Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1927. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1927
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über isogonale Flächen 2. Art.

Von **Josephina Kapfer.**

Vorgelegt von F. Lindemann in der Sitzung am 14. Mai 1927.

In diesem zweiten Teil meiner Arbeit „Über Isogonalität von Flächen"[1]) werden, entsprechend der zweifachen Möglichkeit einer Definition von Flächenisogonalität, die isogonalen Flächen 2. Art behandelt. Die Bedingungsgleichung hiefür wird aufgestellt und gelöst. Der enge Zusammenhang zwischen Isogonalität von Linienelementen und isometrischen bezw. konformen Flächen wird dargelegt und die lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung, welche Flächen, konform einer gegebenen Fläche, bestimmen läßt, ermittelt. Diese Gleichung dürfte bisher noch nicht abgeleitet worden sein. Die Arbeit erbringt ferner den Nachweis der Identität des Problems isogonaler Flächen, deren korrespondierende Linienelemente in konstantem Verhältnis stehen, mit der Frage der Flächenverbiegung. Die Richtigkeit der Umkehrung der von Bonnet für assoziierte Minimalflächen gefundenen Sätze bzw. der Zusammenhang der Schwarzschen Minimalflächen mit isogonaler Isometrie wird nachgewiesen. Schließlich wird gezeigt, wie eine Verallgemeinerung der von Darboux und Weingarten angewandten Methoden (zur Lösung des Problems der unendlich kleinen Flächendeformation, bzw. Bestimmung der Orthogonalflächen) sich für die Ermittlung von isogonalen Flächen 2. Art verwenden läßt.

---

[1]) Vgl. Sitzungsberichte d. Bayer. Akad. d. Wissensch., 16. Jan. 1926, S. 63–81.

§ 1.

Angabe des Problems — Lösung.

Entspricht dem Wertepaar u, v der u, v Mannigfaltigkeit der Punkt P auf der Fläche S und der Punkt P_2 auf der Fläche S_2, ferner der Richtung $\frac{dv}{du}$ durch u, v die Richtung $\varkappa$ durch P auf S und die Richtung $\varkappa_2$ durch P_2 auf S_2, so heißen S und S_2 isogonale Flächen 2. Art, wenn die Linienelemente mit den Richtungen $\varkappa$ und $\varkappa_2$ für jedes $u, v, \frac{dv}{du}$ im Definitionsbereich den konstanten Winkel ω einschließen.

Es seien x, y, z die rechtwinkeligen Koordinaten der Punkte P einer Fläche S, deren Parameter die beiden unabhängigen Variablen u und v sind, S demnach analytisch bestimmt durch die folgenden Gleichungen:

$$x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v).$$

Dabei sei vorausgesetzt, daß die Funktionen f_1, f_2, f_3, wenigstens in einem gewissen Bereich, eindeutig und unbegrenzt differentiierbar sein sollen. Mit

$$ds; \quad \alpha, \beta, \gamma; \quad X, Y, Z; \quad E, F, G; \quad L, M, N; \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F}; \quad H$$

seien in obiger Reihenfolge: das Linienelement der Fläche S, die Richtungskosinus der Tangente an dasselbe, die Richtungskosinus der Flächennormalen, die Fundamentalgrößen 1. und 2. Ordnung für die Fläche (in der Benennung von Scheffers), das Gaußsche Krümmungsmaß und die mittlere Krümmung von S bezeichnet. Für die Fläche S_2 mögen dieselben Bezeichnungen mit dem Index 2 analoge Bedeutung haben.

Der vorstehenden Definition isogonaler Flächen 2. Art entspricht als Bedingungsgleichung für ein Paar derselben die Beziehung:

$$\text{(1)} \qquad \underline{\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \gamma\gamma_2 = \cos\omega = \text{konstant} = k.}$$

Liniengeometrisch gedeutet lautet das Problem:

Gegeben ist der Komplex der ∞^3 Tangenten an eine Fläche S, angeordnet in ∞^2 Strahlenbüscheln, von welchen jedes in einer Tangentialebene an diese Fläche in P, dem Büschelzentrum, gelegen ist. Die mit diesen Tangenten in den Punkten P von S den Winkel ω einschließenden Geraden bilden in ihrer Gesamtheit ∞^1 Geradenkomplexe, dargestellt durch die Mantellinien von ∞^3 Drehkegeln, deren Öffnungswinkel konstant und eben jener Winkel ω ist, deren Spitzen die ∞^2 Punkte P der Fläche S, deren Achsen die Tangenten dieser Fläche sind und deren Seitenlinien, als Tangenten der Flächen S_2, deren Linienelemente enthalten. Die Gesamtheit dieser Kegelmantellinien ist in Tangentenkomplexen von Flächen S_2 anzuordnen.

