Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1926. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1926
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über den Grad der Approximation einer analytischen Funktion.

Von J. L. Walsh[1]).

Vorgelegt von C. Carathéodory in der Sitzung am 15. Mai 1926.

Der folgende Satz scheint mir bemerkenswert zu sein, obwohl das Wesentlichste des Beweises sich schon in der Literatur vorfindet:

Es sei C irgend eine beschränkte Punktmenge der z-Ebene, deren Komplementärmenge (in Bezug auf die ganze z-Ebene) ein einfach zusammenhängender Bereich also offen B ist. Es sei $u = \varphi(z)$ eine Funktion, die B auf das Äußere des Einheitskreises der u-Ebene abbildet, indem die unendlichen Punkte $u = \infty$, $z = \infty$ einander entsprechen. Wir bezeichnen mit C_R $(R > 1)$ die Jordansche Kurve $|\varphi(z)| = R$, d. h. das Bild in der z-Ebene des Kreises $|u| = R$.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine beliebige auf C definierte Funktion $F(z)$ auf C regulär-analytisch sei, besteht darin, daß Polynome $V_n(z)$ vom Grad n für $n = 0, 1, 2, \ldots$ existieren, so daß die Ungleichheiten

$$(1) \qquad |F(z) - V_n(z)| \leq \frac{M}{R^n}, \quad \left(\begin{matrix} M,\ R > 1, \text{ konstante,} \\ \text{von } n \text{ und } z \text{ unabhängig} \end{matrix}\right)$$

gleichmäßig für jedes z auf C gelten.

Wenn die Polynome $V_n(z)$ gegeben sind, derartig daß (1) befriedigt ist, so ist $F(z)$ im ganzen Inneren von C_R regulär-analytisch.

---

[1]) National Research Fellow.

Wenn $F(z)$ im abgeschlossenen Inneren von C_ϱ regulär ist, so gilt bei passender Wahl der $V_n(z)$ die Ungleichheit (1) für $R = \varrho$.

Dieser Satz wurde schon von S. Bernstein bewiesen[1]) für den Fall, daß C eine geradlinige Strecke ist. Der allgemeinere Satz gilt auch, wenn C irgend ein Jordansches Kurvenstück ist, und unter viel weiteren Bedingungen. Die Punktmenge C ist aber immer abgeschlossen, weil B ein Bereich (daher offen) ist.

Es ist gleichgültig, ob wir voraussetzen, daß $V_n(z)$ vom Grad n ist, oder von einem Grad nicht größer als n[2]). Wenn $V_n(z)$ von einem Grad kleiner als n ist, so bekommt man ein passendes neues Polynom $V_n(z)$ vom genauen Grad n durch die Addition zu $V_n(z)$ eines beliebigen Polynomes vom genauen Grad n, dessen absoluter Betrag auf C kleiner als M/R^n ist. Die Ungleichheit (1) ist dann durch das neue Polynom $V_n(z)$ befriedigt, wenn man M durch $2M$ ersetzt.

Unser Satz gilt auch im trivialen Falle, daß die Punktmenge C aus einem einzigen Punkt besteht, obgleich die Funktion $\varphi(z)$ dann nicht mehr existiert; wir dürfen einfach $F(z)$ als konstant auf der ganzen Ebene nehmen, wenn die Polynome $V_n(z)$ gegeben sind, und die Polynome $V_n(z)$ als konstant, wenn die Funktion $F(z)$ gegeben ist; die Kurven C_R bleiben dagegen ganz willkürlich.

Wenn die Ungleichheit (1) vorgegeben ist, braucht man natürlich nicht vorauszusetzen, daß sie für jedes z auf C befriedigt ist. Z. B. wenn diese Ungleichheit für jedes z auf dem Rande irgend eines beschränkten Bereiches E gilt, so gilt sie auch für jedes z auf einer Punktmenge C der obigen Art, deren sämtliche Randpunkte auch Randpunkte von E sind. Im allgemeinen, wenn (1) für jedes z einer beschränkten Punktmenge P gilt, so gilt sie für jedes z, das ein Häufungspunkt von P ist, und übrigens auch für jedes z, das sich nicht mit dem Punkt ∞ durch einen Streckenzug verbinden läßt, der weder Punkte von P noch Häufungs-

[1]) Mémoires, Acad. Roy. de Belg., Classe des Sciences, (2) IV (1912), S. 36, 94.

