Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1926. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1926
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung: $f_1(x, y)\,dx + f_2(x, y)\,dy = 0$, worin f_1 und f_2 allgemeine rationale ganze Funktionen 4. Grades in x und y bedeuten.

Von **Josef Lutz** in Augsburg.

Mit 5 Figuren.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 12. Juni 1926.

I. Connex, Nullsystem und Berührungstransformation.

§ 1. Allgemeines.

In meiner Dissertation: „Über die Erzeugung höherer ebener Nullsysteme und ihren Zusammenhang mit den Connexen $(1, n)$“ [1]) habe ich im letzten Absatze darauf aufmerksam gemacht, daß für die Integralkurven eines Connexes (1, 2) eine Invariante in Form eines Doppelverhältnisses existieren muß. Von diesem Gedanken ausgehend, stellte ich Überlegungen an, die zur Lösung der obigen Differentialgleichung führten.

Um das Folgende leichter im Zusammenhange lesen zu können, sollen die Begriffe Connex, Nullsystem, sowie deren Zusammenhang mit den Differentialgleichungen 1. Ordnung erörtert werden.

In der analytischen Geometrie der Ebene bezeichnet man Formen, welche sowohl eine Reihe Punktkoordinaten als auch eine Reihe Linienkoordinaten enthalten, als Zwischenformen. Die geometrischen Gebilde, welche durch Nullsetzen einer solchen Form analytisch dargestellt werden, werden nach Clebsch Connexe [2]) genannt. Einem solchen Gebilde kommt eine eigentliche geometrische Gestalt nicht mehr zu. Sie werden dargestellt durch eine algebraische Gleichung, welche die Koordinaten eines beweg-

[1]) München, Technische Hochschule 1920.

[2]) Vgl. Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie, I. Bd., S. 924.

lichen Punktes x und einer beweglichen Geaden u je in homogener Weise enthält, d. h. durch eine Gleichung von der Form:

$$f(x, u) = a_x^m \cdot u_a^n = 0.$$

In dieser symbolischen Gestalt bedeutet:

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3,$$
$$u_a = u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3.$$

a_x^m und u_a^n sind symbolische Potenzen dieser linearen Formen.

Jedes Glied der Grundform $f(x, u) = 0$ enthält die x zur m^{ten}, die u zur n^{ten} Dimension. Man spricht vom Connex m^{ter} Ordnung und n^{ter} Klasse, vom Connex (m, n).

Vermöge der Gleichung $f(x, u) = 0$ entsprechen jeder Geraden u unendlich viele Punkte x, welche eine Kurve m^{ter} Ordnung C_x bilden; jedem Punkte x entsprechen unendlich viele Gerade u, welche eine Kurve n^{ter} Klasse C_u umhüllen. Jede Kombination eines Punktes x der Ebene mit einer Geraden u derselben wird als „Element (x, u)“ bezeichnet. Man erhält die Gesamtheit der Elemente (x, u) einer Ebene, wenn man jeden der zweifach unendlich vielen Punkte x mit jeder der zweifach unendlich vielen Geraden u kombiniert. Aus dieser vierfach unendlichen Zahl von Elementen scheidet die Gleichung des Connexes (m, n) eine dreifach unendliche Schar von Elementen aus. Zwei Connexe haben zweifach unendlich viele Elemente gemeinsam; die Gesamtheit der letzteren heißt Coincidenz. Insbesondere bezeichnet man als Hauptcoincidenz die Gesamtheit der Elemente, welche den Gleichungen:

$$1)\ a_x^m u_a^n = 0 \quad \text{und} \quad 2)\ u_x = 0 = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_1$$

genügen. Es bilden hier gemeinsame Elemente:

1. Jeder Punkt mit n durch ihn gehenden Strahlen, den n Coincidenzstrahlen des Punktes. Es sind dies die von dem Punkte an seine zugehörige C_u möglichen Tangenten.

2. Jeder Strahl mit m auf ihm liegenden Punkten, den m Coincidenzpunkten des Strahles. Es sind dies die m Schnittpunkte des Strahles mit seiner zugehörigen C_x.

Es gehört somit zu jedem Connexe (m, n) eine Hauptcoincidenz; umgekehrt gibt es unendlich viele Connexe (m, n), denen eine

gegebene Hauptcoincidenz angehört. Denn ist $f = a_x^m u_a^n = 0$ der gegebene Connex, so enthalten offenbar alle Connexe $f + M \cdot u_x = 0$, wo $M = 0$ einen beliebigen Connex $(m-1,\ n-1)$ darstellt, dieselbe Hauptcoincidenz wie $f = 0$. Betrachten wir nun den Connex $(1, n)$ und seine Hauptcoincidenz. Vermöge seiner Gleichung $a_x u_a^n = 0$ entspricht einer Geraden u eine zweite Gerade u_1 und der Schnittpunkt beider Geraden bildet mit u das Element der Hauptcoincidenz. Durch diesen Schnittpunkt gehen aber alle Geraden, welche der Geraden u durch einen Connex $a_x u_a^n + u_{a_1}^{n-1} \cdot u_x = 0$ zugewiesen sind. Greifen wir einen von diesen Connexen heraus, so entsprechen einer Geraden u zwei Gerade u_1 und u_2, welche sich stets auf u schneiden. Wir haben eine Geradepunktverwandtschaft, welche sich in der Anordnung eines Nullsystems befindet: jede Gerade geht durch den ihr zugeordneten Punkt. Die Ordnung der Nullkurve, welche einem Strahlenbüschel m^{ter} Klasse C_m entspricht, bestimmen wir folgendermaßen.

Durch jeden Punkt x gehen n Gerade, für welche x Punkt der Hauptcoincidenz wird: die n Tangenten an C_u. Die Enveloppe U_v aller durch die Punkte einer Geraden v gehenden Geraden ist somit von der $(n+1)^{\text{ten}}$ Klasse, da v einmal Tangente von U_v wird. Die Ordnung der Nullkurve oder die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit der Geraden v ist dann offenbar gleich der Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten von C_m und U_v, also $m(n+1)$. Wir nennen $n+1$ den Grad des Nullsystems. In diesem entspricht also einer Kurve m^{ter} Klasse C_m im allgemeinen eine Nullkurve N von der $m(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Wir stellen nun die Frage: Gibt es in dieser Nullverwandtschaft $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades Kurven, welche durch die Verwandtschaft in sich übergeführt werden? Offenbar müssen dies Kurven sein von der Eigenschaft, daß die Tangente in jedem ihrer Punkte mit einem Coincidenzstrahl dieses Punktes zusammenfällt, oder mit andern Worten: Element der Hauptcoincidenz muß sein jede Tangente der Kurve und deren Berührpunkt. Durch diese Forderung werden wir auf den Zusammenhang der Hauptcoincidenz eines allgemeinen Connexes (m, n) mit den algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung verwiesen.

Wenn man durch jeden Punkt der Ebene die n_1Richtungen der Geraden zieht, welche ihm in der Hauptcoincidenz entsprechen,

und diese als Bogenelemente eines Kurvensystems betrachtet, so setzt sich aus ihnen ein System von Kurven zusammen, von denen n durch jeden Punkt hindurchgehen; die Tangenten der Kurven in diesem Punkte sind die n Strahlen, welche dem Punkte in der Hauptcoincidenz entsprechen. Um diese Kurven zu finden, hat man die Differentialgleichung zu integrieren, die wie folgt gefunden wird.

Wir setzen wieder $f = a_x^m u_a^n$. Es sei u eine durch einen Punkt x gehende Gerade der Hauptcoincidenz, so daß also für dieses Element $(x\,u)$ gilt: $f(x, u) = 0$ und $u_x = 0$. Ein zu x benachbarter Punkt $x + dx$ befriedigt dann die Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_{dx} &= u_1\,dx_1 + u_2\,dx_2 + u_3\,dx_3 = 0, \\ u_x &= u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0; \end{aligned}$$

hieraus

$$\varrho\,u_1 = x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2; \quad \varrho\,u_2 = x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3;$$
$$\varrho\,u_3 = x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1.$$

In $f = 0$ oder $f + M \cdot u_x = 0$ eingesetzt, ergibt sich die Differentialgleichung:

$$f(x_1, x_2, x_3;\ x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2,\ x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3;\ x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1) = 0 = a_x^m\,(a\,x\,dx)^n.$$

Die hierdurch dargestellten Kurven nennt man Hauptcoincidenz- oder Integralkurven des Connexes $f = 0$. Zu denselben Kurven gelangt man, wenn man dualistisch ausgeht von einem Strahle u und seinen m Coincidenzpunkten.

§ 2. Der Connex (1, 1), das Amesedersche Nullsystem und die W-Kurven.

Die Gleichung des Connexes (1, 1) lautet:

$$f(x, u) = a_x u_a = \Sigma\Sigma a_{ik} x_i u_k = 0.$$

Sie gibt eine besondere Darstellung der allgemeinen Kollineation: zu jedem Punkte x gehört ein Punkt y als Träger des von den entsprechenden Geraden u gebildeten Strahlenbüschels. Da die Kollineation im allgemeinen in der kanonischen Form $\varrho\,y_i = k_i x_i$ angenommen werden darf, so kann auch der allgemeine Connex $a_x u_a = 0$ transformiert werden auf die kanonische Form: $k_1 u_1 x_1 + k_2 u_2 x_2 + k_3 u_3 x_3 = 0$.

Die Hauptcoincidenz wird dargestellt durch die Gleichungen:

$$1)\ k_1 u_1 x_1 + k_2 u_2 x_2 + k_3 u_3 x_3 = 0,$$
$$2)\ u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Dieselbe Hauptcoincidenz gehört auch allen Connexen an von der Form:

$$k_1 u_1 x_1 + k_2 u_2 x_2 + k_3 u_3 x_3 + \mu \cdot u_x = 0,$$

wo μ eine Konstante bedeutet. Durch diese Connexschar ist offenbar ein Nullsystem festgelegt. U_v ist von der 2. Klasse, die Nullverwandtschaft ist also quadratisch. Aus 1) und 2) bestimmt sich der Nullpunkt oder die Hauptcoincidenz zu:

$$\varrho X_1 = (k_3 - k_2) u_2 u_3,$$
$$\varrho X_2 = (k_1 - k_3) u_1 u_3,$$
$$\varrho X_3 = (k_2 - k_1) u_1 u_2.$$

Die Ecken des Koordinatendreiecks seien I, II, III. Eine Gerade u schneide die Seiten $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$ in den Punkten M, N, O. Dann können wir zeigen, daß das D.V.[1]) $(MNOX) =$ Konst.:

III O hat die Gleichung $u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0$, oder als Strahl des Büschels III: $x_1 - \lambda_1 x_2 = 0$; durch Vergleich ergibt sich $\lambda_1 = -\frac{u_2}{u_1}$.

Gerade III X habe die Gleichung $x_1 - \lambda_2 x_2 = 0$; λ_2 erhalten wir, wenn wir für x_1 und x_2 die Werte X_1 und X_2 einsetzen:

$$(k_3 - k_2) u_2 u_3 - \lambda_2 (k_1 - k_3) u_1 u_3 = 0, \quad \text{woraus} \quad \lambda_2 = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{k_3 - k_2}{k_1 - k_3}.$$

Die 4 Strahlen III M, III N, III O, III X haben somit das D.V.:

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} = \text{Konst.};$$ also ist auch immer $(MNOX)$ $=$ Konst. $= \lambda$.

Ameseder hat das nach ihm benannte Nullsystem umgekehrt dadurch definiert, daß er jeder Geraden u einer Ebene den Punkt X auf ihr zuordnete, welcher mit den 3 Schnittpunkten M, N, O auf 3 beliebigen, aber festen Geraden der Ebene ein konstantes D.V. bildet.

---

[1]) D.V. Abkürzung für Doppelverhältnis.

Wir wollen nun die Hauptcoincidenzkurven ermitteln. Die Differentialgleichung lautet:

$$k_1 x_1(x_2 dx_3 - x_3 dx_2) + k_2 x_2(x_3 dx_1 - x_1 dx_3) + k_3 x_3(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = 0,$$

oder umgeformt:

$$(k_2 - k_3)\frac{dx_1}{x_1} + (k_3 - k_1)\frac{dx_2}{x_2} + (k_1 - k_2)\frac{dx_3}{x_3} = 0.$$

Somit lauten die Integralkurven:

$$x_1^{k_2 - k_3} \cdot x_2^{k_3 - k_1} \cdot x_3^{k_1 - k_2} = \text{Konst.}$$

In Linienkoordinaten erhalten wir genau dieselbe Gleichung:

$$u_1^{k_2 - k_3} \cdot u_2^{k_3 - k_1} \cdot u_3^{k_1 - k_2} = \text{Konst.}$$

Von diesen Kurven können wir nun sofort folgenden Satz aussprechen:

Das D.V. des Berührungspunktes einer Tangente einer Integralkurve des Connexes (1, 1) und der drei Schnittpunkte der Tangente mit den Seiten des Fundamentaldreiecks ist konstant und für jede Kurve des Systems dasselbe.

Gewöhnlich wird dieser Satz in ganz anderer Weise abgeleitet[1]).

Diese Integralkurven sind bekannt unter dem Namen W-Kurven. Sie sind für alles Weitere dieser Abhandlung von grundlegender Bedeutung; namentlich der zuletzt angeführte Satz über das D.V. wird von uns verwertet werden.

§ 3. Synthetische Erzeugung von Nullsystemen und Zusammenhang mit entsprechenden Connexen.

Wenn wir zu jeder Geraden u einer Ebene in irgend einer Weise ein Dreieck in Beziehung setzen und die Amesedersche Operation (D.V.) mit dieser Geraden und dem Dreieck ausführen, so gelangen wir zu Nullsystemen höheren Grades. Das jeder Geraden u entsprechende Dreieck A, B, C wollen wir ein „Amesedersches Dreieck (= Am. △) nennen; die Operation für die Bestimmung des einer Geraden entsprechenden Punktes X drücken wir dahin aus, daß wir sagen: wir bestimmen den zur Geraden u

[1]) Clebsch-Lindemann, I. Bd., p. 997 und Wieleitner: Ebene spezielle Kurven, p. 347.

gehörigen „Dreieckswurf λ“ ($= D_\lambda$). In folgender Weise definieren wir unser Nullsystem:

Die Ebene ε sei in dreifacher Weise korrelativ auf sich selbst bezogen, so daß dem Geradenfeld ε drei in ihm gelegene Punktfelder ε_1, ε_2, ε_3 zugeordnet sind. Zu jeder Geraden u in ε können wir so ein Am. $\triangle$ und D_λ bestimmen. Wir haben also ein Nullsystem vor uns und zwar das allgemeinste, das wir auf Grund solcher D_λ im Gebiete der linearen Transformationen bestimmen können. In meiner Dissertation ist gezeigt, daß dieses Nullsystem vom 5. Grade ist. Einer Kurve m^{ter} Klasse entspricht also eine Nullkurve von der $5\,m^{\text{ten}}$ Ordnung.

Wir haben bereits auf S. 235 hingewiesen auf den Zusammenhang zwischen dem durch den Connex (1, 1) analytisch definierten Nullsystem 2. Grades und dem von *Ameseder* geometrisch konstruierten Nullsystem 2. Grades. Es ist leicht einzusehen, daß beide Systeme identisch sind, folglich sind auch die Integralkurven dieselben. Ein genauer Beweis hiefür ist in meiner Dissertation angegeben. Dort ist ebenfalls gezeigt, daß jedes irgendwie geometrisch konstruierte Nullsystem 3. Grades auf einen Normaltyp zurückgeführt werden kann, der identisch ist mit dem durch den Connex (1, 2) analytisch definierten Nullsystem 3. Grades. Es müssen daher auch die Integralkurven in diesen Systemen dieselben sein.

