Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1927. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1927
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Bestimmung der geradlinigen Dreiecksnetze aus den Krümmungselementen der Hüllkurven.

Von **Heinrich Liebmann** in Heidelberg.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 5. Februar 1927.

Der Aufbau aller (geradlinigen) Dreiecksnetze in der Ebene ist durch die an geometrischen Ergebnissen reiche, umfassende Einsicht in projektive Beziehungen anfordernde und spendende Arbeit der Herren Graf und Sauer[1]) zum Abschluß gebracht. Die Verfasser weisen nach, daß die Netzgeraden sich entweder auf eine Kurve dritter Klasse stützen, oder auf einen Kegelschnitt und einen Punkt, oder auf drei Punkte — kurz, daß sie einem Strahlenbüschel dritter Klasse angehören. Ihr Verfahren beginnt, so kann man sagen, mit dem Zellaufbau, wobei das um einen Netzpunkt gelagerte, aus sechs Dreiecken gebildete Brianchonsche Sechseck den Anfang bildet.

Dagegen verfährt Herr Volk[2]) in einer bei der Heidelberger Akademie vorgelegten Arbeit durchaus analytisch, er faßt die Forderung so: Zu bestimmen sind in allgemeinster Weise drei Geradenscharen

$$A_1(u)\,x + B_1(u)\,y + C_1(u) = 0,$$
$$A_2(v)\,x + B_2(v)\,y + C_2(v) = 0,$$
$$A_3(w)\,x + B_3(w)\,y + C_3(w) = 0,$$

---

[1]) H. Graf und R. Sauer, Über dreifache Geradensysteme. Sitzungsber. d. Bayer. Ak. d. W., math.-naturw. Abt. 1924, 119 ff. Die Anregung zu diesen Untersuchungen ist in Finsterwalders „Geflecht aus drei geodätischen Lamellen“ zu sehen (Mechanische Beziehungen zur Flächendeformation, Jahresber. d. Deutschen Mathematiker. Vereinigung 6 (1899), vgl. daselbst S. 51—52.

[2]) O. Volk, Geodätische Dreiecksnetze auf Flächen konstanten Krümmungsmaßes. Sitzungsber. d. Heidelberger Ak. d. Wiss., math.-naturw. Kl. 1927, Nr. 3.

denen auferlegt wird, daß die Parameter u, v, w der durch einen Punkt gehenden Geraden jeweils an die Forderung

$$u + v = w$$

gebunden sind. Dadurch wird ja in der Tat erreicht, daß bei beliebigem k die Geraden

$$\begin{aligned} u &= \ldots -3k,\ -2k,\ -k,\ 0,\ k,\ 2k,\ 3k,\ \ldots \\ v &= \ldots -3k,\ -2k,\ -k,\ 0,\ k,\ 2k,\ 3k,\ \ldots \\ w &= u + v \end{aligned}$$

sich zu je dreien in den Gitterpunkten eines Netzes schneiden und jede Gerade unendlich viele Gitterpunkte enthält. Seine Methode führt auf eine Funktionalgleichung, die mit viel Kraftaufwand gelöst wird.

Hier soll ein drittes Verfahren entwickelt werden, das nach beiden Seiten, Geometrie und Analysis, hin, nicht so weit ausgreift und sich eines anderen Hilfsmittels bedient.

Verwendet wird eine für die Kurven n-ter Klasse charakteristische Beziehung zwischen den n K. E. (Krümmungselementen), deren (geradlinige) Träger[1]) durch einen Punkt gehen, eine Anordnung, die wohl mit einem naheliegenden Gleichnis als „Dolde“ mit Knotenpunkt P und „Stielen“ PP_1, PP_2, ..., PP_n bezeichnet werden darf, die K. E. haften dann an P_1, P_2, ..., P_n. Für die Bestimmung der Dreiecksnetze braucht man nur den Fall $n = 3$, doch wird der Satz allgemein bewiesen.

Entsprechend mögen n K. E., deren Träger[1]) auf eine Gerade gereiht sind, mit kurzer, freilich etwas kühner Bildersprache als „Ähre“ bezeichnet werden, die Gerade als Ährenachse, und hier entsteht dann die Frage nach der für n K. E. einer Kurve n-ter Ordnung charakteristischen Anordnung der Ähre.

(D) und (A) sind zueinander dualistisch.