Die Bedingungsgleichung (1) für die Isogonalität von Flächen S und S_2 kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx_2}{ds_2}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{dy_2}{ds_2}+\frac{dz}{ds}\cdot\frac{dz_2}{ds_2}=k, \tag{1a}$$

oder:

$$\frac{ds_2}{ds}=\frac{1}{\cos\omega}\sum\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx_2}{ds}.$$

Setzt man für dx, dy, dz; dx_2, dy_2, dz_2 die Werte ein:

$$dx=x_u\,du+x_v\,dv\text{[1]) usf.}$$

und multipliziert aus, so erhält man:

$$\frac{ds_2}{ds}=\frac{1}{\cos\omega}\cdot\frac{\sum x_u x_{2u}+\left(\sum x_u x_{2v}+\sum x_v x_{2u}\right)\frac{dv}{du}+\sum x_v x_{2v}\left(\frac{dv}{du}\right)^2}{\sum x_u^2+2\sum x_u x_v\cdot\frac{dv}{du}+\sum x_v^2\left(\frac{dv}{du}\right)^2}$$
$$=f\left(u,v,\frac{dv}{du}\right).$$

Gewöhnlich ist also $\frac{ds_2}{ds}$ eine Funktion von u, v und $\frac{dv}{du}$. Bemerkenswert ist der Fall, daß gilt:

---

[1]) Die der Funktionsbezeichnung beigefügten Indices u und v bedeuten die partielle Differentiation nach u bzw. v.

$$\frac{d s_2}{d s} = f(u v),$$

wobei f eine beliebige, aber für jeden Punkt P der Fläche S geltende Funktion der beiden Unabhängigen u und v ist. Es ist dann der Zähler des Bruches

$$\frac{\sum x_u x_{2u} + (\sum x_u x_{2v} + \sum x_v x_{2u}) \frac{dv}{du} + \sum x_v x_{2v} \left(\frac{dv}{du}\right)^2}{\sum x_u^2 + 2 \sum x_u x_v \cdot \frac{dv}{du} + \sum x_v^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2}$$

ein Vielfaches des Nenners, die Flächen S und S_2 sind konform aufeinander bezogen und es schließt ersichtlich das Problem der isogonalen Flächen 2. Art als Teilaufgabe in sich die Bestimmung von Flächen S_2, welche einer gegebenen Fläche S durch Konformität der Abbildung in korrespondierenden Punkten zugeordnet sind.

In diesem Falle gilt für jedes $\frac{dv}{du}$:

$$\sum \left(x_u + x_v \frac{dv}{du}\right) \cdot \left(x_{2u} + x_{2v} \frac{dv}{du}\right) = f \cos \omega \sum \left(x_u + x_v \frac{dv}{du}\right)^2,$$

d. h. es ergeben sich die drei Gleichungen:

$$\sum x_u (x_{2u} - k f x_u) = 0. \tag{2}$$

$$\sum x_v (x_{2u} - k f x_u) + \sum x_u (x_{2v} - k f x_v) = 0. \tag{3}$$

$$\sum x_v (x_{2v} - k f x_v) = 0. \tag{4}$$

Gleichung (2) kann ersetzt werden durch das System der drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_{2u} - k f x_u &= n y_u - m z_u \\ y_{2u} - k f y_u &= l z_u - n x_u \\ z_{2u} - k f z_u &= m x_u - l y_u . \end{aligned} \tag{2a}$$

Gleichung (4) ist identisch mit dem System:

$$\begin{aligned} x_{2v} - k f x_v &= \nu y_v - \mu z_v \\ y_{2v} - k f y_v &= \lambda z_v - \nu x_v \\ z_{2v} - k f z_v &= \mu x_v - \lambda y_v . \end{aligned} \tag{4a}$$

Dabei sind l, m, n, bzw. λ, μ, ν willkürliche Funktionen von u und v. Setzt man:

$$\begin{aligned} l &= \lambda, \\ m &= \mu, \\ n &= \nu, \end{aligned}$$

so ist auch Gleichung (3) erfüllt.