Nun liegt die Vermutung nahe, daß das oben definierte Nullsystem 5. Grades ($5 = 4 + 1$) und der Connex (1, 4) in enger Beziehung zueinander stehen. Wir werden später (§ 13) zeigen, daß das Nullsystem des Connexes (1, 4) und das oben synthetisch konstruierte Nullsystem 5. Grades identisch sind, daß das letztere immer durch den allgemeinen Connex (1, 4) analytisch bestimmt werden kann. Gelingt es uns, die Integralkurven des geometrisch konstruierten Nullsystems zu finden, so sind damit auch die Integralkurven des Connexes (1, 4) ermittelt.

Die Differentialgleichung dieser Integralkurven lautet in Linienkoordinaten:

$$f_1 \cdot (u_2\,du_3 - u_3\,du_2) + f_2 \cdot (u_3\,du_1 - u_1\,du_3) + f_3 \cdot (u_1\,du_2 - u_2\,du_1) = 0.$$

Diese Gleichung geht hervor aus dem Connex (1, 4): $f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 = 0$, worin f_1, f_2, f_3 rationale homogene Funk-

tionen 4. Grades in u_1, u_2, u_3 bedeuten. Schreiben wir obige Differentialgleichung in der Form:

$$(f_2 u_3 - f_3 u_2) \cdot d u_1 + (f_3 u_1 - f_1 u_3) d u_2 + (f_1 u_2 - f_2 u_1) d u_3 = 0.$$

Ist speziell $f_3 \equiv 0$, so erhalten wir die Differentialgleichung:

$$f_2 u_3 d u_1 - f_1 u_3 d u_2 + (f_1 u_2 - f_2 u_1) d u_3 = 0,$$

oder geschrieben in gewöhnlichen Koordinaten[1]): $f_2 du - f_1 dv = 0$. Setzen wir $f_2 = F_1$, $-f_1 = F_2$, so lautet die Gleichung: $F_1 du + F_2 dv = 0$.

F_1 und F_2 sind Funktionen 4. Grades in u und v. Kennen wir die Integralkurven des Connexes (1, 4), so kennen wir als Spezialfall auch die Integralkurven der letzten Differentialgleichung. Letztere bietet einen einheitlicheren Abschluß einer Gruppe linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung und deshalb erscheint es zweckmäßig, von der allgemeinen Lösung dieser Differentialgleichung zu sprechen, anstatt von der allgemeinen Lösung der durch den Connex (1, 4) bestimmten Differentialgleichung.

§ 4. Der fundamentale Grundgedanke zur Lösung.

Wir wollen die sich selbst entsprechenden Kurven unseres synthetisch aufgebauten Nullsystems auffinden. Erinnern wir uns des fundamentalen Sates über die W-Kurven, den Integralkurven des quadratischen Nullsystems oder des Connexes (1, 1): Es existiert für diese Kurven eine Invariante in Form des D.V. λ.

Unser Nullsystem 5. Grades ist durch die Invariante μ aufgebaut, durch D_μ. Die auftretenden Dreiecke sind jedoch veränderlich.

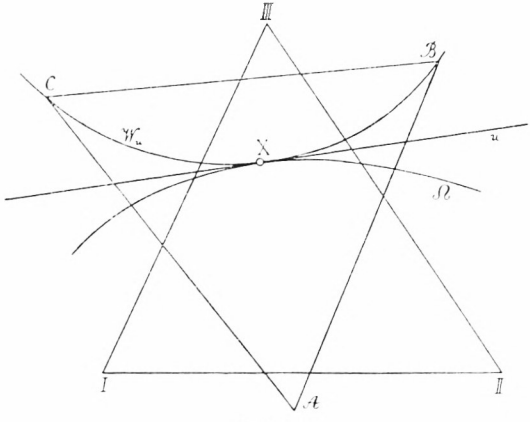
$\Omega = 0$ sei eine sich selbst entsprechende Kurve, eine Integralkurve dieses Systems. Solche Kurven werden immer existieren, denn wir können den Connex bestimmen[2]), der den Nullpunkt als Hauptcoincidenzpunkt hat. Ein Connex hat aber immer Integralkurven.

I, II, III sei das Koordinatendreieck, u eine Tangente an Ω. Vermöge der 3 Korrelationen entspricht der Tangente u das $\triangle ABC$ und Berührpunkt X als Nullpunkt nach D_μ. Denken wir uns nun das zu u gehörige $\triangle ABC$ festgehalten, so umhüllen Gerade r

[1]) $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = 1$, $du_3 = 0$.

[2]) Siehe § 7.

W-Kurven im System ABC (D.V. μ). In X berührt dann eine dieser W-Kurven W_u die Kurve Ω und die Tangente u. Das gilt für alle Tangenten u von Ω, d. h. Ω ist die Enveloppe aller W-Kurven W_u.



Figur 1.

Betrachten wir diese Beziehung von anderem Gesichtspunkte aus. Die Schar der Ω ist durch die Differentialgleichung des Connexes bestimmt, der seinerseits durch das Nullsystem festgelegt ist. In gewöhnlichen Punktkoordinaten sei diese Differentialgleichung: 1) $f(x, y, y') = 0$. Die Integralkurven dieser Differentialgleichung können wir durch Elimination finden, wenn wir eine zweite Gleichung 2) $\varphi(x, y, y', a) = 0$ kennen, so daß die gemeinsamen Linienelemente[1]) der beiden Gleichungen einen Elementverein[1]) bilden. Jede dieser Differentialgleichungen besitzt ∞^1 Integralgebilde. In der Regel gibt es kein Integralgebilde, das beiden Gleichungen gemeinsam ist[2]).

In unserem Falle enthält die Differentialgleichung der W-Kurven W_u der variablen Dreiecke ABC dieselben Linienelemente, die der Gleichung 1) genügen müssen. Damit ist der Weg angedeutet, der uns zur Lösung führt. Wir finden diese am besten und einfachsten durch Anwendung der Lehre von den Berührungstransformationen.

[1]) Siehe § 5.

[2]) φ müßte einer bestimmten partiellen Differentialgleichung genügen.

§ 5. Die W-Kurven W_u und die dazu gehörige Berührungstransformation.

Nach Lie-Scheffers heißt eine Transformation in den 3 Veränderlichen x, y, y' (den Koordinaten eines Linienelementes der Ebene):

1) $$x_1 = X(x, y, y'); \quad y_1 = Y(x, y, y'); \quad y_1' = P(x, y, y')$$

eine Berührungstransformation der (x, y) Ebene, wenn sie jeden Verein von Linienelementen (x, y, y') in einen Elementverein überführt. Die Begriffe Linienelement, Elementverein seien kurz erläutert.

Anstatt zu sagen, daß zwei einander berührende Kurven einen Punkt und die Tangente daselbst gemein haben, sagen wir: die Kurven besitzen ein gemeinsames Linienelement, wobei der Inbegriff eines Punktes (x, y) und einer durch ihn hindurchgehenden Geraden als Linienelement bezeichnet wird. Eine Kurve definiert nicht nur ∞^1 Punkte und ∞^1 Tangenten, sondern auch ∞^1 Linienelemente, die wir die Linienelemente der Kurve nennen. Diese Linienelemente müssen die Differentialrelation

2) $$dy - y' dx = 0$$

erfüllen. Eine solche Schar von Linienelementen heißt ein Elementverein.

Obige Transformation 1) wird nur dann eine Berührungstransformation, wenn

3) $$dy_1 - y_1' dx_1 = 0,$$

d. h. es muß sein:

4) $$dy_1 - y_1' dx_1 = \varrho(x, y, y') \cdot (dy - y' dx).$$

Nur dann werden irgend zwei Kurven der (x, y) Ebene, die sich berühren, übergeführt in zwei Kurven der $(x_1 y_1)$ Ebene, die sich ebenfalls berühren.

Dasselbe gilt für die Transformation der Linienkoordinaten der Tangenten zweier Kurven.

Da $u = -\dfrac{y'}{xy' - y}$, $v = \dfrac{1}{xy' - y}$, $v' = -\dfrac{x}{y}$, so erfüllen auch die Linienkoordinaten die Relation:

5) $$dv_1 - v_1' du_1 = \varrho' \cdot (dv - v' du).$$

Im folgenden[1]) benützen wir die Transformation der Linienkoordinaten.

Aus den Gleichungen 1) ergibt sich durch Elimination eine Gleichung

$$6) \qquad \Omega(x, y, x_1, y_1) = 0.$$

Diese Gleichung (aequatio direktrix) stellt alle Berührungstransformationen der Ebene dar.

Auf Grund von 4) folgen aus ihr die Relationen:

$$7) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + p \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= 0 \qquad (p = y'), \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} &= 0 \qquad (p_1 = y_1'). \end{aligned}$$

Jede Berührungstransformation wird bestimmt durch die 3 Gleichungen:

$$\Omega = 0; \quad \Omega_x + p\,\Omega_y = 0; \quad \Omega_{x_1} + p_1\,\Omega_{y_1} = 0.$$

Sind umgekehrt 3 solche Gleichungen nach x, y, y' ebensowohl wie nach x_1, y_1, y_1' auflösbar, so bestimmen sie eine Berührungstransformation.

$\Omega = 0$ stellt eine B.T.[2]) dar, wenn durch diese Gleichung ∞^2 voneinander verschiedene Kurven in x_1, y_1 dargestellt werden, sobald x, y als Parameter aufgefaßt werden[3]).

Kehren wir nun zu unserm Problem zurück. Vermöge entsprechender Gleichungen, die wir alsbald aufstellen, seien die Koordinaten des Dreiecks ABC analytisch bestimmt. Dann können wir auch die Gleichung der W-Kurven W_u des Dreiecks ABC angeben. Dieselbe wird die Form haben:

$$f(v_1, v_2, v_3;\ u_1, u_2, u_3;\ C) = 0,$$

worin die v als laufende Koordinaten anzusehen sind, während die u als Koordinaten der Geraden u Parameter sind. C ist Integrationskonstante; halten wir ein beliebiges C fest, so bekommen wir für die ∞^2 Geraden u der Ebene ∞^2 W-Kurven; wir haben also eine Berührungstransformation. Umhüllen die u eine

[1]) S. 249.

[2]) B.T. = Abkürzung für Berührungstransformation.

[3]) Lie-Scheffers, Bd. I, p. 53, Ausgabe 1912.

Kurve C_u, so ist die Enveloppe der W-Kurven die transformierte Kurve C_v'.

Hat nun die durch $f = 0$ definierte B.T. Kurven, welche sich Punkt für Punkt selbst entsprechen, so sind diese sich selbst entsprechenden Kurven die Integralkurven des Nullsystems.

Wir haben bereits erkannt, daß das Nullsystem auf alle Fälle Integralkurven hat. Im späteren Verlauf der Arbeit wird es darauf ankommen, die B.T. so zu bestimmen, daß diese selbstentsprechende Kurven hat, die alsdann die Integralkurven darstellen.

Ich habe in der Literatur über B.T. keine Abhandlung gefunden, die sich mit solchen B.T. befaßt, welche Kurven haben, die sich Punkt für Punkt oder Gerade für Gerade selbst entsprechen. Nur auf eine französische Arbeit von Lattès ist in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften von Liebmann[1]) aufmerksam gemacht. Doch ist hier von Kurven die Rede, deren Überführung in sich folgende Figur veranschaulicht:

Figur 2.

Der $(x\ y)$ entsprechende Punkt $(x_1\ y_1)$ liegt also wohl auf der Kurve, fällt aber nicht zusammen mit $(x\ y)$. Im nächsten Paragraphen werden daher B.T. untersucht, wie wir sie für unser Problem benötigen.

§ 6. Berührungstransformationen, welche eine punktweise sich selbst entsprechende Kurve haben.

Gegeben sei die B.T. durch die Gleichung:

$$1) \qquad \Omega(x, y, x_1, y_1) = 0.$$

Dann kann eine sich selbst entsprechende Kurve nur die Gleichung haben: $\Omega(x, y, x_1, y_1)_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}} = 0.$

Wir zeigen dies folgendermaßen:

Sei $\Phi(x, y) = 0$ eine Kurve, welche sich Punkt für Punkt selbst entspricht. Ist zunächst irgend eine Kurve $\varphi(x, y) = 0$ gegeben, so ist die ihr durch die B.T. entsprechende Kurve bestimmt als Enveloppe aller Kurven $\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$, worin

[1]) Bd. III 3, Heft 4, S. 468.

x und y als Parameter auch noch der Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ genügen müssen. Aus $\varphi = 0$ und $\Omega = 0$ können wir etwa y eliminieren, so daß wir nur mehr eine einfach unendliche Kurvenschar Ω haben mit dem Parameter x. Deren Enveloppe kann in bekannter Weise ermittelt werden. Einem Punkte (x, y) und $(x + dx,\ y + dx)$ entsprechen alsdann zwei unendlich benachbarte Kurven $\Omega = 0$ und $\Omega' = 0$ und deren Schnittpunkt ist der Punkt (x_1, y_1), der dem Punkt (x, y) entspricht.

Soll (x_1, y_1) mit (x, y) identisch sein, so muß die Kurve $\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$, worin x und y nun als fest und x_1, y_1 als laufende Koordinaten anzusehen sind, durch den Punkt (x, y) hindurchgehen, d. h. die Gleichung $\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$ muß befriedigt sein für $x_1 = x$, $y_1 = y$. Das muß aber für alle Punkte von $\Phi = 0$ der Fall sein, d. h. für unendlich viele Punkte muß stattfinden:

$$(\Omega(x, y, x_1, y_1))_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}} = 0.$$

Das sind offenbar eben nur die Punkte der Kurve

$$(\Omega(x, y, x_1, y_1))_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}} = 0$$

selbst. Angenommen, es gäbe noch eine andere Kurve $\Omega' = 0$, die sich selbst entspricht, so müßte für alle deren Punkte sein: $(\Omega)_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}} = 0$. Die ∞^1 Punkte von $\Omega' = 0$ würden also auch die Gleichung $\Omega = 0$ befriedigen; dies kann aber nur sein, wenn $\Omega' = \Omega$.

Wenn also eine sich selbst entsprechende Kurve existiert, so ist dies nur die durch die Gleichung $(\Omega)_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}} = 0$ bestimmte Kurve.

Wir wollen nun die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer solchen Kurve angeben.

Aus Gleichung 1) $\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$ ergeben sich die weiteren:

$$2)\ \frac{\partial \Omega}{\partial x} + p\frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0; \quad 3)\ \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = 0.$$

Hieraus können wir die Transformation bestimmen:

$$x_1 = f_1(x, y, p); \quad y_1 = f_2(x, y, p); \quad p_1 = f_3(x, y, p).$$

Soll $x_1 = x$, $y_1 = y$ werden, so muß auch p_1 in p übergehen; es muß also sein:

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}} + p \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}} = 0 \text{ und}$$

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}\right)_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}} + p \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}\right)_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}} = 0.$$

Dies ist nur möglich, wenn

4)
$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}} = \varrho \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}\right)_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}}$$
$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}} = \varrho \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}\right)_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}}$$

ϱ muß hier $= 1$ angenommen werden.

Wir hätten auch folgendermaßen überlegen können:

$\frac{\partial \Omega}{\partial x} \xi + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \eta + C = 0$ ist die Gleichung der Tangente von $\Omega = 0$ in einem Punkte (x, y), wenn x_1, y_1 festgehalten ist.