[2]) Der Beweis des Hilfssatzes sowie des Hauptsatzes gilt in der Tat ohne Änderung, wenn nur $V(z)$ von einem Grad nicht größer als n ist.

punkte von P enthält[1]). Solch ein Punkt z ist, in der Tat, entweder ein Punkt oder Häufungspunkt von P, oder er liegt im Inneren eines Bereiches, dessen Rand aus lauter solchen Punkten besteht. Die Fortsetzung der Funktion $F(z)$ auf die neuen Punkte wird immer durch die Folge $V_n(z)$ kraft der Ungleichheit (1) gemacht.

Um den Beweis des Hauptsatzes zu vereinfachen, beweisen wir zuerst einen Hilfsatz; hier schließen wir den Fall aus, daß C aus einem einzigen Punkt besteht.

Hilfsatz. Befriedigt ein Polynom $Q(z)$ vom Grad n die Ungleichheit

$$|Q(z)| \leqq L, \qquad L \text{ konstant}, \tag{2}$$

für jedes z auf der obigen Punktmenge C, dann befriedigt Q die Ungleichheit

$$|Q(z)| \leqq L R_1^n, \tag{3}$$

wenn z auf oder im Inneren von C_{R_1} liegt.

Die Funktion $Q(z)/[\varphi(z)]^n$ ist nämlich in jedem Punkt von B regulär-analytisch, auch im Punkt ∞. Diese Funktion $Q(z)/[\varphi(z)]^n$ ist vielleicht im abgeschlossenen Bereich B unstetig, aber ihr absoluter Betrag ist dort stetig. Das Maximum ihres absoluten Betrags im abgeschlossenen Bereich B ist auf dem Rande von B — d. h. auf C — erreicht, und ist nach (2) nicht größer als L, da $|\varphi(z)| = 1$ auf dem Rande von B ist. Diese Funktion $Q(z)/[\varphi(z)]^n$ ist also auf C_{R_1}: $|\varphi(z)| = R_1$, nicht größer als L, die Ungleichheit (3) gilt für jedes z auf C_{R_1}, also für jedes z innerhalb C_{R_1}, womit der Hilfsatz bewiesen ist.

Dieser Hilfsatz wurde gleichfalls von Bernstein bewiesen[2]), für den Fall, daß C eine geradlinige Strecke ist. Die hier benutzte Methode stammt aber von M. Riesz her[3]) und wurde von ihm benutzt, um den Bernsteinschen Fall des Hilfsatzes zu beweisen.

---

[1]) Vgl. Walsh, zwei Abhandlungen über Entwicklungen nach Polynomen, welche bald in den Mathematischen Annalen erscheinen.

[2]) Loc. cit., S. 15.

[3]) Acta Mathematica 40 (1916), S. 337—347. Siehe auch Mittag-Leffler, Münchner Berichte (1915), S. 419—424; Montel, Bull. de la Soc. Math. de France 46 (1918), S. 151—192.

Jetzt erhalten wir leicht den Hauptsatz. Wenn die Funktion $F(z)$ und die Polynome $V(z)$ gegeben sind, so daß (1) für jedes z auf C befriedigt ist, bekommen wir die Ungleichheiten[1])

$$|F(z) - V_{n-1}(z)| \leq \frac{M}{R^{n-1}},$$

$$|V_n(z) - V_{n-1}(z)| \leq M \frac{1+R}{R^n},$$

gleichfalls für jedes n und für jedes z auf C. Das Polynom $V_n(z) - V_{n-1}(z)$ ist vom Grad n, so daß nach (3) die Ungleichheit

$$|V_n(z) - V_{n-1}(z)| \leq M(1+R)\left(\frac{R_1}{R}\right)^n$$

für jedes z auf oder im Inneren von C_{R_1} gilt. Die Folge $V_n(z)$ konvergiert also gleichmäßig auf und im Inneren von C_{R_1}, wenn nur $R_1 < R$ ist. Die Grenzfunktion $F(z)$ dieser Folge ist also im ganzen Inneren von C_R regulär-analytisch.