Man differentiiert die Gleichungen (2a) nach v, die Gleichungen (4a) nach u, setzt die beiden jeweils hiedurch gefundenen Werte von $\frac{\partial^2 x_2}{\partial u\, \partial v}$, $\frac{\partial^2 y_2}{\partial u\, \partial v}$, $\frac{\partial^2 z_2}{\partial u\, \partial v}$ einander gleich und erhält so die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} k(xf) + (y\nu) - (z\mu) &= 0 \\ k(yf) + (z\lambda) - (x\nu) &= 0 \\ k(zf) + (x\mu) - (y\lambda) &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei $(xf) = x_u f_v - f_u x_v$.

Da die drei Gleichungen (5) nebeneinander bestehen müssen, so sind die Funktionen λ, μ, ν an die Bedingung gebunden:

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v & (y\nu) - (z\mu) \\ y_u & y_v & (z\lambda) - (x\nu) \\ z_u & z_v & (x\mu) - (y\lambda) \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$ [1]

Ist diese Bedingung erfüllt, so läßt sich die Funktion f folgendermaßen bestimmen:

Man differentiiert die erste der Gleichungen (5) nach u, woraus folgt:

$$\begin{aligned} (5a) \quad k(f_{uv} x_u + f_v x_{uu} - f_{uu} x_v - f_u x_{uv}) &= \nu_{uu} y_v + \nu_u y_{uv} \\ - \nu_{uv} y_u - \nu_v y_{uu} + \mu_{uv} z_u + \mu_v z_{uu} - \mu_{uu} z_v - \mu_u z_{uv} &= A', \end{aligned}$$

dieselbe Gleichung nach v, woraus sich ergibt:

$$\begin{aligned} (5b) \quad k(f_{vv} x_u + f_v x_{uv} - f_{uv} x_v - f_u x_{vv}) &= \nu_{uv} y_v + \nu_u y_{vv} \\ - \nu_{vv} y_u - \nu_v y_{uv} - \mu_{vv} z_u + \mu_v z_{uv} - \mu_{uv} z_v - \mu_u z_{vv} &= B', \end{aligned}$$

[1] Werte λ, μ, ν, welche dieser Bedingung genügen, lassen sich finden. Eingesetzt in die Determinante (6), ergibt deren Ausrechnung zugleich einschränkende Bestimmungen für jene Flächen, für welche diese Werte anwendbar sind. Setzt man z. B. $\lambda = X$, $\mu = Y$, $\nu = Z$, so folgt durch Ausrechnung aus (6), daß diese Substitution brauchbar ist für a) Minimalflächen, b) Tangentenflächen von Minimalkurven. Vgl. hiezu auch § 2.

isoliert hierauf f_{uv} aus (5a) und (5b), setzt die beiden so gefundenen Werte für f_{uv} einander gleich und erhält nach einiger Umformung;

$$(7\text{a})\quad k(f_{uu}x_v^2 - f_{vv}x_u^2 + f_u(x_v x_{uv} + x_u x_{vv}) - f_v(x_u x_{uv} + x_v x_{uu})) + A' x_v + B' x_u = 0.$$

Mit den zweiten und dritten Gleichungen (5) verfährt man ebenso, wodurch sich ergibt:

$$(7\text{b})\quad k(f_{uu}y_v^2 - f_{vv}y_u^2 + f_u(y_v y_{uv} + y_u y_{vv}) - f_v(y_u y_{uv} + y_v y_{uu})) + A'' y_v + B'' y_u = 0,$$

$$(7\text{c})\quad k(f_{uu}z_v^2 - f_{vv}z_u^2 + f_u(z_v z_{uv} + z_u z_{vv}) - f_v(z_u z_{uv} + z_v z_{uu})) + A''' z_v + B''' z_u = 0.$$

Schließlich erhält man durch Addition dieser drei Gleichungen (7) die partielle lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung zur Bestimmung von f und damit zur Ermittlung der einer Fläche S konformen und zugleich isogonalen Flächen S_2:

$$k(f_{uu}G - f_{vv}E + f_u F_v - f_v F_u) + \sum A' x_v + \sum B' x_u = 0.$$

Durch Variation 1: der Funktionen λ, μ, ν und damit der Funktion f, d. i. des Verhältnisses entsprechender Bogenelemente der Flächen S und S_2 einerseits,

2: des Wertes des konstanten Winkels ω und damit der Größe k anderseits ergeben sich spezielle Fälle der Flächenisogonalität.

§ 2.

Isometrisch-isogonale Flächen 2. Art.

In der Variation des Wertes der Funktion f ist von besonderem Interesse der Fall:

$$\frac{ds_2}{ds} = f(u, v) = \text{konstant}.$$

Wählt man speziell:

$$f = 1,$$

so ergibt sich hiermit: die Bestimmung der zu einer Fläche S isometrischen Fläche S_2 ist eine Teillösung der Aufgabe, die zu S isogonalen Flächen 2. Art zu ermitteln.