$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \xi + \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} \eta + C = 0$ ist die Gleichung der Tangente von $\Omega = 0$ in einem Punkte x_1, y_1, wenn x, y festgehalten ist.

Die Tangenten müssen zusammenfallen, wenn $\begin{matrix} x = x_1 \\ y = y_1 \end{matrix}$; hieraus folgen die Gleichungen 4).

Beispiel: Gegeben sei eine B.T. durch die Gleichung: $\Omega \equiv x x_1 + y + y_1 = 0$. Dadurch ist die Transformation durch reziproke Polaren inbezug auf die Parabel $x^2 + 2y = 0$ dargestellt. Die Gleichung der Polaren des Punktes (x, y) lautet: $x x_1 + y + y_1 = 0$. Ohne weiteres ist klar, daß die sich selbst entsprechende Kurve die Parabel $x^2 + 2y = 0$ ist; bestätigen wir dies auf Grund obiger Ausführungen:

$$(\Omega)_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}} \equiv (x x_1 + y + y_1)_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}} = x^2 + 2y = 0.$$

Wir zeigen, daß die Bedingungen 4) erfüllt sind.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + p \frac{\partial \Omega}{\partial y} = x_1 + p = 0, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial x} = x_1; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 1,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = x + p_1 = 0, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = x; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = 1.$$

Es ist in der Tat:

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}} = x = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}\right)_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}}$$

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}} \quad 1 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}\right)_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}}.$$

II. Die rechnerische Durchführung des Problems.

§ 7. Koordinaten des Nullpunkts im Nullsystem.

I, II, III sei das Koordinatendreieck, A, B, C ein Am. $\triangle$, das einer Geraden u der Ebene vermöge dreier allgemeiner Funktionsgruppen entsprechen möge. Der Fall, daß diese Funktionsgruppen 3 Korrelationen darstellen, ist dann in unserer Betrachtung enthalten. A habe die Koordinaten x_i, $B - y_i$, $C - z_i$. Dann ist:

$$\varrho\, x_i = f_i; \quad \varrho\, y_i = g_i; \quad \varrho\, z_i = h_i.$$

f, g, h sind irgendwelche Funktionen von u_1, u_2, u_3.

Der Nullpunkt X soll auf u so bestimmt werden, daß $(MNOX) = \mu$, wobei μ eine Konstante bedeutet (D.V. μ).

M Schnittpunkt von u mit BC,
N „ „ u „ AC,
O „ „ u „ AB.

$$(MNOX) = \frac{MO}{NO} : \frac{MX}{NX} = \mu_1 : \mu_2.$$

Wir bestimmen zunächst μ_1. Die Koordinaten von M, N, O seien beziehungsweise ξ_i, η_i, ζ_i. Irgend ein Punkt auf BC hat die Koordinaten $\varrho\, \tau_i = g_i - \lambda h_i$. Da ξ auch auf der Geraden $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ liegt, so gilt: $u_1 \tau_1 + u_2 \tau_2 + u_3 \tau_3 = 0$, oder $u_1 g_1 + u_2 g_2 + u_3 g_3 - \lambda (u_1 h_1 + u_2 h_2 + u_3 h_3) = 0$.

Schreiben wir für $u_1 g_1 + u_2 g_2 + u_3 g_3 = u_g$ etc., so haben wir:

$$u_g - \lambda\, u_h = 0; \quad \lambda = \frac{u_g}{u_h}.$$

Somit sind die Koordinaten von M:

$$\varrho\, \xi_i = g_i - \frac{u_g}{u_h} \cdot h_i \quad \text{oder} \quad \varrho' \xi_i = g_i u_h - h_i u_g.$$

Analog Koordinaten von N: $\varrho'' \eta_i = h_i u_f - f_i u_h$,
„ „ „ O: $\varrho''' \zeta_i = f_i u_g - g_i u_f$.

Die Punkte der Geraden u wollen wir uns unter Benützung von M und N als Grundpunkten in Parameterform geben:

$$\varrho\, r_i = \xi_i - \mu_1 \eta_i.$$

Setzen wir für r_i die Koordinaten von O ein, so können wir das dazu gehörige μ_1 ermitteln. Schreiben wir in Zukunft für

$$f_i u_g - g_i u_f = (f_i g_i) \text{ etc.},$$

so ergibt diese Substitution:

$$\begin{aligned} \varrho\,(f_1 g_1) &= (g_1 h_1) - \mu_1 (h_1 f_1), \\ \varrho\,(f_2 g_2) &= (g_2 h_2) - \mu_1 (h_2 f_2), \\ \varrho\,(f_3 g_3) &= (g_3 h_3) - \mu_1 (h_3 f_3). \end{aligned}$$

Dividieren wir die beiden ersten Gleichungen durcheinander, so ergibt sich zur Bestimmung von μ_1 die Beziehung:

$$\frac{(f_1 g_1)}{(f_2 g_2)} = \frac{(g_1 h_1) - \mu_1 (h_1 f_1)}{(g_2 h_2) - \mu_1 (h_2 f_2)}; \text{ hieraus}$$

$$\mu_1 = \frac{(f_1 g_1)(g_2 h_2) - (f_2 g_2)(g_1 h_1)}{(f_1 g_1)(h_2 f_2) - (f_2 g_2)(h_1 f_1)} = \frac{Z}{N}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich nun sehr vereinfachen. Betrachten wir erst den Zähler des Bruches und schreiben ihn in Determinantenform:

$$\begin{aligned} Z = \begin{vmatrix} (f_1 g_1) & (f_2 g_2) \\ (g_1 h_1) & (g_2 h_2) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} f_1 u_g - g_1 u_f & f_2 u_g - g_2 u_f \\ g_1 u_h - h_1 u_g & g_2 u_h - h_2 u_g \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{u_f} \begin{vmatrix} f_1 u_g - g_1 u_f & f_2 u_g - g_2 u_f & 0 \\ g_1 u_h - h_1 u_g & g_2 u_h - h_2 u_g & 0 \\ f_1 & f_2 & u_f \end{vmatrix} &= \\ = u_g \begin{vmatrix} u_f & u_g & u_h \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix} &= u_g \cdot D. \end{aligned}$$

Für den Nenner N ergibt sich:

$$N = \begin{vmatrix} (f_1 g_1) & (f_2 g_2) \\ (h_1 f_1) & (h_2 f_2) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} (f_1 g_1) & (f_2 g_2) \\ (f_1 h_1) & (f_2 h_2) \end{vmatrix}.$$

Vergleichen wir N mit Z, so bemerken wir in N f_1 und f_2 anstelle von g_1 und g_2 bei Z. Alles übrige ist dasselbe. Mithin ist $N = -u_f \cdot D$ und es wird

$$\mu_1 = \frac{u_g \cdot D}{-u_f \cdot D} = -\frac{u_g}{u_f} \quad (D \neq 0).$$

Die Koordinaten irgend eines Punktes auf u waren: $\varrho r_i = \xi_i - \mu_1 \eta_i$.

Für Punkt 0 ergab sich der Parameter μ_1 zu $-\frac{u_g}{u_f}$.

Für Punkt X sei der Parameter μ_2.

Da X so bestimmt sein soll, daß $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \mu$, so folgt: $\mu_2 = \frac{\mu_1}{\mu}$.

X hat somit die Koordinaten:

$$\varrho X_i = \mu \xi_i - \mu_1 \cdot \eta_i = \mu (g_i u_h - h_i u_g) + \frac{u_g}{u_f} (h_i u_f - f_i u_h) \quad \text{oder}$$

$$\varrho' X_i = \mu u_f u_h g_i + (1 - \mu) u_f u_g h_i - u_g u_h f_i.$$

Ausführlich geschrieben:

$$\varrho' X_1 = \mu u_f u_h g_1 + (1 - \mu) u_f u_g h_1 - u_g u_h f_1,$$
$$\varrho' X_2 = \mu u_f u_h g_2 + (1 - \mu) u_f u_g h_2 - u_g u_h f_2,$$
$$\varrho' X_3 = \mu u_f u_h g_3 + (1 - \mu) u_f u_g h_3 - u_g u_h f_3.$$

Dies sind die wichtigen Formeln für die Koordinaten des Nullpunktes.

Ist umgekehrt Punkt X auf u gegeben, so wollen wir das dazu gehörige D.V. μ angeben.

Für X gilt: $\varrho X_i = \xi_i - \mu_2 \eta_i$ oder

$$\varrho X_1 = (g_1 h_1) - \mu_2 (h_1 f_1),$$
$$\varrho X_2 = (g_2 h_2) - \mu_2 (h_2 f_2),$$
$$\varrho X_3 = (g_3 h_3) - \mu_2 (h_3 f_3).$$

Es ist: $\frac{X_1}{X_2} = \frac{(g_1 h_1) - \mu_2 (h_1 f_1)}{(g_2 h_2) - \mu_2 (h_2 f_2)}$; hieraus

$$\mu_2 = \frac{X_1 (g_2 h_2) - X_2 (g_1 h_1)}{X_1 (h_2 f_2 - X_2 (h_1 f_1)}.$$

Da $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, so erhalten wir:

$$\mu = -\frac{u_g}{u_f} \cdot \frac{X_1 (h_2 f_2) - X_2 (h_1 f_1)}{X_1 (g_2 h_2) - X_2 (g_1 h_1)}.$$

§ 8. Aufstellung der Gleichung Ω für die Berührungstransformation.

Die Gleichung der W-Kurven (D.V. μ) in bezug auf das $\triangle ABC$ als Koordinatendreieck lautet in laufenden Koordinaten ω_i:

$$\omega_1^{-1} \cdot \omega_2^{\mu} \cdot \omega_3^{1-\mu} = C \text{ (siehe S. 236)},$$

$$\left[\mu = \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3};\ 1 - \mu = 1 - \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} = \frac{k_2 - k_1}{k_2 - k_3};\right.$$

$$\omega_1^{-1} \cdot \omega_3^{\frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3}} \cdot \omega_2^{\frac{k_2 - k_1}{k_2 - k_3}} = C;$$

$$\left.\omega_1^{k_2 - k_3} \cdot \omega_2^{k_3 - k_1} \cdot \omega_3^{k_1 - k_2} = C^{-(k_2 - k_3)} = C'\right].$$

Nun transformieren wir die Gleichung $\omega_1^{-1} \cdot \omega_2^{\mu} \cdot \omega_3^{1-\mu} = C$ auf das Koordinatendreieck I II III mit den laufenden Koordinaten v_i.

Allgemein lauten die Transformationsgleichungen für den Übergang von einem System zum andern[1]):

$$\begin{aligned} \varrho\, \omega_1 &= a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + a_{31} v_3, \\ \varrho\, \omega_2 &= a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + a_{32} v_3, \\ \varrho\, \omega_3 &= a_{13} v_1 + a_{23} v_2 + a_{33} v_3. \end{aligned}$$

Hierin bedeuten die a_{ki} die Koordinaten der Dreiecksecken A, B, C in bezug auf das Dreieck I II III und zwar sind die Koordinaten

von A: a_{11}, a_{21}, a_{31},
„ B: a_{12}, a_{22}, a_{32},
„ C: a_{13}, a_{23}, a_{33}.

Es entsprechen sich also:

$$\begin{aligned} a_{11} &\sim f_1, & a_{12} &\sim g_1, & a_{13} &\sim h_1, \\ a_{21} &\sim f_2, & a_{22} &\sim g_2, & a_{23} &\sim h_2, \\ a_{31} &\sim f_3, & a_{32} &\sim g_3, & a_{33} &\sim h_3. \end{aligned}$$

Somit lautet die transformierte Gleichung der W-Kurven:

$$(f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3)^{-1} \cdot (g_1 v_1 + g_2 v_2 + g_3 v_3)^{\mu} \cdot (h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3)^{1-\mu} = C.$$

f_i, g_i, h_i bedeuten hierin allgemeine, beliebige Funktionen in u_i.

[1]) Clebsch-Lindemann, II. Bd., I. Teil, S. 92 und 93.

Im Nullsystem der Korrelationen sind f_i, g_i, h_i lineare Funktionen und zwar lauten die Koordinaten von A, B, C ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= \alpha_{11} u_1 + \alpha_{12} u_2 + \alpha_{13} u_3, & \varrho' y_1 &= \beta_{11} u_1 + \beta_{12} u_2 + \beta_{13} u_3,\\
\varrho x_2 &= \alpha_{21} u_1 + \alpha_{22} u_2 + \alpha_{23} u_3, & \varrho' y_2 &= \beta_{21} u_1 + \beta_{22} u_2 + \beta_{23} u_3,\\
\varrho x_3 &= \alpha_{31} u_1 + \alpha_{32} u_2 + \alpha_{33} u_3, & \varrho' y_3 &= \beta_{31} u_1 + \beta_{32} u_2 + \beta_{33} u_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varrho'' z_1 &= \gamma_{11} u_1 + \gamma_{12} u_2 + \gamma_{13} u_3,\\
\varrho'' z_2 &= \gamma_{21} u_1 + \gamma_{22} u_2 + \gamma_{23} u_3,\\
\varrho'' z_3 &= \gamma_{31} u_1 + \gamma_{32} u_2 + \gamma_{33} u_3.
\end{aligned}$$

Die α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} sind hierin Konstante. Im System der Korrelationen lautet die Gleichung der W-Kurven:

$$\begin{aligned}
&[(\alpha_{11} u_1 + \alpha_{12} u_2 + \alpha_{13} u_3) v_1 + (\alpha_{21} u_1 + \alpha_{22} u_2 + \alpha_{23} u_3) v_2 +\\
&\qquad + (\alpha_{31} u_1 + \alpha_{32} u_2 + \alpha_{33} u_3) v_3]^{-1} \cdot\\
&\cdot [(\beta_{11} u_1 + \beta_{12} u_2 + \beta_{13} u_3) v_1 + (\beta_{21} u_1 + \beta_{22} u_2 + \beta_{23} u_3) v_2 +\\
&\qquad + (\beta_{31} u_1 + \beta_{32} u_2 + \beta_{33} u_3) v_3]^{u} \cdot\\
&\cdot [(\gamma_{11} u_1 + \gamma_{12} u_2 + \gamma_{13} u_3) v_1 + (\gamma_{21} u_1 + \gamma_{22} u_2 + \gamma_{23} u_3) v_2 +\\
&\qquad + (\gamma_{31} u_1 + \gamma_{32} u_2 + \gamma_{33} u_3) v_3]^{1-u} = C.
\end{aligned}$$

u_1, u_2, u_3 sind hierin Parameter. Geben wir den u_i alle Werte, welche die ∞^2 Geraden der Ebene liefern, so bekommen wir zu jedem u ein System von W-Kurven, das durch diese letzte Gleichung dargestellt wird. Geben wir C einen beliebigen, aber festen Wert, und halten diesen für alle Geraden u fest, so haben wir offenbar eine B.T., gegeben durch eine Gleichung: $\Omega(u_1, u_2, u_3; v_1, v_2, v_3) = 0$, vor uns. Die sich selbst entsprechende Kurve hat, falls überhaupt eine solche vorhanden ist, die Gleichung: $(\Omega)_{v_i = u_i} = 0$. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz dieser Kurve lautet[1]):

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial u_i}\right)_{v_i = u_i} = \varrho \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v_i}\right)_{v_i = u_i}.$$

Schreiben wir die Gleichung für die B.T. abgekürzt:

$$\Omega = \omega_1^{-1} \cdot \omega_2^{u} \cdot \omega_3^{1-u} - C = 0.$$

Hierin hat ω_i die Bedeutung obiger Klammerausdrücke [ ].

[1]) S. 244, Übertragung der Beziehungen 4) auf homogene Linienkoordinaten.