Im einzelnen gestaltet sich dann die Untersuchung so: Zunächst wird für die Stützkurven der Netzgeraden eine charakteristische geometrische Verknüpfung (N) abgeleitet (§ 1), der in § 2 die Ährenbedingung (A), in § 3 die Doldenbedingung (D)

---

[1]) Träger des Krümmungselementes x, y, y', y'' ist der Punkt $P(x, y)$, aber auch die Gerade (Tangente)

$$(\eta - y) - y'(\xi - x) = 0.$$

folgt, woraus sich dann der Graf-Sauersche Satz leicht ergibt. Beispiele werden gelegentlich weiter ausgeführt, auch eröffnet sich mancher Ausblick.

§ 1. Die Netzbedingung (N).

1. Aufstellung der Bedingung.

Die drei Geraden, gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x\cos u + y\sin u - p(u) &= 0, \\ x\cos v + y\sin v - q(v) &= 0, \\ x\cos w + y\sin w - r(w) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

in denen zunächst p, q, r drei verschiedene Funktionen sein dürfen, gehen dann und nur dann durch einen Punkt, wenn die Determinante

$$D \equiv p\sin(w - v) + q\sin(u - w) + r\sin(v - u) \tag{2}$$

gleich Null ist. Die Netzbedingung kann dann so gefaßt werden: Es soll möglich sein, an Stelle der Parameter u, v, w neue Normalparameter

$$U(u),\quad V(v),\quad W(w)$$

einzuführen (man kann auch sagen: eine „Eichung" vorzunehmen), die bewirken, daß D mit

$$U(u) + V(v) + W(w)$$

zu Null wird, oder also daß

$$F \equiv U(u) + V(v) + W(w) + \lambda D = 0 \tag{3}$$

wird. Man erkennt leicht, daß diese Forderung darauf führt, einer zehnreihigen Determinante aufzuerlegen, mit D gleichzeitig zu verschwinden.

Die zehn Gleichungen

$$F_{12} = 0,\quad F_{23} = 0,\quad F_{31} = 0,\quad F_{112} = 0,\quad F_{113} = 0,\quad F_{221} = 0,$$
$$F_{223} = 0,\quad F_{331} = 0,\quad F_{332} = 0,\quad F_{123} = 0,$$

in denen die Fußmarken Differentiationen nach u, v und w andeuten, enthalten nämlich U, V, W nicht mehr, sind überdies linear und homogen in λ und seinen drei ersten und sechs zweiten Differentialquotienten nach u, v, w. Die Elimination dieser zehn Größen

$$\lambda,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_{11},\ \lambda_{12},\ \lambda_{13},\ \lambda_{22},\ \lambda_{23},\ \lambda_{33}$$

führt dann auf die genannte zehnreihige, allerdings stark mit Nullen durchsetzte Determinante, die sich leicht hinschreiben ließe.

Auf die Berechnung dieser Determinante kann man aber verzichten, vielmehr ihre Berechnung durch einen Differentiationsprozeß ersetzen, und diesen Weg, freilich mit Preisgabe der am Schluß wieder hergestellten Symmetrie, wollen wir hier beschreiten.

Die Netzbedingung

$$U(u) + V(v) + W(w) = 0$$

läßt sich auch ersetzen durch

$$w = f(U(u) + V(v)),$$

also

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{U'}{V'} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 \lg}{\partial u\, \partial v}\left(\frac{w_1}{w_2}\right) = 0.$$

Es ist aber

$$D_1 + w_1 D_3 = 0, \qquad D_2 + w_2 D_3 = 0,$$

also ist zu fordern

$$\frac{\partial^2 \lg}{\partial u\, \partial v}\left(\frac{D_1}{D_2}\right) = 0.$$

Hieraus berechnet man weiter

$$\frac{\partial \lg D_1}{\partial u} = \frac{D_{11} D_3 - D_1 D_{13}}{D_1 D_3}, \quad \frac{\partial \lg D_2}{\partial v} = \frac{D_{22} D_3 - D_2 D_{23}}{D_2 D_3}$$

und gelangt zu der noch unsymmetrischen Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D_{11}}{D_1}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D_{13}}{D_3}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D_{22}}{D_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D_{23}}{D_3}\right) = 0.$$