In diesem Falle der Isometrie erhalten die Gleichungen (5), S. 97 die Form:

$$(y\nu) - (z\mu) = 0$$
$$(z\lambda) - (x\nu) = 0$$
$$(x\mu) - (y\lambda) = 0.$$

Damit sind die Bestimmungsgleichungen für die Zulässigkeit von Werten λ, μ, ν aufgestellt. — Die im Folgenden angegebene Methode führt zur Darstellung der Punktkoordinaten x_2, y_2, z_2 von S_2 in integrabler Form, damit auch zur Ermittlung verwendbarer Werte λ, μ, ν in dieser Überlegung:

Die Gleichung (1a), S. 95, kann ersetzt werden durch das System der drei Gleichungen:

$$\text{(1b)} \qquad \begin{aligned} dx_2 &= (c\,dy - b\,dz + k\,dx)\frac{ds_2}{ds} \\ dy_2 &= (a\,dz - c\,dx + k\,dy)\frac{ds_2}{ds} \\ dz_2 &= (b\,dx - a\,dy + k\,dz)\frac{ds_2}{ds}. \end{aligned}$$

Dabei sind a, b, c Funktionen von u und v, mit deren diese Gleichungen befriedigenden Bestimmung die Lösung des Problems gegeben ist, wenn wir voraussetzen, daß die isogonalen Flächen S und S_2 in den korrespondierenden Punkten zugleich isometrisch sind, also das Verhältnis entsprechender Linienelemente $\frac{ds_2}{ds} = 1$[1]) ist.

Hierdurch erhalten wir aus Gleichung (1b):

$$\text{(1c)} \qquad \begin{aligned} dx_2 &= c\,dy - b\,dz + k\,dx \\ dy_2 &= a\,dz - c\,dx + k\,dy \\ dz_2 &= b\,dx - a\,dy + k\,dz. \end{aligned}$$

[1]) Die Annahme eines konstanten, aber von 1 verschiedenen Verhältnisses $\frac{ds_2}{ds} = \sigma$ der Linienelemente beider Flächen würde nur eine Maßstabsveränderung der Koordinaten der Fläche S_2 bedingen. Statt k wäre in den einschlägigen Formeln zu setzen: $k' = k \cdot \sigma$; $a' = a \cdot \sigma$; $b' = b \cdot \sigma$; $c' = c \cdot \sigma$. Da hiedurch keine wesentlich neuen Gesichtspunkte geschaffen würden, blieb dieser Fall unberücksichtigt.

Geometrisch betrachtet handelt es sich hier um Flächen, deren sämtliche entsprechende Kurven längentreu sind und bei welchen die Tangenten jener Kurven in korrespondierenden Punkten jeweils konstanten Winkel einschließen.

Kinematisch betrachtet, um die Angabe der Beziehungen zwischen zwei Flächen, auf welchen sich Punkte mit derselben Geschwindigkeit bewegen, wobei deren Bahntangenten sich unter gleichem Winkel schneiden.

Da $$dx = x_u\,du + x_v\,dv, \text{ u. s. f.},$$

so folgt:

$$x_{2u} = k\,x_u + c\,y_u - b\,z_u$$

$$x_{2v} = k\,x_v + c\,y_v - b\,z_v \tag{2}$$

nebst den analogen Formeln für y und z.

Unter Berücksichtigung der durch Voraussetzung der Isometrie der beiden Flächen geltenden Formeln:

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum x_{2u}^2 &&= E \\ F_2 &= \sum x_{2u}\,x_{2v} &&= F \\ G_2 &= \sum x_{2v}^2 &&= G \end{aligned}$$

ergibt sich durch Quadrieren der Gleichung (2) für $x_2 u$:

$$E(1 - k^2) = E(a^2 + b^2 + c^2) - (a\,x_u + b\,y_u + c\,z_u)^2.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn man setzt:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 - k^2 = \sin^2\omega$$

$$a\,x_u + b\,y_u + c\,z_u = 0.$$

Bezeichnet man:

$$a = \pm\sqrt{1 - k^2}\,\bar a; \quad b = \pm\sqrt{1 - k^2}\,b; \quad c = \pm\sqrt{1 - k^2}\,\bar c,$$

so folgt: die Gerade mit den Richtungskosinus $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ steht senkrecht zur Tangente an die Parameterkurve $v =$ konstant der Fläche S.