Nun ist:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_1} = \frac{\omega_1^{-1}\omega_2^{\mu}\omega_3^{1-\mu}}{\omega_1\omega_2\omega_3}\cdot\left(-\omega_2\omega_3\frac{\partial \omega_1}{\partial u_1} + \mu\omega_1\omega_3\frac{\partial \omega_2}{\partial u_1} + (1-\mu)\omega_1\omega_2\frac{\partial \omega_3}{\partial u_1}\right),$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v_1} = \frac{\omega^{-1}\omega_2^{\mu}\omega_3^{1-\mu}}{\omega_1\omega_2\omega_3}\cdot\left(-\omega_2\omega_3\frac{\partial \omega_1}{\partial v_1} + \mu\omega_1\omega_3\frac{\partial \omega_2}{\partial v_1} + (1-\mu)\omega_1\omega_2\frac{\partial \omega_3}{\partial v_1}\right).$$

Da $\left(\frac{\partial \Omega}{\partial u_1}\right)_{v_i = u_i} = \varrho \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v_1}\right)_{v_i = u_i}$ sein soll, so muß stattfinden:

$\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial u_1}\right)_{v_i = u_i} = \varrho \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial v_1}\right)_{v_i = u_i}$, oder, da für $i = 1$ in ω_i:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial u_1} = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial v_1} = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3$$

und

$$\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial u_1}\right)_{v_i = u_i} = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3$$

$$\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial v_1}\right)_{v_i = u_i} = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3$$

$$(a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3) = \varrho\,(a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3).$$

Hieraus $\varrho = 1$; $a_{21} = a_{12}$; $a_{31} = a_{13}$.

Für

$$\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial u_1}\right)_{v_i = u_i} = \varrho \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial v_1}\right)_{v_i = u_i} \text{ und } \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial u_1}\right)_{v_i = u_i} = \varrho \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial v_1}\right)_{v_i = u_i}$$

folgt analog

$$\beta_{21} = \beta_{12} \quad \text{und} \quad \gamma_{21} = \gamma_{12}$$
$$\beta_{31} = \beta_{13} \qquad \gamma_{31} = \gamma_{13}.$$

Wir haben nun ferner:

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial u_2}\right)_{v_i = u_i} = \varrho \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v_2}\right)_{v_i = u_i} \text{ und } \left(\frac{\partial \Omega}{\partial u_3}\right)_{v_i = u_i} = \varrho \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v_3}\right)_{v_i = u_i}.$$

Wie vorher muß stattfinden:

$$\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial u_2}\right)_{v_i = u_i} = \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial v_2}\right)_{v_i = u_i} \text{ und } \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial u_3}\right)_{v_i = u_i} = \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial v_3}\right)_{v_i = u_i} \qquad (\varrho = 1).$$

Für $i = 1$ in ω_i folgt:

$$a_{12}u_2 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 \equiv a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3.$$

Hieraus $a_{12} \equiv a_{21}$; analog folgt für $i = 2, 3$:

$$a_{32} \equiv a_{23}$$

$$\beta_{12} \equiv \beta_{21} \quad \text{und} \quad \gamma_{12} \equiv \gamma_{21}.$$
$$\beta_{32} \equiv \beta_{23} \qquad \gamma_{32} \equiv \gamma_{23}$$

Ferner: $a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3 \equiv a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3$.

Diese letzte Bedingung ist schon erfüllt, wenn nach dem Vorhergehenden $a_{13} \equiv a_{31}$, $a_{23} \equiv a_{32}$ angenommen wurde.

Damit eine sich selbst entsprechende Kurve existiert, müssen also unsere Korrelationen gegeben sein durch das System der Koeffizienten:

$$\begin{array}{lll} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} & \beta_{11}\ \beta_{12}\ \beta_{13} & \gamma_{11}\ \gamma_{12}\ \gamma_{13} \\ a_{12}\ a_{22}\ a_{23} & \beta_{12}\ \beta_{22}\ \beta_{23} & \gamma_{12}\ \gamma_{22}\ \gamma_{23} \\ a_{13}\ a_{23}\ a_{33} & \beta_{13}\ \beta_{23}\ \beta_{33} & \gamma_{13}\ \gamma_{23}\ \gamma_{33}. \end{array}$$

Schreiben wir für $a_{11} = a_1$, $a_{12} = a_2$, $a_{13} = a_3$, $a_{22} = a_4$, $a_{23} = a_5$, $a_{33} = a_6$ etc., so müssen die Korrelationen lauten:

$$\begin{array}{ll} \varrho x_1 = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 & \varrho y_1 = \beta_1u_1 + \beta_2u_2 + \beta_3u_3 \\ \varrho x_2 = a_2u_1 + a_4u_2 + a_5u_3 & \varrho y_2 = \beta_2u_1 + \beta_4u_2 + \beta_5u_3 \\ \varrho x_3 = a_3u_1 + a_5u_2 + a_6u_3 & \varrho y_3 = \beta_3u_1 + \beta_5u_2 + \beta_6u_3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \varrho z_1 &= \gamma_1u_1 + \gamma_2u_2 + \gamma_3u_3 \\ \varrho z_2 &= \gamma_2u_1 + \gamma_4u_2 + \gamma_5u_3 \\ \varrho z_3 &= \gamma_3u_1 + \gamma_5u_2 + \gamma_6u_3. \end{aligned}$$

Nur ein durch solche Korrelationen definiertes Nullsystem besitzt sich selbst entsprechende Kurven und zwar lautet deren Gleichung:

$$\begin{aligned} &[(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3)u_1 + (a_2u_1 + a_4u_2 + a_5u_3)u_2 + (a_3u_1 + \\ &\qquad + a_5u_2 + a_6u_3)u_3]^{-1} \cdot \\ &\cdot[(\beta_1u_1 + \beta_2u_2 + \beta_3u_3)u_1 + (\beta_2u_1 + \beta_4u_2 + \beta_5u_3)u_2 + (\beta_3u_1 + \\ &\qquad + \beta_5u_2 + \beta_6u_3)u_3]^{\mu} \cdot \\ &\cdot[(\gamma_1u_1 + \gamma_2u_2 + \gamma_3u_3)u_1 + (\gamma_2u_1 + \gamma_4u_2 + \gamma_5u_3)u_2 + (\gamma_3u_1 + \\ &\qquad + \gamma_5u_2 + \gamma_6u_3)u_3]^{1-\mu} = C. \end{aligned}$$

Schreiben wir für die [ ]-Ausdrücke u_α, bzw. u_β, u_γ, so lautet die Gleichung: $u_\alpha^{-1} \cdot u_\beta^{\mu} \cdot u_\gamma^{1-\mu} = C$.

Die dadurch dargestellten Kurven wollen wir „Verallgemeinerte W-Kurven“ nennen. Sie sind insbesondere algebraisch, wenn μ eine rationale Zahl ist.

Im § 13 der Abhandlung zeigen wir nun noch, daß ein durch allgemeinste Korrelationen definiertes Nullsystem auf das durch die obigen besonderen Korrelationen definierte System zurückgeführt werden kann. Ferner zeigen wir, daß der Connex (1, 4) und das durch allgemeine Korrelationen bestimmte Nullsystem identisch sind. Damit ist aber dann der Beweis erbracht, daß die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für die Integralkurven des Connexes (1, 4) in der Form erscheinen muß: $u_\alpha^{-1} \cdot u_\beta^{\mu} \cdot u_\gamma^{1-\mu} = C$.

Als spezieller Fall ist darin die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $F_1(u, v)\, du + F_2(u, v)\, dv = 0$,

worin F_1 und F_2 allgemeine rationale ganze Funktionen 4. Grades bedeuten, enthalten.

Ehe wir diesen Beweis führen, wollen wir an 2 Beispielen die Richtigkeit der bisherigen Betrachtungen prüfen.

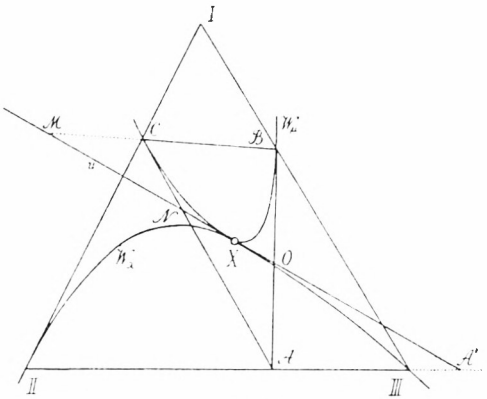
§ 9. Beispiele.

1.

In meiner Dissertation habe ich folgenden Satz über die W-Kurven bewiesen: Gibt man sich auf den 3 Seiten des Fundamentaldreiecks drei Projektivitäten, welche ihre Doppelpunkte in den Ecken dieses Dreiecks haben, konstruiert zu den Schnittpunkten jeder Tangente einer W-Kurve (die durch den Connex (1, 1) bestimmt sei) das vermöge der drei Projektivitäten bestimmte $\triangle ABC$, so ist das D.V. des Berührungspunktes der Tangente und deren drei Schnittpunkten mit den Seiten dieses Dreiecks konstant: $(MNOX) = \text{Konst.} = \mu$.

I, II, III Koordinatendreieck, W_λ eine W-Kurve des Connexes (1, 1) mit dem D.V. $\lambda = \dfrac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3}$, u Tangente von W_λ,

der das $\triangle ABC$ entsprechen möge. Im $\triangle ABC$ ist alsdann eine W-Kurve W_μ vorhanden, welche W_λ gleichfalls im Berührpunkt X von u berührt. Wenn wir also die B.T. für dieses System der Projektivitäten (spezieller Fall von Korrelationen; dieselben sind ausgeartet) aufstellen[1]), dann müssen die sich selbst entsprechenden Kurven, falls solche existieren, mit den ursprünglichen W-Kurven W_λ identisch sein. Wir können auch sagen: Die W-Kurven W_μ müssen als Enveloppe die W-Kurven W_λ heben.



Figur 3.

Die allgemeinen Korrelationen, welche die Dreiecke ABC bestimmen, gehen für den Fall der vorliegenden Projektivitäten über in:

$$\begin{array}{lll} \varrho x_1 = 0 & \varrho y_1 = \beta_{13} u_3 & \varrho z_1 = \gamma_{12} u_2 \\ A\colon\ \varrho x_2 = a_{23} u_3 & B\colon\ \varrho y_2 = 0 & C\colon\ \varrho z_2 = \gamma_{21} u_1 \\ \varrho x_3 = a_{32} u_2 & \varrho y_3 = \beta_{31} u_1 & \varrho z_3 = 0. \end{array}$$

Bezeichnen wir den Schnittpunkt von u und II III mit A', so ist offenbar Punktreihe $A' \overline{\wedge}$ Punktreihe A, denn wir haben ein umkehrbar eindeutiges Entsprechen. Für $u_3 = 0$ wird $x_2 = 0$ d. h. A und A' fallen zusammen in III. Für $u_2 = 0$ wird $x_3 = 0$ d. h. A und A' fallen zusammen in II. III und II sind also die

[1]) Wobei also X durch den gegebenen Connex (1, 1) bestimmt ist und damit μ.

Doppelpunkte der Projektivität. Analoges gilt für die Punkte B, B' und C, C'. Die B.T. wird nun dargestellt durch die Gleichung:

$$\Omega \equiv (a_{23}u_3v_2 + a_{32}u_2v_3)^{-1}(\beta_{13}u_3v_1 + \beta_{31}u_1v_3)^{\mu} \cdot \\ \cdot (\gamma_{12}u_2v_1 + \gamma_{21}u_1v_2)^{1-\mu} - C = 0.$$

Sich selbst entsprechende Kurven sind nur vorhanden, wenn

$$a_{23} = a_{32} = a;\ \beta_{13} = \beta_{31} = \beta;\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma,$$

$$(\Omega)_{v_i = u_i} \equiv (2a)^{-1} \cdot (2\beta)^{\mu} \cdot (2\gamma)^{1-\mu} \cdot (u_2u_3)^{-1} \cdot (u_1u_3)^{\mu} \cdot \\ \cdot (u_1u_2)^{1-\mu} - C = 0 \qquad \text{oder}$$

$$u_1^{-1}u_2^{\mu} \cdot u_3^{1-\mu} = \left(\frac{C}{(2a)^{-1} \cdot (2\beta)^{\mu} \cdot (2\gamma)^{1-\mu}}\right)^{-1} = C'.$$

Nun wissen wir aber, daß wir auf die W-Kurven W_λ des Connexes (1, 1) gelangen müssen, und diese haben die Gleichung:

$$u_1^{-1} \cdot u_2^{\lambda}u_3^{1-\lambda} = \text{Konst.} \qquad \left(\lambda = \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3}\right).$$

Leicht läßt sich nachweisen, daß $\mu = \lambda$.

Auf S. 247 ist die Formel für μ angegeben. Wir berechnen μ zunächst für den Fall der oben angegebenen allgemeinen Projektivitäten ($a_{23} \neq a_{32}$ etc.) und zwar berechnen wir für sich μ_1 und μ_2.

Es ist im vorliegenden Falle:

$$\begin{array}{lll} f_1 = 0 & g_1 = \beta_{13}u_3 & h_1 = \gamma_{12}u_2 \\ f_2 = a_{23}u_3 & g_2 = 0 & h_2 = \gamma_{21}u_1 \\ f_3 = a_{32}u_2 & g_3 = \beta_{31}u_2 & h_3 = 0, \end{array}$$

$$u_f = u_2a_{23}u_3 + u_3a_{32}u_2 = u_2u_3(a_{23} + a_{32}) \\ u_g = u_1\beta_{13}u_3 + u_3\beta_{31}u_1 = u_1u_3(\beta_{13} + \beta_{31}) \\ u_h = u_1\gamma_{12}u_2 + u_2\gamma_{21}u_1 = u_1u_2(\gamma_{12} + \gamma_{21}),$$

$$(g_2h_2) = \begin{vmatrix} g_2 & h_2 \\ u_g & u_h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \gamma_{21}u_1 \\ u_g & u_h \end{vmatrix} = -\gamma_{21}u_1^2u_3(\beta_{13} + \beta_{31})$$

$$(g_1h_1) = \begin{vmatrix} \beta_{13}u_3 & \gamma_{12}u_2 \\ u_g & u_h \end{vmatrix} = u_1u_2u_3(\beta_{13}\gamma_{21} - \gamma_{12}\beta_{31})$$

$$(h_2f_2) = \begin{vmatrix} \gamma_{31}u_1 & a_{23}u_3 \\ u_h & u_f \end{vmatrix} = u_1u_2u_3(\gamma_{21}a_{32} - \gamma_{12}a_{23})$$

$$(h_1f_1) = \begin{vmatrix} \gamma_{12}u_2 & 0 \\ u_h & u_f \end{vmatrix} = \gamma_{12}u_2^2u_3(a_{23} + a_{32}).$$

Somit $\mu_1 = -\frac{u_y}{u_f} = -\frac{u_1}{u_2}\frac{\beta_{13}+\beta_{31}}{\alpha_{23}+\alpha_{32}}$,

$$\mu_2 = \frac{X_1(g_2h_2) - X_2(g_1h_1)}{X_1(h_2f_2) - X_2(h_1f_1)}.$$

Für den Connex (1, 1) ist:

$$\varrho X_1 = u_2u_3(k_3 - k_2)$$
$$\varrho X_2 = u_1u_3(k_1 - k_3) \qquad \text{(siehe S. 235).}$$
$$\varrho X_3 = u_1u_2(k_2 - k_1)$$

Dann wird

$$u_2 = \frac{-u_2u_3(k_3-k_2)\gamma_{21}(\beta_{13}+\beta_{31})u_1^2u_3 - u_1u_3(k_1-k_3)u_1u_2u_3(\beta_{13}\gamma_{21}-\gamma_{12}\beta_{31})}{u_2u_3(k_3-k_2)u_1u_2u_3(\gamma_{21}\alpha_{32}-\gamma_{12}\alpha_{23}) - u_1u_3(k_1-k_3)\gamma_{12}u_2^2u_3(\alpha_{23}+\alpha_{32})}.$$

Dividieren wir Zähler und Nenner durch $u_1u_2u_3^2$ und durch $-(k_2 - k_3)$, so erhalten wir:

$$\mu_2 = -\frac{u_1}{u_2}\cdot\frac{\gamma_{21}(\beta_{13}+\beta_{31}) - \lambda(\beta_{13}\gamma_{21}-\gamma_{12}\beta_{31})}{(\gamma_{21}\alpha_{32}-\gamma_{12}\alpha_{23}) + \lambda\gamma_{12}(\alpha_{23}+\alpha_{32})}.$$

Es wird

$$\mu = \frac{\beta_{13}+\beta_{31}}{\alpha_{23}+\alpha_{32}}\cdot\frac{(\gamma_{21}\alpha_{32}-\gamma_{12}\alpha_{23}) + \lambda\gamma_{12}(\alpha_{23}+\alpha_{32})}{\gamma_{21}(\beta_{13}+\beta_{31}) - \lambda(\beta_{13}\gamma_{21}-\gamma_{12}\beta_{31})} = \text{Konst.}$$

μ ist also konstant, womit der zu Anfang dieses Paragraphen erwähnte Satz über die W-Kurven neuerdings bewiesen ist.