Wir beweisen die zweite Hälfte unseres Satzes durch die bekannten Polynome von Herrn Faber[2]). Wir nehmen zuerst den Fall, daß die Punktmenge C durch eine regulär-analytische Jordansche Kurve C' begrenzt ist. Die gegebene Funktion $F(z)$ ist im abgeschlossenen Inneren von C_ϱ regulär, daher im abgeschlossenen Inneren einer Kurve C_{ϱ_1} regulär, worin $\varrho_1 > \varrho$ ist.

Nach Herrn Faber gilt die Entwicklung

$$F(z) = a_0 P_0(z) + a_1 P_1(z) + a_2 P_2(z) + \dots \tag{4}$$

für z auf und im Inneren von C', worin man die zur Kurve C' gehörenden Polynome $P_n(z)$ benutzt, und worin man

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|P_n(z)|} = 1 \tag{5}$$

---

[1]) Es ist selbstverständlich, daß man im Hauptsatz die Ungleichheit (1) durch die folgende Ungleichheit ersetzen kann:

$$|V_n(z) - V_{n-1}(z)| < \frac{M'}{R^n}, \qquad M',\ R > 1, \text{ konstante, von } n \text{ und } z \text{ unabhängig,}$$

die sich auf die der Folge $V_n(z)$ entsprechende Reihe

$$V_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (V_n(z) - V_{n-1}(z))$$

natürlich anwendet. In diesem Falle ist die Funktion $F(z)$ bloß als die Grenzfunktion der Folge oder der Reihe definiert.

[2]) Math. Ann. 57 (1903), S. 389—408.

gleichmäßig für alle z auf C' hat[1]). Man hat auch[2])

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\omega} F[\psi(\tau)]\, \tau^{n-1}\, d\tau. \tag{6}$$

In (6) bezeichnet $z = \psi(\tau)$ die Funktion, die das Innere des Einheitskreises $|\tau| = 1$ auf B abbildet, so daß $\tau = 0$ dem Punkt $z = \infty$ entspricht.

Die Kurve K_ω ist der Kreis $|\tau| = \omega$, und in unserem Falle dürfen wir $\omega = 1/\varrho_1$ nehmen.

Es sei

$$|F(z)| \leqq N$$

für alle z auf C_{ϱ_1}; durch (6) bekommt man

$$|a_n| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{K_\omega} |F[\psi(\tau)]| \cdot |\tau|^{n-1} \cdot |d\tau| \leqq \frac{N}{\varrho_1^n}. \tag{7}$$

Wir setzen jetzt[3])

$$V_n(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i(z).$$

Wir erhalten durch (5) die Ungleichheit

$$\sqrt[n]{|P_n(z)|} \leqq \frac{\varrho_1}{\varrho}$$

gleichmäßig für jedes z auf C', wenn nur n genügend groß ist, und daher ist

$$|P_n(z)| \leqq D \left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)^n, \quad D \text{ konstant, von } n \text{ und } z \text{ unabhängig,}$$

für jedes z auf C' und für jedes n. Kraft der Gleichung (4) und der Ungleichheit (7) bekommen wir jetzt die Ungleichheit

$$|F(z) - V_n(z)| < \frac{ND}{\varrho^n(\varrho - 1)} \tag{8}$$

für jedes z auf oder im Inneren von C', d. h. für jedes z auf der Punktmenge C.

---

1) Loc. cit. S. 394.

2) Loc. cit. S. 395.

3) Vgl. aber die obige Erörterung über den Grad von $V_n(z)$; es kann natürlich vorkommen, daß a_n verschwindet.

Wenn die Punktmenge C nicht durch eine regulär-analytische Jordansche Kurve begrenzt ist, doch $F(z)$ sich auf C regulär-analytisch verhält, so ist $F(z)$ auf und im Inneren einer Kurve C_ν regulär[1]), also auf und im Inneren einer Kurve $C_{\nu'}$ $(\nu' > \nu)$ regulär. Wir nehmen $\nu = \varrho$, wenn es vorausgesetzt ist, daß $F(z)$ im abgeschlossenen Inneren von C_ϱ regulär ist. Die soeben gegebene Diskussion, wo C' durch $C_{\frac{\nu'}{\nu}}$ ersetzt wird, liefert jetzt die gewünschte Ungleichheit (8), die für jedes z auf oder im Inneren von $C_{\frac{\nu'}{\nu}}$ (daher auch für jedes z auf C) gilt, worin $\varrho = \nu$ ist, und worin N das Maximum von $F(z)$ auf C'_{ν_1} $(\nu_1' > \nu')$ ist. Die Funktion

$$u = \frac{\nu}{\nu'}\,\varphi(z)$$

bildet in der Tat das Äußere von $C_{\frac{\nu'}{\nu}}$ auf das Äußere des Einheitskreises $|u| = 1$ ab, und die durch die Gleichung

$$\left|\frac{\nu}{\nu'}\,\varphi(z)\right| = \nu = \varrho$$

definierte Kurve ist $C_{\nu'}$. Der Hauptsatz ist jetzt vollständig bewiesen.