Rechnet man dann mit Verwendung der Werte von w_1 und w_2 weiter, so erhält man die symmetrische Gleichung

$$\begin{aligned} D_1 D_2 D_3 \{D_1^2(D_{223} D_3 - D_{332} D_2) + D_2^2(D_{331} D_1 - D_{113} D_3) \\ + D_3^2(D_{112} D_2 - D_{221} D_1)\} + D_1^3 D_{23}(D_{33} D_2^2 - D_{22} D_3^2) \\ + D_2^3 D_{31}(D_{11} D_3^2 - D_{33} D_1^2) + D_3^3 D_{12}(D_{22} D_1^2 - D_{11} D_2^2) = 0, \end{aligned}$$

die homogen von der siebenten Ordnung ist; die hier ausgeschaltete zehnreihige Determinante hat noch den Faktor $D_1 D_2 D_3$.—

Berücksichtigt man noch $D = 0$ und setzt, was die geometrische Deutung des Ergebnisses nicht belastet, dabei

$$p = q = r = 0,$$

so kommt

$$p' q' r' \sin^4 (w - v) \sin^4 (u - w) \sin^4 (v - u) \cdot (p'' (q' r')^3 + q'' (r' p')^3 + p'' (r' q')^3) = 0.$$

Hieraus ist dann die Netzbedingung leicht zu erfassen: Gehen die drei Netzgeraden von P (hier Koordinatenanfang) aus und berühren sie in P_1, P_2, P_3 die Hüllkurven, sind ferner ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die Krümmungsradien, dann ist bekanntlich

$$PP_1 = p', \quad PP_2 = q', \quad PP_3 = r',$$

und wegen $\quad p = q = r = 0$:

$$p'' = \varrho_1, \quad q'' = \varrho_2, \quad r'' = \varrho_3,$$

so daß wir die Forderung erhalten

$$\frac{\varrho_1}{(PP_1)^3} + \frac{\varrho_2}{(PP_2)^3} + \frac{\varrho_3}{(PP_3)^3} = 0.$$

Hiermit ist der Satz gewonnen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die drei Geradenscharen

$$\begin{aligned} A_1(u)\, x + B_1(u)\, y + C_1(u) &= 0, \\ A_2(v)\, x + B_2(v)\, y + C_2(v) &= 0, \\ A_3(w)\, x + B_3(w)\, y + C_3(w) &= 0, \end{aligned}$$

ein Dreiecksnetz bilden, daß also je drei aus diesen Scharen entnommene Gerade durch einen Punkt gehen, wenn

$$u + v + w = 0,$$

ist die Beziehung

$$(N) \qquad \frac{\varrho_1}{(PP_1)^3} + \frac{\varrho_2}{(PP_2)^3} + \frac{\varrho_3}{(PP_3)^3} = 0.$$

Hier bedeuten ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die Krümmungsradien der drei Stützkurven in den Berührungspunkten P_1, P_2, P_3 der von P ausgehenden Netzgeraden.

2. Beispiele.

Hieraus können leicht einfache Dreiecksnetze abgeleitet werden.

Liegt z. B. P_1 fest, so bleibt wegen $\varrho_1 = 0$ dann

$$\frac{\varrho_2}{(PP_2)^3} + \frac{\varrho_3}{(PP_3)^3} = 0,$$

und dies besagt, daß PP_2, PP_3 sich auf einen festliegenden Kegelschnitt stützen[1]).

Die Aufgabe, die Eichung vorzunehmen oder die Normalparameter zu bestimmen, führt auch hier schon auf elliptische Funktionen, kann aber im speziellen sehr einfach werden, z. B. wenn das Netz sich auf einen Kreis und dessen Mittelpunkt oder eine Parabel und den unendlich fernen Punkt der Achse stützt.

Auch dem einfachen Fall $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = 0$ mögen einige Bemerkungen gewidmet werden. Sind für irgend ein Tripel P_1, P_2, P_3 die Krümmungsradien Null, so liegen drei Spitzentangenten PP_1, PP_2, PP_3 vor, worin bereits eine Andeutung liegt, daß die Stützkurve von der dritten Klasse ist.

Sodann aber wollen wir die Normierung für den Fall dreier festen Stützpunkte durchführen. Gehen die drei Geradenscharen durch feste Punkte $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, sind also ihre Gleichungen

$$\begin{aligned}
(x - a_1)\cos u + (y - b_1)\sin u &= 0,\\
(x - a_2)\cos v + (y - b_2)\sin v &= 0,\\
(x - a_3)\cos w + (y - b_3)\sin w &= 0,
\end{aligned}$$

so wird die Schnittbedingung nach Einführung von

$$\begin{aligned}
t_1 &= \operatorname{tang} u, & t_2 &= \operatorname{tang} v, & t_3 &= \operatorname{tang} w,\\
l_1 &= a_3 - a_2, & l_2 &= a_1 - a_3, & l_3 &= a_2 - a_1,\\
m_1 &= b_3 - b_2, & m_2 &= b_1 - b_3, & m_3 &= b_2 - b_1
\end{aligned}$$

die Form erhalten:

$$l_1 t_1 + l_2 t_2 + l_3 t_3 - m_1 t_2 t_3 - m_2 t_3 t_1 - m_3 t_1 t_2 = 0. \tag{4}$$