Analog ergibt sich aus der Gleichung (2) für x_{2v}:

$$G(1 - k^2) = G(a^2 + b^2 + c^2) - (a\,x_v + b\,y_v + c\,z_v)^2,$$

hieraus:

$$\bar a^2 + b^2 + c^2 = 1 - k^2$$

$$a\,x_v + b\,y_v + c\,z_v = 0,$$

d. h.: Die Gerade mit den Richtungskosinus $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ steht auch senkrecht zur Tangente an die Parameterkurve $u =$ konstant der Fläche S, also senkrecht zu der durch diese beiden Tangenten bestimmten Berührungsebene an S in P: sie ist parallel der Flächennormalen von S in P.

Somit erhält man:

$$x_{2u} = k x_u \pm \sqrt{1 - k^2}\,(y_u Z - z_u Y);$$
$$x_{2v} = k x_v \pm \sqrt{1 - k^2}\,(y_v Z - z_v Y).$$

Außerdem muß sein:

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 x_2}{\partial v\, \partial u}$$
$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 y_2}{\partial v\, \partial u}.$$

Diese Bedingungen sind, wie sich nach Einsetzen der Werte von a, b, c durch Ausrechnen ergibt, erfüllt, wenn die Beziehungen gelten:

$$(y_u z_v - z_u y_v)(EN - 2FM + GL) = 0$$
$$(z_u x_v - x_u z_v)(EN - 2FM + GL) = 0$$
$$(x_u y_v - y_u x_v)(EN - 2FM + GL) = 0.$$

d. h. Isogonal-isometrische Flächen von S können angegeben werden:

a) wenn:

$$X = Y = Z = 0,$$

demnach auch:

$$\sqrt{D} = \sqrt{EG - F^2} = 0,$$

also für Tangentenflächen von Minimalkurven, insbesondere Nullkugeln, Zylinder von Minimalgeraden;

b) wenn:

$$EN - 2FM + GL = 0,$$

d. h. die mittlere Krümmung H von S gleich 0, S also eine Minimalfläche ist.

Die Darstellung der rechtwinkeligen Koordinaten der isogonal-isometrischen Fläche S_2 erfordert demnach nur eine Quadratur:

$$(3) \qquad x_2 = \int [k x_u \pm \sqrt{1 - k_2}\,(Z y_u - Y z_u)]\, du + [k x_v \pm \sqrt{1 - k^2}\,(Z y_v - Y z_v)]\, dv;$$

y_2 und z_2 haben die durch Vertauschung von x mit y, z; X mit Y, Z hervorgehenden Werte.

Diese drei Gleichungen (3) für x_2, y_2, z_2 geben die Einordnung des besonderen Falles der Isometrie in die allgemeine Problemstellung, wenn man in Gleichung (2a) und Gleichung (4a), S. 96, setzt:

$$f = 1;$$
$$l = \lambda = a = \pm \sqrt{1 - k^2}\, X$$
$$m = \mu = b = \pm \sqrt{1 - k^2}\, Y$$
$$n = \nu = c = \pm \sqrt{1 - k^2}\, Z.$$

§ 3.

Zusammenhang der Isogonal-Isometrie mit Flächenverbiegung.

Schon die von Moutard[1]) gegebene geometrische Deutung der Grundgleichung der unendlich kleinen Verbiegung von Flächen (Orthogonalität entsprechender Linienelemente zweier Flächen) ließ einen engeren Zusammenhang zwischen Isogonalität im allgemeinen (ohne Beschränkung auf den rechten Winkel) und Flächendeformation vermuten. Die nun folgenden Ausführungen erbringen den Nachweis dieser Beziehung isogonaler Isometrie mit der Verbiegung von Flächen:

Die zu deformierende Fläche sei S, die durch Verbiegung aus ihr hervorgehende Fläche S_0 mit den rechtwinkeligen Koordinaten x_0, y_0, z_0 ihrer Punkte P_0. Wird die Fläche S einer Deformation unterworfen, so gehen x, y, z über in

$$x + \varepsilon x_2, \quad y + \varepsilon y_2, \quad z + \varepsilon z_2,$$

wo ε eine Konstante bedeutet und x_2, y_2, z_2 zu bestimmende Funktionen von u und v sind.

---

1) Vgl. Moutard, Sur la déformation des surfaces, Bulletin de la Société Philomathique, 1869. S. 45, ferner Mémoire et Note, Comptes rendus, 70. Band, S. 834.