Haben wir nun gewählt: $\alpha_{23} = \alpha_{32} = \alpha$; $\beta_{13} = \beta_{31} = \beta$; $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma$, so daß also unsere B.T. sich selbst entsprechende Kurven haben muß, so wird

$$\mu = \frac{2\beta}{2\alpha}\cdot\frac{0 + \lambda\gamma\cdot 2\alpha}{\gamma\cdot 2\beta - 0} = \lambda.$$

Wir bekommen als Integralkurven eben die Kurven W_λ:

$$u_1^{-1}\cdot u_2^{\lambda}\cdot u_3^{1-\lambda} = C',$$

wie wir dies erwarten mußten.

Die Korrelationen müssen in diesem Falle sein:

$\varrho x_1 = 0$		$\varrho' x_1 = 0$;	$\varrho'' y_1 = u_3$;	$\varrho''' z_1 = u_2$
$\varrho x_2 = \alpha u_3$	oder	$\varrho' x_2 = u_3$;	$\varrho'' y_2 = 0$;	$\varrho''' z_2 = u_1$
$\varrho x_3 = \alpha u_2$		$\varrho' x_3 = u_2$;	$\varrho'' y_3 = u_2$;	$\varrho''' z_3 = 0$.

An diesem ersten Beispiel erweist sich die Richtigkeit unserer Betrachtungen.

Wir können hier noch folgende Überlegung anstellen:

Die Projektivitäten seien allgemeiner gegeben ($a_{23} \neq a_{32}$ etc.), also wie auf S. 253. Wir wissen, daß keine E_W[1]) vorhanden ist. Zum gegebenen Connex (1, 1) existieren jedoch die Integralkurven: $u_1^{-1} u_2^{\lambda} u_3^{1-\lambda} = C$. Nach den zu Anfang des § 3 angestellten Betrachtungen würde folgen, daß auch im vorliegenden Falle eine E_W vorhanden sein muß, denn zu jeder Tangente u einer W_λ ist eine W_μ festgelegt. Beide haben denselben Berührpunkt X gemeinsam. Die W_μ müßten W_λ zur Enveloppe haben können. Dies ist jedoch nicht der Fall. Wir können den Widerspruch leicht klären:

Die Gleichung einer W_u für ein bestimmtes u von W_λ lautet:

$$\Omega = (a_{23} u_3 v_2 + a_{32} u_2 v_3)^{-1} \cdot (\beta_{13} u_3 v_1 + \beta_{31} u_1 v_3)^{\mu} \cdot \\ \cdot (\gamma_{12} u_2 v_1 + \gamma_{21} u_1 v_2)^{1-\mu} - C' = 0.$$

Soll Ω eine B.T. vermitteln, dann darf sich C' nicht ändern, wenn u W_λ durchläuft[2]). Die E_W würden wir erhalten, wenn $v_i = u_i$ gesetzt wird:

$$(a_{23} + a_{32})^{-1} \cdot (\beta_{13} + \beta_{31})^{\mu} \cdot (\gamma_{12} + \gamma_{21})^{1-\mu} \cdot u_1^{1} \cdot u_2^{-\mu} \cdot u_3^{-1+\mu} = C$$

oder $$C' = \frac{(a_{23} + a_{32})^{-1} \cdot (\beta_{13} + \beta_{31})^{\mu} \cdot (\gamma_{12} + \gamma_{21})^{1-\mu}}{u_1^{-1} \cdot u_2^{\mu} \cdot u_3^{1-\mu}}.$$

Wenn nun die u_i in Ω aus $W_\lambda = u_1^{-1} \cdot u_2^{\lambda} \cdot u_3^{1-\lambda} = C$ stammen, so hat $u_1^{-1} \cdot u_2^{\mu} \cdot u_3^{1-\mu}$ und deshalb C' für jedes u einen anderen Wert, so lange nicht $\mu = \lambda$. Dies ist aber nur der Fall, wenn $a_{23} = a_{32}$ etc. Die Gleichung $\Omega = 0$ definiert aber keine B.T., wenn C' sich für jedes u ändert.

Weiter erkennen wir: Die durch allgemeine Projektivitäten (vgl. S. 253) definierte Hauptcoincidenz können wir durch ein gleichwertiges System festlegen, nämlich wenn

$$\begin{array}{lll} a_{23} = a_{32} & \beta_{13} = \beta_{31} & \gamma_{12} = \gamma_{21} \\ = \alpha = 1 & = \beta = 1 & = \gamma = 1 \end{array}$$

angenommen wird.

---

[1]) Die sich selbst entsprechenden Kurven wollen wir von nun ab E_W nennen = Enveloppe der W-Kurven.

[2]) Siehe S. 241 unten und S. 249 Mitte.

Dann aber ist eine E_W vorhanden.

Wir können daher vermuten, daß auch die durch allgemeine Korrelationen und D_μ bestimmte Hauptcoincidenz durch ein besonderes System von Korrelationen gleichfalls vermittelt werden kann, eben jener, welche die E_W liefern.

2.

Geben wir uns die 3 Korrelationen in folgender spezieller Form:

$$1) \qquad \begin{array}{lll} \varrho x_1 = 0 & \varrho y_1 = u_1 & \varrho z_1 = u_1 \\ \varrho x_2 = u_2 & \varrho y_2 = 0 & \varrho z_2 = u_2 \\ \varrho x_3 = u_3 & \varrho y_3 = u_3 & \varrho z_3 = 0. \end{array}$$

Gegeben außerdem D.V. μ.

Dadurch sind wohl auch Projektivitäten auf den Seiten des Koordinatendreiecks gegeben; deren Doppelpunkte fallen aber nicht mehr mit den Ecken zusammen wie in Beispiel 1. Wir haben ein spezielles Nullsystem 5. Grades vor uns, dessen E_W bestimmt werden soll. Deren Existenz ist ohne weiteres klar, denn die Koeffizienten obiger Korrelationen erfüllen die Relation S. 251. Die Gleichung für die B.T. lautet:

$$2) \qquad \Omega = \underset{\omega_1}{(u_2 v_2 + u_3 v_3)^{-1}} \cdot \underset{\omega_2}{(u_1 v_1 + u_3 v_3)^{\mu}} \cdot \underset{\omega_3}{(u_1 v_1 + u_2 v_2)^{1-\mu}} - C = 0$$

Dann hat die E_W die Gleichung:

$$3) \qquad E_W = \underset{u_\alpha}{(u_2^2 + u_3^2)^{-1}} \cdot \underset{u_\beta}{(u_1^2 + u_3^2)^{\mu}} \cdot \underset{u_\gamma}{(u_1^2 + u_2^2)^{1-\mu}} - C = 0$$

Wenn wir nun den durch die Gleichungen 1) und D.V.$_\mu$ bestimmten Connex aufstellen und seine Integralkurven ermitteln, so müssen diese mit den Kurven E_W identisch sein. Oder wir können auch so sagen: wenn wir obige Gleichung E_W total differenzieren und ferner die Differentialgleichung für die Integralkurven des Connexes herstellen, so muß sich ein und dieselbe Differentialgleichung ergeben. Der zugehörige Connex habe die Gleichung:

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 = 0.$$

Seine Differentialgleichung lautet (S. 238):

$$4)\quad (f_2 u_3 - f_3 u_2)\,du_1 + (f_3 u_1 - f_1 u_3)\,du_2 + (f_1 u_2 - f_2 u_1)\,du_3 = 0.$$

Die Hauptcoincidenz des Connexes bestimmt sich aus den Gleichungen:

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 = 0 \text{ und}$$
$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

zu:

$$\varrho X_1 = f_2 u_3 - f_3 u_2$$
$$\varrho X_2 = f_3 u_1 - f_1 u_3$$
$$\varrho X_3 = f_1 u_2 - f_2 u_1.$$

Deshalb können wir die Differentialgleichung auch schreiben:

$$X_1\,du_1 + X_2\,du_2 + X_3\,du_3 = 0.$$

Die Differentialgleichung der E_W lautet:

$$5)\quad \frac{\partial E_W}{\partial u_1}\,du_1 + \frac{\partial E_W}{\partial u_2}\,du_2 + \frac{\partial E_W}{\partial u_3}\,du_3 = 0.$$

Differentialgleichung 4) und 5) sind identisch, wenn:

$$6)\quad \varrho \frac{\partial E_W}{\partial u_1} = X_1;\quad \varrho \frac{\partial E_W}{\partial u_2} = X_2;\quad \varrho \frac{\partial E_W}{\partial u_3} = X_3.$$

Nun sind die Koordinaten X_i für die Hauptcoincidenz nach S. 247:

$$\begin{pmatrix} u_f = u_\alpha; & u_g = u_\beta; & u_h = u_\gamma \\ f_i = x_i: & g_i = y_i; & h_i = z_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\varrho X_1 &= \mu(u_2^2 + u_3^2)(u_1^2 + u_2^2)\cdot u_1 + (1-\mu)(u_2^2 + u_3^2)(u_1^2 + u_3^2)u_1 \\
&= u_1(u_2^2 + u_3^2)\left[u_1^2 + \mu u_2^2 + (1-\mu)u_3^2\right] \\
\varrho X_2 &= u_2(u_1^2 + u_3^2)\left[u_1^2 + \mu u_2^2 + (1-\mu)u_3^2\right] \\
\varrho X_3 &= u_3(u_1^2 + u_2^2)\left[u_1^2 + \mu u_2^2 + (1-\mu)u_3^2\right]
\end{aligned}$$

oder

$$\varrho' X_1 = u_1(u_2^2 + u_3^2)$$
$$\varrho' X_2 = u_2(u_1^2 + u_3^2)$$
$$\varrho' X_3 = u_3(u_1^2 + u_2^2).$$

Halten wir folgendes scharf auseinander:

a) Die Kurven E_W sind gefunden lediglich aus der B.T., ohne daß von der Hauptcoincidenz X die Rede war oder diese verwendet wurde.

b) X_i wurde unabhängig von der B.T. als Hauptcoincidenz des durch Gleichungen 1) definierten Nullsystems oder Connexes berechnet.

Es ist nun:

$$E_W = (u_2^2 + u_3^2)^{-1} \cdot (u_1^2 + u_3^2)^{\mu} (u_1^2 + u_2^2)^{1-\mu} - C = 0,$$

$$\frac{\partial E_W}{\partial u_1} = C \cdot \left[\frac{\mu (u_1^2 + u_3^2)^{\mu-1} \cdot 2 u_1}{(u_1^2 + u_3^2)^{\mu}} + \frac{(1-\mu)(u_1^2 + u_2^2)^{-\mu} \cdot 2 u_1}{(u_1^2 + u_2^2)^{1-\mu}} \right] =$$

$$= C \cdot 2 u_1 \left[\frac{\mu}{u_1^2 + u_3^2} + \frac{1-\mu}{u_1^2 + u_2^2} \right] =$$

$$= \frac{C \cdot 2 u_1}{(u_1^2 + u_3^2)(u_1^2 + u_2^2)} \cdot [\mu u_1^2 + \mu u_2^2 + u_1^2 - \mu u_1^2 + (1-\mu) u_3^2] =$$

$$= \frac{2C}{(u_1^2 + u_3^2)(u_1^2 + u_2^2)(u_2^2 + u_3^2)} \cdot u_1 (u_2^2 + u_3^2) [u_1^2 + \mu u_2^2 + (1-\mu) u_3^2].$$

In der Tat hat sich ergeben, wenn wir die Faktoren

$$\frac{2C}{(u_1^2 + u_3^2)(u_1^2 + u_2^2)(u_2^2 + u_3^2)}$$

und [. . .] in ϱ einbeziehen:

$$\varrho \frac{\partial E_W}{\partial u_1} = X_1.$$

Ebenso ergibt sich: $\varrho \dfrac{\partial E_W}{\partial u_2} = X_2$

$$\varrho \frac{\partial E}{\partial u_3} = X_3.$$

Auch aus diesem Beispiel erkennen wir die Richtigkeit unserer Überlegungen.

§ 10. Beweis, daß die E_W einer nach S. 251 definierten Berührungstransformation mit den Integralkurven des dazu gehörigen Connexes identisch sind.

Sind 3 Korrelationen bestimmt durch das auf S. 251 angegebene System der Koeffizienten:

$$\varrho x_1 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 \quad \varrho' y_1 = \ldots \quad \varrho'' z_1 = \ldots$$
$$\varrho x_2 = a_2 u_1 + a_4 u_2 + a_5 u_3 \quad \varrho' y_2 = \ldots \quad \varrho'' z_2 = \ldots$$
$$\varrho x_3 = a_3 u_1 + a_5 u_2 + a_6 u_3 \quad \varrho' y_3 = \ldots \quad \varrho'' z_3 = \ldots,$$

so hat die E_W die Gleichung:

$$E_W = u_\alpha^{-1} \cdot u_\beta^{\mu} \cdot u_\gamma^{1-\mu} - C = 0,$$

worin z. B. $u_\alpha = (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) u_1 + (a_2 u_1 + a_4 u_2 + a_5 u_3) u_2 + (a_3 u_1 + a_5 u_2 + a_6 u_3) u_3$.