Wie kann man aus der linken Seite von (4) eine Summe dreier Funktionen $$T_1(t_1) + T_2(t_2) + T_3(t_3)$$ machen? Man beachtet, daß die Gleichungen gelten:

$$m_3 l_2 - m_2 l_3 = m_1 l_3 - m_3 l_1 = m_2 l_1 - m_1 l_2,$$

multipliziert $l_1 t_1$ und $m_1 t_2 t_3$ mit dem ersten Ausdruck, $l_2 t_2$ und $m_2 t_3 t_1$ mit dem zweiten, $l_3 t_3$ und $m_3 t_1 t_2$ mit dem dritten und kann dann (4) leicht umformen in

[1]) Vgl. hierzu die Anmerkung auf S. 82.

$$(5) \qquad \begin{aligned}&(l_3 + m_3 t_1)(l_1 + m_1 t_2)(l_2 + m_2 t_3)\\ &= (l_2 + m_2 t_1)(l_3 + m_3 t_2)(l_1 + m_2 t_1)\end{aligned}$$

oder in

$$\lg \frac{l_3 + m_3 t_1}{l_2 + m_2 t_1} + \lg \frac{l_1 + m_1 t_2}{l_3 + m_3 t_2} + \lg \frac{l_2 + m_2 t_3}{l_1 + m_1 t_3} = 0,$$

womit die angestrebte Summenform erreicht ist.

Man kann dieses Netz sehr leicht zeichnen und erhält damit eine nomographische Multiplikationstafel.

Übrigens ist (5) eine Ausdrucksform des Cevaschen Satzes, wie ja bei jeder „Eichung" ein geometrischer Satz zur Geltung kommt und den Weg weist, besser als eine analytische Überlegung zum Ziel führt.

§ 2. Die Ähre der gereihten Krümmungselemente einer C_n.

Wir betrachten jetzt die oben als „Ähre" bezeichnete Anordnung von n K. E. und werden eine Beziehung der n Winkel τ_1, $\tau_2, \ldots, \tau_n$ der Linienelemente mit der Achse und der Krümmungsradien erhalten, die für die C_n charakteristisch ist, und die die Abstände der Trägerpunkte gar nicht enthält.

1. Die Ährenbedingung (A).

Als Ährenachse wählen wir die x-Achse, die Träger der n K. E. seien

$$y = 0, \quad x = a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

die Richtungen der n Tangenten

$$p_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a_1} = \operatorname{tang} \tau_1, \ \ldots, \ p_n = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a_n} = \operatorname{tang} \tau_n .$$

Die Gleichung der C_n, soweit sie für die n K. E. oder also die zweiten Differentialquotienten

$$q_1 = \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=a_1}, \ \ldots, \ q_n = \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=a_n}$$

in Betracht kommt, ist dann gegeben durch

$$0 = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) - y \left\{ \frac{(x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_n)}{p_1} \right.$$
$$\left. + \frac{(x - a_1)(x - a_3) \ldots (x - a_n)}{p_2} + \ldots \right\} + y^2 (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{n-2} x^{n-2}) + \ldots$$

Einmalige Differentiation nach x gibt:

$$0 = (x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n) + (x-a_1)(x-a_3)(x-a_n) + \dots$$
$$-y'\{\quad\}$$
$$-y\left\{\frac{1}{p_1}\Big((x-a_3)(x-a_4)\dots(x-a_n) + (x-a_2)(x-a_4)\dots(x-a_n) + \dots + (x-a_2)(x-a_3)(x-a_{n-1})\Big)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{p_2}\Big((x-a_3)(x-a_4)\dots(x-a_n) + (x-a_1)(x-a_4)\dots(x-a_n) + \dots + (x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_{n-1})\Big) + \dots\right\}$$
$$+2yy'(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-2}x^{n-2}) + y^2(c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + (n-2)c_{n-2}x^{n-3}) + \dots$$