Die Punkte P_0 der durch Verbiegung aus S erhaltenen Fläche S_0 besitzen demnach die Koordinaten:

$$x_0 = x + \varepsilon x_2, \quad y_0 = y + \varepsilon y_2, \quad z_0 = z + \varepsilon z_2.$$

Die Bedingung einer Deformation ohne Zerrung ist gegeben durch die Gleichung:

$$ds_0 = ds,$$

d. h.

$$ds_0^2 = ds^2 + \varepsilon^2 ds_2^2 + 2\varepsilon(dx\,dx_2 + dy\,dy_2 + dz\,dz_2),$$

woraus durch Umformung folgt:

$$(1) \qquad \left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx_2}{ds_2} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{dy_2}{ds_2} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{dz_2}{ds_2}\right)\cdot\frac{ds}{ds_2} = -\frac{\varepsilon}{2}.$$ [1])

Setzen wir voraus, daß:

$$\frac{ds}{ds_2} = 1$$

(bzw. $= c_0$, wo c_0 eine beliebige[2]) Konstante bedeutet),

d. h. daß die Flächen S und S_2 isometrisch bzw. konform sind, so erhalten wir aus Gleichung (1) die Beziehung:

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx_2}{ds_2} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{dy_2}{ds_2} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{dz_2}{ds_2} = \text{konstant}$$

oder:

$$\alpha\cdot\alpha_2 + \beta\cdot\beta_2 + \gamma\cdot\gamma_2 = \text{konstant}.$$

Diese Relation ist vollkommen identisch mit der Grundgleichung der Isogonalität von Linienelementen, Gl. (1), S. 94, d. h. die Bestimmung der Komponenten x_2, y_2, z_2 der rechtwinkeligen Projektionen des die Deformation der Fläche S charakterisierenden Verschiebungsvektors auf die Koordinatenachsen ist gleichbedeutend mit Angabe der rechtwinkeligen Punktkoordinaten der zur Fläche S isogonalen und isometrischen bzw. ähnlichen Fläche S_2.

---

[1]) Diese Gleichung wurde, soweit der Verf. bekannt ist, aus der Forderung stetiger Verbiegung bis jetzt noch nie abgeleitet. Vgl. z. B. Hugo Dingler, Dissertation: Beiträge zur Kenntnis der infinitesimalen Deformation einer Fläche. München 1907, S. 6.

[2]) Bei gegebenem ε ist die Größe c_0 limitiert — und umgekehrt —, da für $\cos\omega$ (ω Winkel entsprechender Linienelemente) die Beziehung bestehen muß:

$$-1 \leq \cos\omega \leq +1.$$

§ 4.

Zusammenhang der Isogonal-Isometrie mit dem Problem assoziierter Minimalflächen.

Die Berechnung der Richtungskosinus der Normalen der Fläche S_2 ergibt, unter Berücksichtigung der Formeln für x_{2u}, y_{2u}, z_{2u} (Gl. 3, S. 102), enthaltend die Voraussetzung der Isometrie, daß:

$$X_2 = X, \quad Y_2 = Y, \quad Z_2 = Z,$$

d. h. die Normalen der zu S isogonal-isometrischen Fläche S_2 sind parallel den Normalen von S in den entsprechenden Punkten.

Für die Fundamentalgrößen 2. Ordnung von S_2 erhält man die Werte:

$$L_2 = kL \pm \sqrt{\frac{1-k^2}{D}}\,(EM - FL),$$

$$M_2 = kM \pm \sqrt{\frac{1-k^2}{D}}\,(FM - GL) = kM \mp \sqrt{\frac{1-k^2}{D}}\,(EN - FM),$$

$$N_2 = kN \pm \sqrt{\frac{1-k^2}{D}}\,(FN - GM).$$

Für die mittlere Krümmung errechnet man:

$$H_2 = kH \pm \sqrt{\frac{1-k^2}{D}}\,FH.$$

Das Krümmungsmaß ergibt sich zu:

$$K_2 = K + (1-k^2)(FM - GL)\frac{H}{D^2} \pm k\sqrt{1-k^2}\,\frac{MH}{D^{3/2}}$$

oder:

$$K_2 = K + (1-k^2)(EN - FM)\frac{H}{D^2} \pm k\sqrt{1-k^2}\,\frac{MH}{D^{3/2}}.$$

Die Einschränkung der Zulässigkeit der Formeln für isogonale Isometrie auf die Tangentenflächen von Minimalkurven, für welche die Definition der Fundamentalgrößen 2. Ordnung, bzw. der Krümmung K versagt, und auf die Minimalflächen, bei welchen:

$$H = 0,$$

ergibt, daß die Flächen S_2 wieder Tangentenflächen von Minimalkurven bzw. Minimalflächen (diese selbstverständlich mit jeweils gleicher totaler Krümmung $K_2 = K$) sind. Dieselben Beziehungen ergeben die Ausrechnungen für die entsprechenden Größen der deformierten Fläche, der Fläche S_0.