Wenn die Kurven E_W identisch sein sollen mit den Integralkurven des zugehörigen Connexes, so muß wie in Beispiel 2 von § 9 sein:

$$\sigma \frac{\partial E_W}{\partial u_i} = X_i .$$

Nun ist:

$$\frac{\partial E_W}{\partial u_1} = C \cdot \left(- \frac{u_\alpha^{-2}}{u_\alpha^{-1}} \cdot \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_1} + \mu \cdot \frac{u_\beta^{\mu-1}}{u_\beta^{\mu}} \cdot \frac{\partial u_\beta}{\partial u_1} + (1-\mu) \cdot \frac{u_\gamma^{-\mu}}{u_\gamma^{1-\mu}} \cdot \frac{\partial u_\gamma}{\partial u_1} \right) =$$

$$= C \left(- \frac{1}{u_\alpha} \cdot \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_1} + \mu \frac{1}{u_\beta} \cdot \frac{\partial u_\beta}{\partial u_1} + (1-\mu) \frac{1}{u_\gamma} \frac{\partial u_\gamma}{\partial u_1} \right) =$$

$$= \frac{C}{u_\alpha u_\beta u_\gamma} \left(- u_\beta u_\gamma \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_1} + \mu u_\alpha u_\gamma \frac{\partial u_\beta}{\partial u_1} + (1-\mu) u_\alpha u_\beta \frac{\partial u_\gamma}{\partial u_1} \right),$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial u_1} = 2 a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 2 (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) = 2 \varrho x_1 .$$

Analog: $\frac{\partial u_\beta}{\partial u_1} = 2 \varrho' y_1 \qquad \frac{\partial u_\gamma}{\partial u_1} = 2 \varrho'' z_1 .$

Es wird also, wenn wir innerhalb obiger Klammer umstellen:

$$\frac{\partial E_W}{\partial u_1} = \frac{2C}{u_\alpha u_\beta u_\gamma} \cdot (\mu u_\alpha u_\gamma \varrho' y_1 + (1-\mu) u_\alpha u_\beta \varrho'' z_1 - u_\beta u_\gamma \varrho x_1) .$$

Der Klammerausdruck ist aber nach S. 247 die Koordinate X_1 für die Hauptcoincidenz. Analog berechnen sich $\frac{\partial E_W}{\partial u_2}$ und $\frac{\partial E_W}{\partial u_3}$.

Somit ist gezeigt: $\sigma \frac{\partial E_W}{\partial u_i} = X_i$.

Die Differentialgleichung der E_W lautet:

$$\frac{\partial E_W}{\partial u_1} d u_1 + \frac{\partial E_W}{\partial u_2} d u_2 + \frac{\partial E_W}{\partial u_3} d u_3 = 0 .$$

Die Differentialgleichung des Connexes lautet:

$$X_1 d u_1 + X_2 d u_2 + X_3 d u_3 = 0 \text{ (s. S. 258).}$$

Wir haben erkannt, daß beide Differentialgleichungen identisch sind; es sind daher auch ihre Integralkurven identisch.

§ 11. Geometrische Deutung der Ausdrücke u_α, u_β, u_γ in der allgemeinen Lösung $u_\alpha^{-1} \cdot u_\beta^{\mu} \cdot u_\gamma^{1-\mu} = C$.

Es ist ohne weiteres klar, daß $u_\alpha = 0$, $u_\beta = 0$, $u_\gamma = 0$ partikuläre Lösungen darstellen[1]).

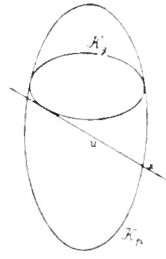
$$u_\alpha = (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3)\, u_1 + (a_2 u_1 + a_4 u_2 + a_5 u_3)\, u_2 + \\ + (a_3 u_1 + a_5 u_2 + a_6 u_3)\, u_3 .$$

$u_\alpha = 0$ stellt einen Kegelschnitt vor und es ist leicht einzusehen, daß dieser Kegelschnitt der Geraden-Kernkegelschnitt der durch die Koeffizienten a bestimmten Korrelation ist. Diese Korrelation lautet:

$$\varrho x_1 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$$
$$\varrho x_2 = a_2 u_1 + a_4 u_2 + a_5 u_3$$
$$\varrho x_3 = a_3 u_1 + a_5 u_2 + a_6 u_3 .$$

Im allgemeinen besitzt eine Korrelation einen Geraden- und einen Punktkern-Kegelschnitt K_g und K_p, welche die bekannte Lage haben:

Auf den Tangenten u von K_g liegen die zugeordneten Punkte x von K_p (Fig. 4).



Figur 4.

Soll x auf der Geraden u liegen, so muß sein:

$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$, d. h. $u_\alpha = 0$.

$u_\alpha = 0$ ist also die Gleichung von K_g. In obiger Korrelation fallen aber K_g und K_p zusammen, d. h. wir haben ein Polarsystem; denn der Berührpunkt x einer Tangente u von $u_\alpha = 0$ ist gegeben durch:

$$\varrho x_1 = \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_1} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$$

$$\varrho x_2 = \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_2} = a_2 u_1 + a_4 u_2 + a_5 u_3$$

$$\varrho x_3 = \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_3} = a_3 u_1 + a_5 u_2 + a_6 u_3 .$$

Dies sind aber eben die Koordinaten des Punktes x, der einem u vermöge der Korrelation entspricht.

---

[1]) $C = 0$!

Die Ecken der Am. Dreiecke sind also so bestimmt, daß in 3 Polarsystemen mit den Kegelschnitten $u_\alpha = 0$, $u_\beta = 0$, $u_\gamma = 0$ zu einer Geraden u die Pole in bezug auf diese drei Kegelschnitte bestimmt werden.

X ist auf u durch das D.V. μ bestimmt: $(MNOX) = \mu$. Für die Tangenten von u_α, u_β oder u_γ geht u durch eine Ecke (x), (y) oder (z) des Am. Dreiecks. Dann fällt aber diese Ecke mit X zusammen (und zwar für jedes μ). Dies bedeutet aber, daß $u_\alpha = 0$, $u_\beta = 0$, $u_\gamma = 0$ zu den Kurven E_W gehören. Damit ist die geometrische Bedeutung dieser partikulären Lösungen klar gelegt.

Wir wollen nun den analytischen Zusammenhang dieser partikulären Lösungen mit dem gegebenen Connex angeben. Die Gleichung desselben sei wieder: $f \equiv f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 = 0$ (f_1, f_2, f_3 vom 4. Grade in u). Dessen Integralkurven[1]) sind nach dem Bisherigen:

$$\Phi \equiv u_\alpha^{-1} \cdot u_\beta^{\mu} \cdot u_\gamma^{1-\mu} = C.$$

Nach Obigem erhalten wir eine partikuläre Lösung, wenn beispielsweise x mit X zusammenfällt. X ist Schnittpunkt von u und f; x entspricht u vermöge der Korrelation.

x fällt mit X zusammen, wenn:

$$f_1 \cdot (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) + f_2 \cdot (a_2 u_1 + a_4 u_2 + a_5 u_3) + f_3 \cdot \\ \cdot (a_3 u_1 + a_5 u_2 + a_6 u_3) = 0,$$

wobei außerdem $u_\alpha = 0$, denn nur für die Tangenten von u_α kommt x auch auf u zu liegen. Somit muß stattfinden:

$$f_1 \cdot (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) + f_2 \cdot (a_2 u_1 + a_4 u_2 + a_5 u_3) + f_3 \cdot \\ \cdot (a_3 u_1 + a_5 u_2 + a_6 u_3) = k_1 \cdot u_\alpha.$$

Hierin bedeutet k_1 eine Funktion 3. Grades in u.

Letztere Beziehung können wir auch schreiben in der Form:

$$f_1 \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_1} + f_2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_2} + f_3 \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_3} = k_1 \cdot u_\alpha{}^2).$$

---

[1]) Wir setzen den im § 13 angeführten Beweis über die Identität des Connexes (1, 4) und des Nullsystems 5. Grades vorerst noch voraus.

[2]) Analoges für u_β und u_γ.

Dies ist die Bedingungsgleichung dafür, daß u_α eine partikuläre Lösung darstellt, ganz in Übereinstimmung mit der von Darboux (s. § 14, S. 274) in ganz anderer Weise abgeleiteten Bedingung. In welcher Weise sie sich zur Auffindung der Integralkurven eignet, soll in dem Beispiel des nächsten Paragraphen gezeigt werden.

Bilden wir noch:

$$f_1 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + f_2 \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + f_3 \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha} \cdot \left(f_1 \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_1} + f_2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_2} + f_3 \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_3} \right) +$$

$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial u_\beta} \cdot \left(f_1 \frac{\partial u_\beta}{\partial u_1} + f_2 \frac{\partial u_\beta}{\partial u_2} + f_3 \frac{\partial u_\beta}{\partial u_3} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial u_\gamma} \left(f_1 \frac{\partial u_\gamma}{\partial u_1} + f_2 \frac{\partial u_\gamma}{\partial u_2} + f_3 \frac{\partial u_\gamma}{\partial u_3} \right) =$$

$$= - u_\alpha^{-2} u_\beta u_\gamma \cdot k_1 u_\alpha + \mu u_\alpha^{-1} \cdot u_\beta^{\mu-1} \cdot u_\gamma \cdot k_2 u_3 + (1-\mu) u_\alpha^{-1} \cdot u_\beta \cdot$$

$$\cdot u_\gamma^{-\mu} \cdot k_3 u_\gamma = \Phi \cdot (-k_1 + \mu k_2 + (1-\mu) k_3).$$

Φ ist das allgemeine Integral, wenn

$$f_1 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + f_2 \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + f_3 \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} = 0,$$

d. h. wenn $-k_1 + \mu k_2 + (1-\mu) k_3 = 0$.

Dieser letzten Beziehung müssen also die Funktionen k_1, k_2 und k_3 ebenfalls noch genügen und dies ist der Fall, wenn

$$k_1 = k_2 = k_3.$$

§ 12. Direkte Lösung der Differentialgleichung:

$$(u_2^2 u_3 - u_3^2 u_2)\, du_1 + (u_3^2 u_1 - u_1^2 u_3)\, du_2 + (u_1^2 u_2 - u_2^2 u_1)\, du_3 = 0$$

auf Grund der abgeleiteten Lösungsform:

$$u_\alpha^{-1} \cdot u_\beta^{\mu} \cdot u_\gamma^{1-\mu} - C = 0.$$

Vorstehende Differentialgleichung ist hervorgegangen aus dem Connex:

$$u_1^2 x_1 + u_2^2 x_2 + u_3^2 x_3 = 0,$$

wobei gesetzt wurde:

$$\varrho x_1 = u_2\, du_3 - u_3\, du_2$$
$$\varrho x_2 = u_3\, du_1 - u_1\, du_3$$
$$\varrho x_3 = u_1\, du_2 - u_2\, du_1.$$

Die Integration in gewöhnlicher Weise ist leicht durchzuführen und soll am Schlusse zum Vergleich herangezogen werden.

Wir wissen, daß die Lösung in der Form $u_\alpha^{-1} \cdot u_\beta^{\mu} u_\gamma^{1-\mu} - C = 0$ erscheinen muß; dabei sind u_α, u_β, u_γ partikuläre Lösungen, welche nach S. 262 der Bedingung genügen:

$$\text{z. B. } f_1 \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_1} + f_2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_2} + f_3 \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_3} = k_1 u_\alpha.$$

In unserem Falle ist $f_i = u_i^2$, folglich ist k_1 eine lineare Funktion:

$$k_1 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3.$$

Es ist

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial u_1} = 2(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3); \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_2} = 2(a_2 u_1 + a_4 u_2 + a_5 u_3);$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial u_3} = 2(a_3 u_1 + a_5 u_2 + a_6 u_3).$$

Somit wird

$$f_1 \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_1} + f_2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_2} + f_3 \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_3} = u_1^2 \cdot 2(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) +$$
$$+ u_2^2 \cdot 2(a_2 u_1 + a_4 u_2 + a_5 u_3) + u_3^2 \cdot 2(a_3 u_1 + a_5 u_2 + a_6 u_3) =$$
$$= 2(a_1 u_1^3 + a_2 u_1^2 u_2 + a_3 u_1^2 u_3 + a_2 u_2^2 u_1 + a_4 u_2^3 + a_5 u_2^2 u_3 +$$
$$+ a_3 u_3^2 u_1 + a_5 u_3^2 u_2 + a_6 u_3^3) \cdot k_1 \cdot u_\alpha = (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) \cdot$$
$$\cdot [(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) u_1 + (a_2 u_1 + a_4 u_2 + a_5 u_3) u_2 +$$
$$+ (a_3 u_1 + a_5 u_2 + a_6 u_3) u_3] = a_1 a_1 u_1^3 + (2 a_2 a_1 + a_1 a_2) u_1^2 u_2 +$$
$$+ (2 a_3 a_1 + a_1 a_3) u_1^2 u_3 + (2 a_2 a_2 + a_4 a_1) u_2^2 u_1 + 2(a_2 a_3 +$$
$$+ a_3 a_2 + a_5 a_1) u_1 u_2 u_3 + (2 a_3 a_3 + a_6 a_1) u_3^2 u_1 + a_4 a_2 u_2^3 +$$
$$+ (2 a_5 a_2 + a_4 a_3) u_2^2 u_3 + (2 a_3 a_3 + a_6 a_2) u_3^2 u_2 + a_6 a_3 u_3^3.$$

Da $f_1 \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_1} + f_2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_2} + f_3 \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_3} = k_1 u_\alpha$, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleichung:

1) $a_1 a_1 = 2 a_1$
2) $2 a_2 a_1 + a_1 a_2 = 2 a_2$ oder $2 a_2 (a_1 - 1) + a_1 a_2 = 0$
3) $2 a_3 a_1 + a_1 a_3 = 2 a_3$ „ $2 a_3 (a_1 - 1) + a_1 a_3 = 0$
4) $2 a_2 a_2 + a_4 a_1 = 2 a_2$ „ $2 a_2 (a_2 - 1) + a_4 a_1 = 0$
5) $2 (a_2 a_3 + a_3 a_2 + a_5 a_1) = 0$
6) $2 a_3 a_3 + a_6 a_1 = 2 a_3$ oder $2 a_3 (a_3 - 1) + a_6 a_1 = 0$
7) $a_4 a_2 = 2 a_4$
8) $2 a_5 a_2 + a_4 a_3 = 2 a_5$ oder $2 a_5 (a_2 - 1) + a_4 a_3 = 0$
9) $2 a_5 a_3 + a_6 a_2 = 2 a_5$ „ $2 a_6 (a_3 - 1) + a_6 a_2 = 0$
10) $a_6 a_3 = 2 a_6$.

Dieses System hat verschiedene Lösungen. Gleichung 1) ist befriedigt für $a_1 = 0$ oder a_1 beliebig, $a_1 = 2$. Würden wir wählen $a_1 \neq 0$, so führt dies letzten Endes auf einen Widerspruch[1]) mit der Beziehung $k_1 = k_2 = k_3$ (s. S. 263). Desgleichen dürften in 7) und 10) a_4 und a_6 nicht beliebig sein.

Gleichungen 1), 7) und 10) sind also befriedigt, wenn $a_1 = a_4 = a_6 = 0$. Aus 2) folgt alsdann:

$$2\,a_2 a_1 = 2\,a_2; \quad a_1 = 1; \quad a_2 \neq 0.$$

In 3): $2\,a_3 = 2\,a_3$; $a_3 \neq 0$; in 6): $2\,a_3 a_3 = 2\,a_3$; $a_3 = 1$; in 8) $2\,a_5 a_2 = 2\,a_5$; $a_2 = 1$; $a_5 \neq 0$.

Zunächst erhalten wir also:

$$u_\alpha = 2\,(a_2 u_1 u_3 + a_3 u_1 u_3 + a_5 u_2 u_3) \text{ und analog}$$
$$u_\beta = 2\,(\beta_2 u_1 u_3 + \beta_3 u_1 u_3 + \beta_5 u_2 u_3)$$
$$u_\gamma = 2\,(\gamma_2 u_1 u_3 + \gamma_3 u_1 u_3 + \gamma_5 u_2 u_3),$$

wobei noch gilt nach Gleichung 5):

$$a_2 + a_3 + a_5 = 0$$
$$\beta_2 + \beta_\beta + \beta_5 = 0$$
$$\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_5 = 0.$$

Ferner ist $k_1 = k_2 = k_3 = u_1 + u_2 + u_3$.