Differenziert man nochmals nach x und setzt

$$y = 0,\ x = a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,$$

so erhält man die n Gleichungen

$$\frac{2}{p_1}\left\{\frac{(a_1-a_3)(a_1-a_4)\dots(a_1-a_n)}{p_2} + \frac{(a_1-a_2)(a_1-a_4)\dots(a_1-a_n)}{p_3} + \dots\right\}$$
$$+\frac{q_1}{p_1^2}(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_2) + 2(c_0 + c_1a_1 + \dots + c_{n-2}a_1^{n-2}) = 0,$$
$$\frac{2}{p_2}\left\{\frac{(a_2-a_3)(a_2-a_4)\dots(a_2-a_n)}{p_1} + \frac{(a_2-a_1)(a_2-a_4)\dots(a_2-a_n)}{p_3} + \dots\right\}$$
$$+\frac{q_2}{p_2}(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n) + 2(c_0 + c_1a_2 + \dots + c_{n-2}a_2^{n-2}) = 0, \text{ usw.}$$

Multipliziert man diese n Gleichungen mit den Unterdeterminanten

$$A_1^{(n-1)} = \begin{vmatrix} a_2^{n-2} & \dots & a_2^0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^{n-2} & \dots & a_n^0 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} (a_2-a_3)(a_2-a_4)\dots(a_2-a_n) \\ (a_3-a_4)\dots(a_3-a_n) \\ \dots\dots\dots \\ (a_{n-1}-a_n), \end{array}$$

$A_2^{(n-1)}, \dots, A_n^{(n-1)}$ der Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \ldots & a_1^1 & a_1^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \ldots & a_n^1 & a_n^0 \end{vmatrix}$$

und addiert, so bleibt nur übrig

$$A \cdot \left(\frac{q_1}{p_1^3} + \frac{q_2}{p_2^3} + \ldots + \frac{q_n}{p_3^n} \right) = 0.$$

A ist von Null verschieden, wenn die Träger der K.E. getrennt liegen.

Es ist noch die geometrische Beziehung zu beachten

$$\frac{q_i}{p_i^3} = \frac{(1+p_i^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho_i p_i^3} = \frac{1}{\varrho_i \sin^3 \tau_i}.$$

Damit ist der Satz bewiesen:

Die n Krümmungselemente einer Ähre, n K.E. also, deren Träger auf einer Geraden liegen und deren Linienelemente mit dieser Achse die Winkel

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$$

einschließen, deren Krümmungsradien mit

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$$

bezeichnet werden, müssen die Bedingung

$$(A) \qquad \frac{1}{\varrho_1 \sin^3 \tau_1} + \frac{1}{\varrho_2 \sin^3 \tau_2} + \ldots + \frac{1}{\varrho_n \sin^3 \tau_n} = 0$$

erfüllen, um einer Kurve n^{ter} Ordnung anzugehören.

Hinzuzufügen ist, daß nur im Falle $n = 2$ die Ähre die C_2 bestimmt, und daß die Träger getrennt liegen müssen.

In (A) kommen die Entfernungen der Trägerpunkte nicht vor, also behält eine Ähre ihren Charakter, wenn man die K. E. verschiebt, ohne daß sie dabei einander begegnen. Durch die Winkel $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ und $n-1$ der Krümmungsradien ist der letzte bestimmt. Hieraus folgt z. B.: Liegen auf einer Geraden $n-1$ Wendepunkte einer C_n, so schneidet die Gerade die Kurve nochmals in einem Wendepunkt, ein Satz, in dem die bekannte Lagebeziehung der Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung enthalten ist.

Die Bedingung (A) ist selbstverständlich projektiv invariant. Es folgt dies daraus, daß alle Quotienten der Form

$$J_{12} = \frac{\varrho_1 \sin^3 \tau_1}{\varrho_2 \sin^3 \tau_2}$$

einzeln projektive Invarianten sind, sie lassen sich mit einem Doppelverhältnis in Beziehung setzen, auf das folgende Überlegung führt:

Betrachtet man zwei Krümmungselemente

$$x_1, y_1, p_1, q_1 \text{ und } x_2, y_2, p_2, q_2$$

und bringt die Tangenten

$$(\xi - x_1) p_1 - (\eta - y_1) = 0,$$
$$(\xi - x_2) p_2 - (\eta - y_2) = 0$$

zum Schnitt (P_0), so kann man zwei Kegelschnitte konstruieren, die $P_0 P_1$ und $P_0 P_2$ berühren, also beide Linienelemente enthalten, und von denen der eine das erste, der andere das zweite K. E. enthält. Alle durch P_0 gelegten Sekanten schneiden die beiden Kegelschnitte in vier Punkten mit festem Doppelverhältnis, das sich durch J_{12} ausdrücken läßt, und zwar ergibt sich, daß

$$J_{12} = -1$$

Kegelschnittlage der beiden K. E. bedeutet[1]).