Die hier bewiesene Tatsache, daß, wenn die Punktmenge C durch eine regulär-analytische Jordansche Kurve begrenzt ist und wenn $F(z)$ im abgeschlossenen Inneren von C_ϱ regulär ist, die Ungleichheit (1) für $R = \varrho$ bei passender Wahl der $V_n(z)$ gilt, wurde schon von Herrn Szegö[2]) ausgesprochen und nach dem Vorbilde von Fejér durch Interpolationsmethoden bewiesen. Man kann auch im vorliegenden Beweis dieser Tatsache die zu einer

---

[1]) Man führt leicht einen formellen Beweis dieser Tatsache. Die Funktion $F(z)$ ist auf und im Inneren einer Jordanschen Kurve K regulär, wobei C ganz im Inneren von K liegt; vgl. Walsh, loc. cit. Die Kurve K verläuft ganz im Inneren des Bereiches B, und ihr durch die Transformation $u = \varphi(z)$ erhaltenes Bild in der u-Ebene ist eine Jordansche Kurve K', die ganz im Inneren des Bereiches $|u| > 1$ verläuft. Es existiert also eine Kurve $|u| = \nu > 1$ im Inneren der Kurve K'; die Kurve C_ν liegt im Inneren von K selbst und die Punktmenge C liegt ganz im Inneren von C_ν.

Der Beweis der Existenz der Kurve $C_{\nu'}$ ist ähnlich.

[2]) Math. Zeitschr. 9 (1921), S. 218–270; insbesondere S. 266.

Kurve gehörenden Polynome von Herrn Szegö (loc. cit.) an Stelle der Polynome von Herrn Faber gebrauchen. Durch die Polynome von Faber oder Szegö und Ergebnisse von Herrn Carathéodory[1]) über konforme Abbildung, kann man den folgenden Teil des Hauptsatzes beweisen: wenn C das abgeschlossene Innere einer Jordanschen Kurve ist (der Beweis gilt auch in allgemeineren Fällen), und wenn (1) auf C befriedigt ist, so ist $F(z)$ im Inneren der obigen Kurve C_R regulär-analytisch[2]).

Es ist interessant, zu bemerken, daß eine Folge von Polynomen $V_n(z)$ die Ungleichheit (1) in mehreren getrennten Gebieten befriedigen kann, während die entsprechenden Funktionen $F(z)$ in diesen Gebieten nicht Fortsetzungen derselben monogenen analytischen Funktion sind[3]).

Unser Hilfsatz und seine Anwendung gelten auch im wesentlichen in diesem Falle. Ist C die beschränkte abgeschlossene Punktmenge, die aus den besagten Gebieten besteht, und ist B die zu C Komplementärmenge, so existiert eine Funktion $u(x, y)$ in B harmonisch, auf der zu B entsprechenden abgeschlossenen Punktmenge stetig, auf der Begrenzung von B Null, und die sich im Punkt ∞ wie $\log \sqrt{x^2 + y^2}$ plus eine im Punkt ∞ regulär-harmonische Funktion verhält. Die Orte

$$e^{u(x,y)} = R, \qquad R > 1,$$

wovon jeder aus einer endlichen Anzahl Jordanscher Kurven besteht, spielen die Rolle der im obigen betrachteten Kurve C_R.

[1]) Math. Ann. 72 (1912), S. 107—144; Kap. III.

[2]) Vgl. Walsh, loc. cit. Nur ein Teil dieser Behauptung wird dort ausführlich erhalten. Hierzu braucht man natürlich nicht den Hilfsatz des vorliegenden Artikels.

[3]) Einige Beispiele befinden sich bei Montel, Séries de Polynomes Paris 1910), Kap. IV.