Es ist also: $$X_0 = X_2 = X \text{ u. s. f.}$$ $$K_0 = K_2 = K$$

sowohl für die Tangentenflächen von Minimalkurven — soferne bei diesen von Normalenrichtung gesprochen werden kann, — wie für die Minimalflächen.

Für letztere gilt ferner:

$$H_0 = H_2 = H = 0,$$

d. h. das Problem der isogonal-isometrischen Flächen schließt in sich die Frage nach der Bestimmung der einer Minimalfläche assoziierten Minimalflächen. Der analytische Gang der Berechnungen der einzelnen Größen aus der Grundgleichung isogonaler Isometrie beweist hier die Richtigkeit der Umkehrung der von Bonnet[1]) über diese Flächen aufgestellten Sätze.

§ 5.

Verallgemeinerung der Darbouxschen und Weingartenschen Lösung für die Bestimmung von Orthogonalflächen.

Die Variation des Winkels ω ergibt Spezialfälle im Hinblick auf den Winkel entsprechender Linienelemente der beiden Flächen S und S_2 und zwar:

Die Flächen mit parallelen korrespondierenden Bogenelementen, wenn $\omega = 0$, $k = 1$;

jene mit orthogonalen entsprechenden Linienelementen, wenn

$$\omega = \frac{\pi}{2}, \; k = 0.$$

[1]) O. Bonnet, Comptes rendus, Paris, Band 37 (1853), S. 529—532. G. Darboux, Leçons sur la Théorie générale des Surfaces, Band 1, S. 324 bis 326: „Die Gleichungen für die Koordinaten $x_1\ y_1\ z_1$ eines Punktes P_1 einer Minimalfläche S_1, assoziiert der Minimalfläche S mit den Punkten $P(x, y, z)$, korrespondierend irgend einem Werte ω, drücken sich, wenn $\overline{P}_1(\overline{x}_1, \overline{y}_1, \overline{z}_1)$ die Punkte der zu S adjungierten Minimalfläche $\overline{S}_1$ sind, folgendermaßen aus: $x_1 = x \cos\omega + \overline{x}_1 \sin\omega$" u. s. f., wobei: $d\overline{x}_1 = Y dz - Z dy$ u. s. f. Vgl. damit die vollständig gleichlautenden Gleichungen (3), S. 102. Schwarz, Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen. Crelles Journal, Band 80, 1875, S. 287 ff.

a) In den Grundgleichungen isogonaler Isometrie Gl. (1 c) S. 99 ist demnach die Verallgemeinerung des von Darboux[1]) behandelten Problems gegeben: „Die zu S orthogonalen Flächen S_1 aus der Gleichung:

$$dx \cdot dx_1 + dy \cdot dy_1 + dz \cdot dz_1 = 0$$

zu bestimmen."

Entsprechend den bei Darboux durchgeführten, als erste Lösung bezeichneten Betrachtungen verfährt man zur Lösung der Gleichungen (1 c) wie folgt:

Die Fläche S ist vorausgesetzt in der Form: $z = f(x, y)$. Zur Darstellung der Fläche S_2 benützen wir die Gleichungen (1 c) S. 99 und setzen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} dx_2 - k\,dx &= d(x_2 - kx) = dx_3, \\ dy_2 - k\,dy &= d(y_2 - ky) = dy_3, \\ dz_2 - k\,dz &= d(z_2 - kz) = dz_3, \end{aligned}$$

setzen auch z_3 (wie z und z_2) als Funktion von x und y voraus und bezeichnen die ersten Ableitungen hievon mit p_3 und q_3.

Durch Gleichsetzung von

$$dz_3 = b\,dx - a\,dy \text{ und } dz_3 = p_3\,dx + q_3\,dy$$

folgt, daß:

$$\begin{aligned} a &= -q_3, \\ b &= p_3. \end{aligned}$$

Ersetzt man in den Gleichungen (1 c) S. 99 dz durch $p\,dx + q\,dy$, so nehmen die Ausdrücke für dx_3 und dy_3 folgende Form an:

$$(2) \qquad \begin{aligned} dx_3 &= \quad dy\,(c - p_3 q) - p p_3\,dx, \\ dy_3 &= -dx\,(p q_3 + c) - q q_3\,dy. \end{aligned}$$

Die Integrabilitätsbedingung ergibt:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial (c - q p_3)}{\partial x} + \frac{\partial (p p_3)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial (q q_3)}{\partial x} - \frac{\partial (c + p q_3)}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

[1]) G. Darboux, a. a. O., Bd. 4, S. 10–18.

