frac{\partial f_0}{\partial y_0} & \frac{\partial f_0}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial y_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_r}{\partial y_0} & \frac{\partial f_r}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial y_r} \end{matrix} \right| \tag{17}$$

nicht identisch verschwinden.

Genau ebenso erkennt man, daß das identische Verschwinden aller $(r+1)$-reihigen Determinanten der Matrix (14) gleichbedeutend ist mit dem identischen Verschwinden derjenigen $(r+2)$-reihigen Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} f_0 & \frac{\partial f_0}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial x_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{r+1} & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_k} \end{matrix} \right\|, \tag{18}$$

welche die erste Spalte enthalten. Aber dann verschwinden die anderen $(r+2)$-reihigen Determinanten dieser Matrix ebenfalls, da sie sich nach Multiplikation mit f_0 linear aus den eben genannten zusammen setzen, wie sich ja sofort aus der Identität

$$\left| \begin{matrix} f_0 & \frac{\partial f_0}{\partial x_{\nu_1}} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial x_{\nu_{r+2}}} \\ f_0 & \frac{\partial f_0}{\partial x_{\nu_1}} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial x_{\nu_{r+2}}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{r+1} & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_{\nu_1}} & \cdots & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_{\nu_{r+2}}} \end{matrix} \right| = 0$$

ergibt, indem man nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt. Es verschwinden also alle $(r+2)$-reihigen Determinanten der Matrix (18), und indem man auf die erste Spalte wieder die Eulersche Formel anwendet, findet man, daß auch die $(r+2)$-reihigen Determinanten der Matrix

$$(19)\qquad \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} & \frac{\partial f_0}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial x_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_0} & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_k} \end{array} \right\|$$

identisch verschwinden. Nach Satz 3, wobei nur $r+1$ an Stelle von r zu setzen ist und die Variabeln x_ν in der oben angegebenen Reihenfolge $y_0, y_1, \ldots, y_k$ zu nehmen sind, besteht also eine Abhängigkeit der Form

$$(20)\qquad \Sigma C_{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{r+1}} f_0^{\lambda_0} f_1^{\lambda_1} \cdots f_{r+1}^{\lambda_{r+1}} = 0,$$

wobei jedes $\lambda_\nu < n^{r+1}$ ist, und wo die Koeffizienten $C_{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{r+1}}$ dem durch die Koeffizienten der f_ν bestimmten Körper angehören. Wie vorhin beim Beweis von Satz 5 darf man wieder annehmen, daß in allen Gliedern von (20) die Exponentensumme $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{r+1}$ den gleichen Wert, etwa N, hat. Dividiert man dann (20) durch f_0^N und setzt darauf wieder $x_0 = 1$, so erhält man

Satz 6. Seien

$$R_\nu(x_1, \ldots, x_k) = \frac{g_\nu(x_1, \ldots, x_k)}{g_0(x_1, \ldots, x_k)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, r+1)$$

$r+1$ rationale Funktionen von k Variabeln $x_1, \ldots, x_k$ und sei $r+1 < k$. Der Maximalgrad der Polynome $g_0, g_1, \ldots, g_{r+1}$ sei n. Wenn dann alle $(r+1)$-reihigen Determinanten der Matrix (14) identisch verschwinden, während die r-reihige Determinante (15) nicht identisch verschwindet, so besteht zwischen den Funktionen R_ν (mindestens) eine algebraische Identität der Form

$$\Sigma C_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r+1}} R_1^{\lambda_1} R_2^{\lambda_2} \cdots R_{r+1}^{\lambda_{r+1}} = 0,$$

wobei alle $\lambda_\nu < n^{r+1}$ sind, und wobei die Koeffizienten $C_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{r+1}}$ dem durch die Koeffizienten der R_ν bestimmten Körper angehören.

*

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1924

Band/Volume: 1924

Autor(en)/Author(s): Perron Oskar

Artikel/Article: Bemerkungen zur Algebra 87-101