Zur Bestimmung der noch unbestimmten Koeffizienten a_2, a_3, a_5; β_2, β_3, β_5; γ_2, γ_3, γ_5 haben wir weiter die auf S. 247 angegebenen fundamentalen Beziehungen zur Verfügung.

Die X_i berechnen sich aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} u_1^2 x_1 + u_2^2 x_2 + u_3^2 x_3 &= 0 \\ u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ zu } \begin{aligned} \varrho\, X_1 &= u_2 u_3 (u_2 - u_3) \\ \varrho\, X_2 &= u_1 u_3 (u_3 - u_1) \\ \varrho\, X_3 &= u_1 u_2 (u_1 - u_2). \end{aligned}$$

Nach S. 247 ist:

$$\varrho\, X_i = (1 - \mu)\, u_\alpha u_\beta z_i + \mu\, u_\alpha u_\gamma y_i - u_\beta u_\gamma x_i.$$

Folglich muß z. B. sein:

$$(1 - \mu)\, u_\alpha u_\beta z_1 + \mu\, u_\alpha u_\beta y_1 - u_\beta u_\gamma x_1 = u_2 u_3 (u_2 - u_3).$$

Nun ist:

$$\varrho\, x_1 = a_2 u_2 + a_3 u_3; \quad \varrho\, y_1 = \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3; \quad \varrho\, z_1 = \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3.$$

[1]) Eine ausführliche Begründung hiefür ist unterlassen, da sie zu umständlich ist. Die Tatsache der richtigen Lösung möge genügen.

Eingesetzt:

$$u_2[u_\alpha u_\beta \gamma_2(1-\mu) + u_\alpha u_\gamma \beta_2 \mu - u_\beta u_\gamma \alpha_2] +$$
$$+ u_3[u_\alpha u_\beta \gamma_3(1-\mu) + u_\alpha u_\gamma \beta_3 \mu - u_\beta u_\gamma \alpha_3] = u_2 u_3 (u_2 - u_3).$$

Auf der linken Seite der Beziehung muß sich also der Faktor $u_2 u_3$ abspalten lassen, d. h. aus der ersten Klammer muß sich u_3, aus der zweiten u_2 heraussetzen lassen.

Es ist:

$$u_\alpha \cdot u_\beta = 4(u_1^2 u_2^2 \alpha_2 \beta_2 + u_1^2 u_3^2 \alpha_3 \beta_3 + u_2^2 u_3^2 \alpha_5 \beta_5 + u_1^2 u_2 u_3 (\alpha_2 \beta_3 +$$
$$+ \alpha_3 \beta_2) + u_1 u_2^2 u_3 (\alpha_2 \beta_5 + \alpha_5 \beta_2) + u_1 u_2 u_3^2 (\alpha_5 \beta_5 + \alpha_5 \beta_3)).$$

Nur das 1. Glied enthält u_3 nicht,
„ „ 2. - „ u_2 „ .

Zunächst muß also sein:

$$1)\ \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 = 0$$
$$2)\ \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 = 0.$$

$u_\alpha u_\gamma \beta_2$ und $u_\beta u_\gamma \alpha_2$ enthalten dieselben Glieder, die verschwinden müssen. Aus $\varrho X_2 = \ldots = u_1 u_3 (u_3 - u_1)$ würde sich noch ergeben: 3) $\alpha_5 \beta_5 \gamma_5 = 0$. Lösungen dieser drei letzten Beziehungea bilden: $\alpha_2 = \beta_3 = \gamma_5 = 0$. Um 2) zu erfüllen, könnte nicht etwa auch $\alpha_3 = 0$ sein; denn dann wäre wegen $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 = 0$ auch $\alpha_5 = 0$: dies hätte zur Folge, daß

$$\varrho x_1 = \varrho x_2 = \varrho x_3 = 0.$$

Für $\alpha_2 = 0$ folgt aus $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 = 0 : \alpha_3 = -\alpha_5$.
„ $\beta_3 = 0$ „ „ $\beta_2 + \beta_3 + \beta_5 = 0 : \beta_2 = -\beta_5$.
„ $\gamma_3 = 0$ „ „ $\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_5 = 0 : \gamma_2 = -\gamma_3$.

Damit sind die Koeffizienten für die Korrelationen bestimmt und diese lauten also:

$$\varrho x_1 = \alpha_3 u_3 \qquad \varrho' x_1 = u_3 \qquad \varrho'' y_1 = u_2 \qquad \varrho''' z_1 = u_2 - u_3$$
$$\varrho x_2 = -\alpha_3 u_3 \text{ oder } \varrho' x_2 = -u_3 \qquad \varrho'' y_2 = u_1 - u_3 \quad \varrho''' z_2 = u_1$$
$$\varrho x_3 = \alpha_3 u_1 - \alpha_3 u_2 \quad \varrho' x_3 = u_1 - u_2 \quad \varrho'' y_3 = -u_2 \quad \varrho''' z_3 = -u_1.$$

Dann wird $u_\alpha = u_1 u_3 - u_2 u_3 = u_3 (u_1 - u_2)$
$$u_\beta = u_1 u_2 - u_2 u_3 = u_2 (u_1 - u_3)$$
$$u_\gamma = u_1 u_2 - u_1 u_3 = u_1 (u_2 - u_3).$$

Nun wäre noch μ zu bestimmen. Es ergibt sich aber, wenn wir aus den gefundenen Korrelationen X berechnen:

$$\varrho X_1 = (1-\mu)\, u_\alpha u_\beta z_1 + \mu u_\alpha u_\gamma y_1 - u_\beta u_\gamma x_1 =$$
$$= u_2 u_3 (u_2 - u_3) [- u_1 u_2 + u_2 u_3 + \mu u_1 u_3 - \mu u_2 u_3];$$

analog:

$$\varrho X_2 = u_1 u_3 (u_3 - u_1) [\ldots]$$
$$\varrho X_3 = u_1 u_2 (u_1 - u_2) [\ldots].$$

Die Ausführung der Rechnung zeigt, daß der Klammerausdruck immer derselbe wird; wir können ihn also in ϱ einbeziehen; daraus folgt wiederum, daß μ willkürlich gewählt werden kann.

Dies ist auch geometrisch leicht einzusehen:

Das D.V. μ kann nur unbestimmt und daher willkürlich sein, wenn die Am. $\triangle$ immer in Gerade ausarten. Es ist dies der Fall, wenn

$$\varrho z_1 = x_1 + \lambda y_1 = u_3 + \lambda u_2$$
$$\varrho z_2 = x_2 + \lambda y_2 = -u_3 + \lambda (u_1 - u_3)$$
$$\varrho z_3 = x_3 + \lambda y_3 = u_1 - u_2 + \lambda (-u_2).$$

Wir erkennen, daß für $\lambda = -1$ Punkt z hervorgeht. x, y, z liegen also immer in einer Geraden und daher ist das D.V. unbestimmt.

Die allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung lautet mithin:

$$\Phi = [u_3 \cdot (u_1 - u_2)]^{-1} \cdot [u_2 \cdot (u_1 - u_3)]^{\mu} \cdot [u_1 \cdot (u_2 - u_3)]^{1-\mu} = C.$$

Durch Differentiation läßt sich bestätigen, daß $\Phi = C$ wirklich die allgemeine Lösung darstellt. Es ergibt sich nämlich:

$$\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} = u_2 u_3 (u_2 - u_3) \text{ etc.}$$

$u_\alpha = 0$, $u_\beta = 0$, $u_\gamma = 0$ sind partikuläre Lösungen. Auch dies können wir geometrisch bestätigen. Es ist z. B. $u_\alpha = u_3 \cdot (u_1 - u_2) = 0$ ein Polarkegelschnitt, der in die beiden Büschel $u_3 = 0$ und $u_1 - u_2 = 0$ zerfällt. Tatsächlich fallen hiefür x und X immer zusammen.

Zum Vergleich wollen wir nun unsere Differentialgleichung in gewöhnlicher Weise integrieren und zwar nach Forsyth S. 297.

Ist die totale Differentialgleichung $P du_1 + Q du_2 + R du_3 = 0$ gegeben und ist die Integrabilitätsbedingung

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial u_3} - \frac{\partial R}{\partial u_2}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial u_1} - \frac{\partial P}{\partial u_3}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial u_2} - \frac{\partial Q}{\partial u_1}\right) = 0$$

erfüllt, so wird zunächst die Differentialgleichung $P du_1 + Q du_2 = 0$ integriert.

Für unseren Fall ist $P = u_2 u_3 (u_2 - u_3)$; $Q = u_3 u_1 (u_3 - u_1)$; $R = u_1 u_2 (u_1 - u_2)$.

$$P du_1 + Q du_2 \equiv u_2 du_3 (u_2 - u_3) du_1 + u_1 u_3 (u_3 - u_1) du_2 = 0,$$

$$\frac{du_1}{u_1 (u_3 - u_1)} - \frac{du_2}{u_2 (u_3 - u_2)} = 0.$$

Es ist

$$\int \frac{du_1}{u_1 (u_3 - u_1)} = \int \frac{du_1}{u_3 u_1} + \int \frac{du_1}{u_3 (u_3 - u_1)} = \frac{1}{u_3} ln\, u_1 - \frac{1}{u_3} ln\, (u_3 - u_1) +$$

$$+ C = \frac{1}{u_3} ln \frac{u_1}{u_3 - u_1} + C.$$

Somit:

$$\frac{1}{u_3} ln \frac{u_1}{u_3 - u_1} - \frac{1}{u_3} ln \frac{u_2}{u_3 - u_2} = C',$$

oder, da u_3 als konstant zu betrachten ist:

$$ln \frac{u_1}{u_3 - u_1} \cdot \frac{u_3 - u_2}{u_2} = ln\, C''$$

$$u \equiv \frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{u_3 - u_2}{u_3 - u_1} = C''.$$

Nach Forsyth S. 298 bilden wir

$$\frac{\partial u}{\partial u_1} = \frac{u_3 - u_2}{u_2} \cdot \frac{u_3 - u_1 + u_1}{(u_3 - u_1)^2} = \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_3 - u_2}{(u_3 - u_1)^2},$$

$$\lambda P \equiv \lambda u_2 u_3 (u_2 - u_3) = -\frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_2 - u_3}{(u_3 - u_1)^2}; \quad \lambda = -\frac{1}{u_2^2 \cdot (u_3 - u_1)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial u_3} = -\frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{u_1 - u_2}{(u_3 - u_1)^2},$$

$$S = -\frac{1}{u_2^2 (u_3 - u_1)^2} \cdot u_1 u_2 (u_1 - u_2) + \frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{u_1 - u_2}{(u_3 - u_1)^2} = 0.$$

Folglich ist $du = 0$; $u = C$ ist die vollständige Lösung, oder

$$\frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{u_3 - u_2}{u_3 - u_1} = C.$$

Dies ist aber dieselbe Lösung wie die auf S. 267 angegebene. Denn letztere können wir in der Form schreiben:

$$\underbrace{\frac{u_1}{u_3} \cdot \frac{u_2 - u_3}{u_1 - u_2}}_{C_1} \cdot \underbrace{\left(\frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_1 - u_3}{u_2 - u_3}\right)^{\mu}}_{C_2} = C'.$$

Der Faktor C_2 stellt den reziproken Wert von C dar. Ist C_2 konstant, so zeigt sich, daß auch C_1 konstant ist, d. h. C_1 und C_2 bedeuten dieselbe Schar von Kurven. C_2 können wir außerdem in die μ^{te} Potenz erheben und setzen $C_2^{\mu} = C_2'$.

Es ist

$$C_2 = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_1 - u_3}{u_2 - u_3} \quad \text{oder}$$

$$u_2 u_3 - u_1 u_2 = C_2 u_1 u_3 - C_2 u_1 u_2 \quad \text{oder}$$

1) $u_1 u_2 (C_2 - 1) + u_2 u_3 - C_2 u_1 u_3 = 0.$

Ebenso erhalten wir aus

$$C_1 = \frac{u_1}{u_3} \cdot \frac{u_2 - u_3}{u_1 - u_2}.$$

2) $u_1 u_2 + C_1 u_2 u_3 - (C_1 + 1) u_1 u_3 = 0.$

1) und 2) stellen dieselbe Kurvenschar dar, wenn

$\alpha)$ $C_2 - 1 = k$
$\beta)$ $1 = k C_1$
$\gamma)$ $C_2 = k (C_1 + 1)$

$\frac{\alpha)}{\beta)}$: $C_2 - 1 = \frac{1}{C_1}$; $C_2 = \frac{C_1 + 1}{C_1}$

$\frac{\beta)}{\gamma)}$: $C_2 = \frac{C_1 + 1}{C_1}$.

Ist also C_1 konstant, dann ist auch C_2 konstant und umgekehrt.

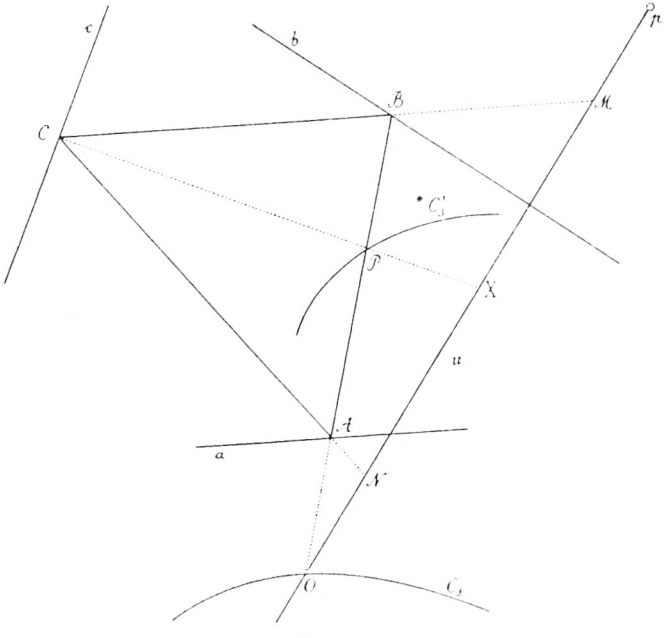
§ 13. Zum allgemeinen Connex (1,4) kann das allgemeine Nullsystem 5. Grades, bestimmt durch drei allgemeine Korrelationen und D.V. μ, so konstruiert werden, daß die Hauptcoincidenz des Connexes und der Nullpunkt des Nullsystems identisch sind[1]).

Gehen wir vom Connex (1,4) aus: $f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 = 0$.

Einem Punkte p entspricht vermöge der Connexgleichung eine allgemeine Kurve 4. Klasse C_u mit der Gleichung: $f_1 p_1 + f_2 p_2 + f_3 p_3 = 0$.

Irgend einer Geraden u durch p ist projektiv eine Tangente u_1 von C_u zugeordnet; C_u bildet einen zu p projektiven Strahlenbüschel 4. Klasse. Der Schnittpunkt von u und u_1 ist der Punkt der Hauptcoincidenz. Die dem Strahlenbüschel p zugeordnete Kurve ist eine allgemeine Kurve 5. Ordnung.

Betrachten wir nun das Nullsystem der Korrelationen.



Figur 5.

[1]) Siehe S. 237.