Eliminiert man c durch neue Ableitungen, so findet man:

$$\frac{\partial^2 (p p_3)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (q q_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (p q_3 + q p_3)}{\partial x \partial y} = 0,$$

oder, entwickelnd und mit r_3, s_3, t_3 die zweiten Ableitungen von z_3 bezeichnend:

$$r t_3 + t r_3 - 2 s s_3 = 0. \tag{4}$$

Die Integration dieser partiellen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung ergibt z_3; die Gleichungen (3) liefern die zwei Ableitungen von c; aus den Gleichungen (2) erhält man durch Quadraturen von totalen Differentialen mit zwei Variablen die Werte von x_3, y_3 und hieraus durch Addition aus den Gleichungen (1) x_2, y_2, z_2. Es ist also die Behandlung des Problems isogonaler Isometrie auf die Integration der Gleichung (4) zurückgeführt.

b) Zum Schlusse sei noch eine Lösungsart zur Bestimmung der einer Fläche S isogonalen Flächen S_2 angegeben, welche die Weingartenschen[1]) Ausführungen über die Berechnung der die unendlich kleine Deformation von Flächen charakterisierenden Funktion φ benützt und durch folgende Überlegung gegeben ist:

Unter Beibehaltung der bislang benützten Bezeichnungen für die Flächen S und S_2 ergeben die Gleichungen (2), (3), (4), S. 96, die von Weingarten für die charakteristische Funktion φ errechneten Beziehungen, wenn wir setzen:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_{1u} &= x_{2u} - k f x_u, \\ \tilde{\xi}_{1v} &= x_{2v} - k f x_v \end{aligned} \tag{5}$$

nebst den analogen Gleichungen für $\tilde{\eta}_1$ und $\tilde{\zeta}_1$, welche durch gleichzeitige Vertauschung von $\tilde{\xi}_1$ und x mit $\tilde{\eta}_1$ und y, $\tilde{\zeta}_1$ und z hervorgehen.

Wir erhalten hieraus durch Differentiierung der ersten Gleichung (5) nach v, der zweiten nach u und Gleichsetzung der so gefundenen zwei Werte für $\frac{\partial^2 \tilde{\xi}_1}{\partial u \partial v}$ $\left(\text{bzw. } \frac{\partial^2 \tilde{\eta}_1}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}_1}{\partial u \partial v}\right)$: Die

[1]) Vgl. Weingarten, Crelles Journal, 100. Band. Bianchi-Lukat, Vorlesungen über Differentialgeometrie, S. 294—297.

durch die obigen, für diese Lösungsart richtunggebenden Gleichungen (5) gewählte Substitution ist demnach nur zulässig, wenn für die Flächen S die Beziehung gilt:

$$1)\quad f_u = f_v = 0,$$

d. h. wenn $f =$ konstant ist, die entsprechenden Linienelemente beider Flächen in konstantem Längenverhältnis zueinander stehen, die Flächen S und S_2 isometrisch oder ähnlich sind.

$$2)\quad \frac{x_v}{x_u} = \frac{y_v}{y_u} = \frac{z_v}{z_u},$$

d. h. wenn die Flächen S Tangentenflächen von Minimalkurven sind.

Im Falle 1) ist die Berechnung von x_2, y_2, z_2 durch Integration gegeben in den Gleichungen:

$$(6)\qquad x_2 = \int (\xi_{1u} + kfx_u)\,du + (\xi_{1v} + kfx_v)\,dv \quad \text{u. s. f.}$$

Im Falle 2) kann man dann setzen:

$$f_v = f_u \frac{x_v}{x_u},$$

$$f_u = f_v \frac{y_u}{y_v}.$$

Differentiieren wir die erste dieser Gleichungen nach u, die zweite nach v, und setzen die beiden so erhaltenen Werte für $\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}$ einander gleich, so ergibt sich zur Bestimmung von f die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{x_v}{x_u} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{y_u}{y_v} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial\left(\frac{x_v}{x_u}\right)}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial\left(\frac{y_u}{y_v}\right)}{\partial v} = 0$$

und durch Quadratur nach Gl. (5) die Berechnung von x_2, y_2, z_2.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1927

Band/Volume: 1927

Autor(en)/Author(s): Kapfer Josephina

Artikel/Article: Über isogonale Flächen 2. Art 93-108