2. Die Ährenbedingung ist hinreichend.

Wir beweisen jetzt, daß die Bedingung (A) für die C_n-Lage der K. E. charakteristisch ist und geben dabei der Umkehrung des Fundamentalsatzes die Fassung:

[1]) Vgl. H. Liebmann, Bestimmung der geodätisch-rhombischen Netze bei konstantem Krümmungsmaß (wird im Jubiläumsband des Crelle'schen Journales erscheinen). Hier wird die von Darboux gelegentlich erwähnte, von E. Study in seiner Abhandlung: Die Elemente zweiter Ordnung und die projektive Geometrie, Berichte der math.-phys. Klasse der Sächs. Ges. d. W. zu Leipzig, 1901, 338—403 in aller Strenge diskutierte Invariante ausgiebig benützt. Es ist interessant, daß dieselbe Invariante in beiden Problemen (rhombische Netze und Dreiecksnetze) auftritt und gleichsam den Schlüssel gibt. — Die rhombischen Netze können, wieder in ganz anderer, auch auf den R_n übertragbarer Weise, ohne diesen „Schlüssel" durch ganz elementare Integration behandelt werden. (Vgl. H. Liebmann, Rhombische Geradennetze im Raum. Sitzgsber. d. Heid. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Kl. 1927, Nr. 2.)

Geht von einem (festen) Punkt P_1 mit gegebenem K. E. ein (beliebig enges) Strahlbüschel aus, dessen Strahlen die Folge von $n-2$ Bögen $(P_2), (P_3), \ldots, (P_{n-2})$ in $n-1$ wandernden Punkten $P_2, P_3, \ldots, P_n$ treffen, und stehen die n K. E., nämlich das feste in P_1 und die $n-1$ mit $P_2, P_3, \ldots, P_n$ wandernden in der Bindung (A), so gehören diese $n-1$ Bögen einer festen C_n an, die auch das zu P_1 gehörige K. E. enthält.

Der einfache Fall $n = 2$ sei vorausgeschickt.

Nimmt man als festes Element

$$x_1 = y_1 = p_1 = 0, \quad q_1 = k,$$

so werden die das feste und das wandernde Element enthaltenden Kegelschnitte durch

$$2y - kx^2 + uxy + vy^2 = 0$$

dargestellt. Haben diese Kegelschnitte eine Schmieghüllkurve, wie verlangt wird? Dann müßten u und v so als Funktionen eines Parameters gewählt werden können, daß auch noch die Gleichungen gelten

$$u'xy + v'y^2 = 0,$$
$$u''xy + v''y^2 = 0,$$

und da die Lösung $y = 0$ ausscheidet, so muß sein

$$v = au + b,$$

also entsteht

$$2y - kx^2 + by^2 + u(xy + ay^2) = 0.$$

Dieses lineare Büschel hat aber keine Schmieghüllkurve, also muß auch u konstant sein, d. h. (P_2) ist Teil eines Kegelschnittes, der das feste Element enthält.

Für $n = 3$ ist der Beweis so zu führen:

Die Bögen (P_2) und (P_3) werden umschmiegt von Kurven dritter Ordnung, die in P_1 ein festes Element gemein haben, und deren Gleichung von der Form ist:

$$2y - kx^2 + u_{10}xy + u_{02}y^2 + u_{30}x^3 + u_{21}x^2y + u_{12}xy^2 + u_{03}y^3 = 0,$$

und die Punkte der Schmieghüllkurve, auf der drehbaren Sekante

$$y = vx$$

gelegen, werden bestimmt durch

$$u'_{10}\,x\,y + \ldots + u'_{03}\,y^3 = 0,$$
$$u''_{10}\,x\,y + \ldots + u''_{03}\,y^3 = 0,$$

also müßten die Gleichungen

$$u'_{10} + v\,u'_{02} + x\,(u'_{30} + v\,u'_{21} + v^2\,u'_{12} + v^3\,u'_{03}) = 0,$$
$$u''_{10} + v\,u''_{02} + x\,(u''_{30} + v\,u''_{21} + v^2\,u''_{12} + v^3\,u''_{30}) = 0$$

für einen (beschränkten) Bereich von v zwei Werte x liefern; das geht nur so, daß die Gleichungen identisch erfüllt sind, d. h. es müssen

$$u_{10},\ u_{02},\ u_{30},\ u_{21},\ u_{12},\ u_{03}$$

Konstanten sein; wir erhalten statt der Schmieghüllkurve eine feste C_3.