Die Gerade u möge sich um den Punkt p drehen. Dann bewegt sich Punkt A ($= x$) auf einer Geraden a, die p in der 1. Korrelation entspricht. Ebenso bewegt sich B auf einer Geraden b, C auf einer Geraden c. Seite AB des $\triangle ABC$ beschreibt einen Kegelschnitt, Schnittpunkt O von AB und u liefert eine allgemeine Kurve 3. Ordnung. Da X auf u so bestimmt sein soll, daß $(MNOX) = \mu$, so ist auch das D.V. der 4 Strahlen CB, CA, CO und CP, also $C\,(BAOP) = \mu$, d. h. Punkt P ist auf AB durch eine lineare Beziehung bestimmt; daher beschreibt auch Punkt P eine allgemeine Kurve 3. Ordnung C_3'.

Mithin ist die Enveloppe von CP ($= CX$) eine allgemeine Kurve 4. Klasse. Da nun dieselbe aus den 3 Korrelationen und dem bewußten Zusammenhange mit dem D.V. μ hervorgegangen ist, so müssen sich auch umgekehrt zu einer allgemeinen Kurve 4. Klasse, wie sie durch einen Connex (1, 4) bestimmt wird, drei allgemeine Korrelationen mit dem D.V. μ so bestimmen lassen, daß die Hauptcoincidenz des Connexes und der Nullpunkt des Korrelationen-Nullsystems identisch sind. Damit ist aber unsere Behauptung erwiesen.

Daß sich schließlich die Korrelationen so bestimmen lassen, daß sie das für die B.T. erforderliche System der Koeffizienten

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6 \end{matrix}$$

haben, ist leicht einzusehen. Kann doch eine allgemeine Korrelation so transformiert werden, daß sie in der viel spezielleren kanonischen Form $\varrho x_1 = k_1 u_1$; $\varrho x_2 = k_2 u_2$; $\varrho x_3 = k_3 u_3$ erscheint.

In welcher Weise diese Koeffizienten bestimmt werden müssen, ist an dem Beispiel des § 12 gezeigt worden.

Wir können somit sagen:

Die Integralkurven des Connexes (1, 4) und damit auch die der Differentialgleichung: $F_1\,du + F_2\,dv = 0$ haben allgemein die Gleichungsform: $u_\alpha^{-1} \cdot w_\beta^\mu \cdot u_\gamma^{1-\mu} = C$,

worin u_α, u_β, u_γ die früher angegebene Bedeutung haben.

§ 14. Vergleich mit der Abhandlung von Darboux: „Mémoire sur les Équations différentielles algébriques du premier Ordre et du premier Degré". [Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, 1878.]

Auf oben erwähnte Abhandlung wurde ich nach Abfassung der Paragraphen 1—13 der vorliegenden Arbeit durch Hrn. Geh. Rat Dr. Finsterwalder aufmerksam gemacht. Das Ergebnis von Darboux zeigt große Ähnlichkeit mit der von uns angegebenen Form der allgemeinen Lösung. Im folgenden soll in Kürze der wesentliche Inhalt der Darbouxschen Abhandlung wiedergegeben werden, und indem wir eine eigene Kritik Darboux' anführen, werden wir die von uns angegebene Lösung als weittragender ansprechen dürfen.

Darboux geht von einem Connex $(m, 1)$[1]) aus, der nach Clebsch zu den algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades führt. Ist dieser Connex: $Lu_1 + Mu_2 + Nu_3 = 0$, so lautet die Differentialgleichung:

$$\alpha) \qquad \begin{aligned} &L(x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2) + M(x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3) + \\ &+ N(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1) = 0^1), \end{aligned}$$

oder $P\,dx_1 + Q\,dx_2 + R\,dx_3 = 0$, worin:

$$\begin{aligned} P &= Mx_3 - Nx_2 \\ Q &= Nx_1 - Lx_3 \\ R &= Lx_2 - Mx_1 \end{aligned} \qquad L, M, N \text{ sind homogene Funktionen } m^{\text{ten}} \text{ Grades in } x_1, x_2, x_3.$$

Um die Differentialgleichung $\alpha)$ zu integrieren, sucht Darboux den Faktor μ zu bestimmen, der den Ausdruck:

$$\mu[L(x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2) + M(x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3 + N(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)]$$

zum vollständigen Differential einer homogenen Funktion von der Dimension Null macht. Das allgemeine Integral ergibt sich alsdann, indem man diese Funktion gleich einer Konstanten setzt.

Damit nun eine totale Differentialgleichung: $P\,dx_1 + Q\,dx_2 + R\,dx_3 = 0$ eine Lösung $\Phi(x_1, x_2, x_3) = C$ besitzt, muß P, Q, R proportional zu den partiellen Differentialquotienten der Funktion Φ sein; es muß also stattfinden[2]):

$$\mu P = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}; \quad \mu \cdot Q = \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}; \quad \mu \cdot R = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}.$$

[1]) Vgl. S. 234. x und u sind lediglich vertauscht.

[2]) Vgl. auch Forsyth p. 294.

Dies führt zu der Relation:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_2}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_3}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_1}\right) = 0.$$

Ist diese Relation erfüllt, so führt die Differentialgleichung zu einer Stammgleichung von der Form: $\Phi(x_1, x_2, x_3) = C$.

Bei Darboux führt dies zu der Integrationsbedingung:

$$\beta) \quad L\frac{\partial \mu}{\partial x_1} + M\frac{\partial \mu}{\partial x_2} + N\frac{\partial \mu}{\partial x_3} + \mu\left(\frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial M}{\partial x_2} + \frac{\partial N}{\partial x_3}\right) = 0.$$

Dabei muß μ eine homogene Funktion sein und der Bedingung genügen:

$$x_1\frac{\partial \mu}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial \mu}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial \mu}{\partial x_3} + (m+2)\mu = 0,$$

d. h. der Grad von μ ist $= m - 2$, denn für eine homogene Funktion m^{ten} Grades besteht die Beziehung:

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial f}{\partial x_3} = mf.$$

μ ist ein Multiplikator der Differentialgleichung und wird als der Jakobische „letzte Multiplikator" bezeichnet[1]). Jakobi gelangt zu diesem Multiplikator, indem er die Lösung für das simultane System:

$$\frac{dx_1}{L} = \frac{dx_2}{M} = \frac{dx_3}{N}$$

zu bestimmen sucht. Letzteres Problem führt alsdann zu der Differentialgleichung β).

Darboux' Grundgedanke zur Ermittelung der Lösung der Differentialgleichung α) besteht nun in deren Aufbau aus partikulären Lösungen und damit auch der Bestimmung von μ.

Es sei $f = 0$ ein partikuläres Integral von α). Dann gelten die beiden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3 &= 0 \\ x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial f}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (f \text{ homogene Funktion}).$$

[1]) Forsyth p. 330.

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_3}}{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}.$$

Ersetzen wir in $a)$ die Binome $x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2$ etc. durch die proportionalen Ausdrücke $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ etc., so lautet die Bedingung, daß $f = 0$ ein partikuläres Integral von $a)$ ist:

$$L\frac{\partial f}{\partial x_1} + M\frac{\partial f}{\partial x_3} + N\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

Diese Gleichung ist aber nicht notwendig eine Identität; es genügt, daß die vorliegende Gleichung für alle Punkte der Kurve $f = 0$ erfüllt ist, daß also identisch stattfindet:

$$L\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + M\frac{\partial f}{\partial x_2} + N\frac{\partial f}{\partial x_3} = K \cdot f.$$

Hierin bedeutet K ein Polynom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades.

Wir haben hier dieselbe Bedingung vor uns, die wir rein geometrisch auf S. 262 beim Connex (1, 4) abgeleitet haben.

Bedeutet $\triangle$ die Operation:

$$L\frac{\partial}{\partial x_1} + M\frac{\partial}{\partial x_2} + N\frac{\partial}{\partial x_3},$$

so können wir die vorhergehende Gleichung schreiben:

$$\triangle f = K \cdot f.$$

Darboux gibt nun an, wie man aus einer genügenden Anzahl bekannter partikulären abgebraischen Lösungen das allgemeine Integral bestimmen kann. Ist letzteres $\varphi = C$, so gilt: $\triangle\varphi = 0$. Es seien p partikuläre algebraische Lösungen bekannt: $u_1, u_2, \ldots u_p$. Dann gelten die identischen Beziehungen:

$$\triangle u_1 = K_1 \cdot u_1;\quad \triangle u_2 = K_2 u_2;\quad \ldots\quad \triangle u_p = K_p \cdot u_p,$$

worin $K_1, K_2, \ldots K_p$ Polynome $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades sind. Darboux sagt dann wörtlich: „Unter den Eigenschaften des Symbols $\triangle$ kann man die folgende bemerken:

$$\triangle\varphi(u, v, w, \ldots) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\triangle u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\triangle v + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\cdot\triangle w + \ldots$$

Indem man eine Anwendung hievon macht, hat man:

$$\triangle (u_1^{\alpha_1} \cdot u_2^{\alpha_2} \cdot u_3^{\alpha_3} \ldots u_p^{\alpha_p}) = (\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3 + \ldots + \alpha_p K_p)\, u_1^{\alpha_1} \cdot u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p}.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ sind konstante Exponenten. Wenn man über diese Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ derart verfügen kann, daß man hat:

I) $$\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3 + \ldots + \alpha_p K_p = 0$$

und auch, wenn $h_1, h_2, \ldots h_p$ die Gerade von $u_1, u_2, \ldots u_p$ bezeichnet:

II) $h_1 \alpha_1 + h_2 \alpha_2 + \ldots + h_p \alpha_p = 0$, so ist $u_1^{\alpha_1} \cdot u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p}$

eine homogene Funktion von der Dimension Null und genügt der Gleichung:

$$\triangle \varphi = 0.$$

Das allgemeine Integral ist also:

$$u_1^{\alpha_1} \cdot u_2^{\alpha_2} \cdot u_3^{\alpha_3} \ldots u_p^{\alpha_p} = C.$$

Nun sind aber die Polynome K vom Grade $m - 1$ und sie enthalten im allgemeinen $\frac{m(m+1)}{2}$ Glieder.

Die Gleichung I) liefert also $\frac{m(m+1)}{2}$ Gleichungen ersten Grades zwischen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_p$. Im ungünstigsten Falle hat man also, der Gleichung II noch Rechnung tragend, $\frac{m(m+1)}{2} + 1$ Gleichungen zu befriedigen, und da sie homogen sind, so darf man höchstens $m \cdot \frac{m+1}{2} + 2$ Unbekannte α haben. Man hat also folgendes Theorem, das ausnahmslos gilt:

Kennt man $m \cdot \frac{m+1}{2} + 2 = q$ partikuläre algebraische Lösungen der gegebenen Differentialgleichung α): $u_1, u_2, \ldots u_q$, so läßt sich das allgemeine Integral immer in der Form schreiben:

$$u_1^{\alpha_1} \cdot u_2^{\alpha_2} \ldots u_q^{\alpha_q} = C.\text{“}$$

Diese Form der Lösung hat nun in der Tat überraschende Ähnlichkeit mit der in dieser Arbeit angegebenen Form der Lösung.

Zunächst ist zu bemerken, daß die Lösung von Darboux für den allgemeinen Fall gilt, daß L, M, N Funktionen m^{ten} Grades sind, während in unserem Falle diese Funktionen vom 4. Grade sind. Hiezu bemerke ich, daß es auf Grund meiner Dissertation keine Schwierigkeiten macht, das Problem nach denselben Grundgedanken, wie sie vorliegende Arbeit enthält, zu verallgemeinern. Ich habe hievon zunächst Abstand genommen, weil durch die allgemeinen linearen Transformationen (= Korrelationen) ein gewisses Gebiet abgegrenzt ist.

Für $m = 4$ sind nun bei Darboux $\frac{4 \cdot 5}{2} + 2 = 12$ partikuläre Lösungen im allgemeinen notwendig: $u_1, u_2, \ldots u_{12}$. Die Lösung lautet:

$$u_1^{\alpha_1} \cdot u_2^{\alpha_2} \cdot u_3^{\alpha_3} \ldots u_{12}^{\alpha_{12}} = C.$$

Der grundlegende Unterschied zwischen der Darboux'schen Form der Lösung (A) und der von mir angegebenen (B) ist der folgende:

$$A: u_1^{\alpha_1} \cdot u_2^{\alpha_2} \ldots u_{12}^{\alpha_{12}} = C$$

$$B: u^{-1} \cdot u_\beta^{\alpha} \cdot u_\gamma^{1-\alpha} = C, \text{ worin}$$

$$u_\alpha = (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) u_1 + (a_2 u_1 + a_4 u_2 + a_5 u_3) u_2 + (a_3 u_1 + a_5 u_2 + a_6 u_3) u_3$$

Analog: u_β und u_γ.

(Die a in A sind nicht zu verwechseln mit denen von u_α in B).

In A kann allgemein über den Grad der $u_1, u_2 \ldots u_{12}$ nichts ausgesagt werden, während derselbe in B zu 2 für u_α, u_β, u_γ bestimmt ist.

Die Anzahl der partikulären Lösungen in A ist im allgemeinen 12; in B ist diese Anzahl auf 3 reduziert: u_α, u_β, u_γ.

Über den Aufbau der partikulären Lösungen $u_1, u_2, \ldots u_{12}$ in A kann Näheres nicht ausgesagt werden. In B fällt eben der gesetzmäßige Aufbau der partikulären Lösungen in die Augen, namentlich die Anordnung der Koeffizienten α, β, γ.

In A ist über die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ nichts ausgesagt. In B tritt nur μ auf mit der fundamentalen Bedeutung als Doppelverhältnis. Die geometrische Ableitung der Lösungsform B vertieft den Einblick in das Problem, insbesondere auch die geometrische Bedeutung der partikulären Lösungen u_α, u_β, u_γ.

Zu ihrer Bestimmung haben wir die Beziehungen auf S. 263 und S. 247 zur Verfügung. Auf S. 263 ergab sich $k_1 = k_2 = k_3$; bei Darboux ist über K_1, K_2, . . . nichts Näheres ausgesagt[1]).

Darboux, der nun zahlreiche Beispiele lediglich für den Fall $m = 2$ in der Weise behandelt, daß er umgekehrt aus gegebenen partikulären Lösungen die entsprechende Form der Differentialgleichung ableitet, sagt am Ende dieser Betrachtungen (S. 190):

„Il résulte des recherches des articles précédents que l'intégrale générale de l'équation différentielle du premier ordre, dans le cas où L, M, N sont du second degré, peut revêtir un très grand nombre de formes différentes. Sans doute, toutes les intégrales que nous avons trouvées ne sont pas essentiellement distinctes, et, du reste, nous ne nous sommes nullement attachés à les reduire au moindre nombre possible, et à montrer comment quelques-unes d'entre elles sont des cas particuliers des plus générales; il résulte néanmoins, de l'étude qui vient d'être faite, des conséquences qui nous paraissent dignes d'être signalées. Pendant que l'équation de Jacobi admet en définitive une seule forme d'intégrale dont toutes les autres sont des cas limites, l'équation différentielle la plus simple après elle peut être intégrée de plusieures manières différentes, et il est possible de donner pour chaque degré plusieurs faisceaux de courbes algébriques appartenant à des types différents et dont l'équation différentielle sera précisément celle que nous avons étudiée . . ."

Gerade die allgemeine Form für alle Lösungen in den Fällen, wo L, M, N Funktionen bis zum 4. Grade sein können, ist es, welche den charakteristischen Unterschied der Lösungen A und B ausmacht.

[1]) Nebenbei ersehen wir, daß auch die Darboux'sche Forderung II erfüllt ist: $2(-1) + 2\mu + 2(1-\mu) = 0$.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1926

Band/Volume: 1926

Autor(en)/Author(s): Lutz Josef

Artikel/Article: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung: fxydxfxydy, worin f1 und f2 allgemeine rationale ganze Funktionen 4. Grades in x und y bedeuten 231-277