Ebenso verläuft der Schluß für $n = 4{,}5$ usw.

Als Folgerung ergibt sich noch:

Die Kurvenbögen $(P_1), (P_2), (P_3), \ldots, (P_n)$ gehören einer festen C_n an, soweit die Bedingung erfüllt ist, daß je n K. E., deren Träger auf einer Geraden liegen, in der Bindung

$$(A) \qquad \sum_1^n{}_r \frac{1}{\varrho_r \sin^3 \tau_r} = 0$$

stehen.

Die Kurve kann dabei auch in eine Folge von Kurven zerfallen, deren Ordnungszahlen die Summe n ergeben, also z. B. für $n = 3$ in drei Gerade, wenn

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{\varrho_3} = 0,$$

oder, wenn

$$\frac{1}{\varrho_1} = 0, \quad \frac{1}{\varrho_2 \sin^3 \tau_2} + \frac{1}{\varrho_3 \sin^3 \tau_3} = 0,$$

in eine Gerade und einen Kegelschnitt, für $n = 4$ in vier Gerade, eine Gerade und eine C_3 oder zwei Kegelschnitte.

§ 3. Die Doldenbedingung.

Wir formen jetzt (A) dualistisch um; viel mehr wollen wir die entsprechende Bedingung (D) aussprechen und dann zeigen, daß sie dualistisch mit (A) äquivalent ist. Hieraus ergibt sich dann leicht der Aufbau der Dreiecksnetze.

1. Bedingung für die Dolde.

n Kurvenbögen $(P_1), (P_2), \ldots, (P_n)$ gehören einer festen Kurve n^{ter} Klasse an, soweit die Bedingung erfüllt ist, daß die n K.E. an $P_1, P_2, \ldots, P_n$, deren Träger (Stiele) von einem Punkt P ausstrahlen, durch

$$(D)\qquad \frac{\varrho_1}{(P P_1)^3} + \frac{\varrho_2}{(P P_2)^3} + \cdots + \frac{\varrho_n}{(P P_n)^3} = 0$$

gebunden sind.

Wenn gezeigt ist, daß (D) durch irgend eine Dualität in (A) übergeht, so ist der Satz bewiesen; daß (D) projektiv invariant ist, liesse sich genau wie bei (A) zeigen.

Bezeichnen wir den Knoten der Dolde mit $P_0(x_0, y_0)$, die Koordinaten der $P_1, P_2, \ldots, P_n$ mit $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$, so ist, da die Strecken $P_0 P_r$ jeweils in P_r berühren,

$$x_r - x_0 = \lambda_r x'_r, \quad y_r - y_0 = \lambda_r y'_r$$

und aus (D) wird

$$\sum_1^n{}^r \frac{\varrho_r}{(P_0 P_r)^3} = \sum_1^n{}^r \frac{((x'_r)^2 + (y'_r)^2)^{\frac{3}{2}}}{(x'_r y''_r - y'_r x''_r)((x_r - x_0)^2 + (y_r - y_0)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$= \sum_1^n{}^r \frac{1}{\lambda_r^3 (x'_r y''_r - y'_r x''_r)}.$$

Jetzt wenden wir die einfachste Dualität an, nämlich

$$x = \cos\varphi \cdot p^{-1},$$
$$y = \sin\varphi \cdot p^{-1},$$

die den Punkt in die Gerade

$$\bar{x}\cos\varphi + \bar{y}\sin\varphi - p = 0$$

überführt, und erhalten leicht

$$x' y'' - y' x'' = p^{-3}(p''\varphi' - \varphi'' p' + p(\varphi')^3).$$

Rechts bekommt man weiter, da in diesen Linienkoordinaten der Krümmungsradius $\bar{\varrho}$ durch

$$\bar{\varrho} = p + \frac{d^2 p}{d\varphi^2} = p + \left(\frac{p'}{\varphi'}\right)' \varphi' = \frac{p\cdot(\varphi')^3 + p''\varphi' - p'\varphi''}{(\varphi')^3}$$

gegeben ist:

$$x' y'' - y' x'' = p^{-3}(\varphi')^3 \bar{\varrho}.$$

Aus den n Gleichungspaaren

$$\frac{\cos\varphi_r}{p_r} - \frac{\cos\varphi_0}{p_0} = \lambda_r \left(\frac{\cos\varphi_r}{p_r}\right)',$$
$$\frac{\sin\varphi_r}{p_r} - \frac{\sin\varphi_0}{p_0} = \lambda_r \left(\frac{\sin\varphi_r}{p_r}\right)'$$

folgt weiter

$$\lambda_r = \frac{p_r}{\varphi_r'} \frac{\sin(\varphi_r - \varphi_0)}{p_r}$$

und

$$p_r \varphi_r' \cos(\varphi - \varphi_0) - p_r' \sin(\varphi_r - \varphi_0) - p_0 \varphi_r' = 0 .$$

Die zweite Gleichung besagt, daß die Träger

$$(P_r) : \begin{cases} \bar{x}_r = p_r \cos\varphi_r - \dfrac{p_r'}{\varphi_r'} \sin\varphi_r , \\ \bar{y}_r = p_r \sin\varphi_r + \dfrac{p_r'}{\varphi_r'} \cos\varphi_r \end{cases}$$

auf der Geraden

$$\bar{x} \cos\varphi_0 + \bar{y} \sin\varphi_0 - p_0 = 0$$

liegen, und die Linienelemente mit ihr die Winkel

$$\varphi_r - \varphi_0$$

einschliessen, die wir mit τ_r bezeichnen, und aus der ersten Gleichung folgt

$$\frac{1}{\lambda_r (x_r' y_r'' - y_r' x_r'')} = \frac{p_0^3}{\varrho_r \sin^3(\varphi_r - \varphi_0)} = \frac{p_0^3}{\varrho_r \sin^3 \tau_r} .$$

So wird aus (D) wieder

$$(A) \qquad \sum_1^n {}^r \frac{1}{\varrho_r \sin^3 \tau_r} = 0.$$

Hiermit ist der Doldensatz bewiesen.

Zu beachten ist, daß die Winkel

$$\sphericalangle(P_1 P_0 P_2), \ \ldots, \ \sphericalangle(P_{n-1} P_0 P_n)$$

der Stiele in (D) gar nicht auftreten, vorausgesetzt ist freilich, daß sie von Null verschieden sind.

So gilt z. B. der Satz: Durch drei K. E., die die Bedingung (D) erfüllen, können ∞^1 Kurven dritter Klasse gelegt werden. Dreht man die Stiele $P_0 P_1, \ldots P_0 P_n$ um den Knotenpunkt, wobei die Längen der Stiele, die Krümmungsradien und auch die Anordnung der Stiele beizubehalten sind, so erhält man ∞^2 Dolden von derselben Eigenschaft.

2. Anwendung auf das Dreiecksnetz.

Die Bedingung (D) deckt sich für den Fall $n = 3$ mit der Netzbedingung in § 1, Nr. 1.

Hieraus folgt:

∞^3 Geraden lassen sich dann und nur dann zu einem Dreiecksnetz ordnen, wenn sie eine feste Kurve 3. Klasse berühren. Die Kurve kann auch in ein lineares Strahlenbüschel und einen Kegelschnitt oder drei lineare Strahlenbüschel entarten.

Daß die Beziehungen (A) und (D) für die Kurven n^{ter} Ordnung bzw. n^{ter} Klasse noch für andere Fragestellungen zu verwerten sind, ist wohl zu erwarten.

Bemerkungen bei der Korrektur (26. 4. 27):

1. Zu der Anmerkung auf Seite 82: Mittels der für $n = 2$ gleichwertigen Beziehungen (A) und (D) lassen sich auch die rhombischen Kreisnetze, die in linearen Bündeln enthalten sind, bestimmen, wie an anderer Stelle gezeigt werden soll.

2. Die Beziehungen (A) und (D) finden sich, wie mir Herr Engel inzwischen mitgeteilt hat, bereits in zwei Arbeiten von E. Holst: Ein Beitrag zur methodischen Behandlung der metrischen Eigenschaften algebraischer Kurven. Archiv for Mathematik og Naturvidenskab 7, 1882, S. 109—114. — Ein Paar synthetische Methoden in der metrischen Geometrie mit Anwendungen. Ebenda, S. 240—362. Diese Abhandlungen waren mir leider nicht zugänglich.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1927

Band/Volume: 1927

Autor(en)/Author(s): Liebmann Heinrich

Artikel/Article: Bestimmung der geradlinigen Dreiecksnetze aus den Krümmungselementen der Hüllkurven 73-87