Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1927. Heft III
November-Dezembersitzung

München 1927
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über die Oszillationstheoreme der konjugierten Punkte beim Problem von Lagrange.

Von **Johann Radon** in Erlangen.

Vorgetragen in der Sitzung am 5. Nov. 1927.

Beim einfachsten Problem der Variationsrechnung gelten über die Lage der „konjugierten Punkte" eine Reihe von Aussagen, die in den Sturm'schen Sätzen über die Lösungen einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung wurzelnd, als Oszillationstheoreme bezeichnet werden können. Die Übertragung dieser Sätze auf das allgemeine Problem von Lagrange begegnet ernstlichen Schwierigkeiten. Zum erheblichen Teil sind diese zuerst von G. v. Escherich überwunden worden. In Bolzas „Vorlesungen über Variationsrechnung"[1]) werden die Oszillationstheoreme auf dem Umweg über die Theorie der zweiten Variation hergeleitet und der Mangel eines direkten Beweises betont. Das trifft nun freilich meiner Meinung nach nicht ganz das rechte; wenn man den Beweisgang von G. v. Escherich[2]) genauer verfolgt, so sieht man, dass er gänzlich ohne Zusammenhang mit der Theorie der 2. Variation dargestellt werden kann. Nur sind seine Entwicklungen wenig durchsichtig, was übrigens unvermeidlich scheint, wenn man von den Lagrange-Eulerschen Gleichungen ausgeht, und verwenden, was ebenfalls unvermeidlich scheint, Hilfsmittel, die gleichzeitig auch zur Transformation der 2. Variation dienen. So kann leicht der Eindruck entstehen, die Theorie der 2. Variation sei für die Beweismethoden von v. Escherich wesentlich.

---

[1]) Leipzig und Berlin 1909. — § 76 g).

[2]) Wiener Berichte Bd. 107 u. 108. Insbesondere Bd. 108, S. 1269—1340.

Im folgenden suche ich diese Dinge in einer möglichst durchsichtigen Form darzustellen; dazu verhilft zweierlei: einmal gehe ich von Hamiltons kanonischer Form der Gleichungen der Variationsrechnnng aus und dann mache ich reichlichen Gebrauch vom Matrizenkalkül. Der erste Umstand bringt von vornherein eine große formale Symmetrie und Übersichtlichkeit in das ganze Gebiet herein, der zweite gestaltet möglichste Kürze der Schreibweise. Als charakteristische Beispiele möchte ich auf meine Formel (7) verweisen, die dem Wesen nach dasselbe ist, wie die „Fundamentalformel" von v. Escherich[1]) und auf Formel (8), die auch formal sofort als direkte Verallgemeinerung des folgenden Sachverhaltes erscheint:

Sind u_1, u_2 zwei in bestimmter Weise normierte Lösungen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right)+q(x)\,u=o$$

so gilt:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u_2}{u_1}\right)=\frac{p(x)}{u_1^2}.$$

Als wesentlicher sachlicher Fortschritt meiner Betrachtung über G. v. Escherichs Resultate hinaus ist Satz 3 anzusehen, den G. v. Escherich in seinen ersten Abhandlungen[2]) bewiesen zu haben glaubte, wie er aber später selbst bemerkt hat[3]), mit Unrecht. Durch diesen Satz wird erst die volle Abrundung erreicht und der Beweis der Sätze 4—6 ermöglicht.

Was die Darstellungsform angeht, schien es mir am besten, zunächst von jeder Beziehung zur Variationsrechnung abzusehen und meine Sätze rein als Oszillationstheoreme über ein gewisses System von linearen homogenen Differentialgleichungen zu formulieren und zu beweisen. Am Schlusse der Arbeit wird dann die Brücke zur Variationsrechnung geschlagen.

1. Ich stelle zuerst kurz die im folgenden verwendeten Bezeichnungen und Regeln der Matrizenrechnung zusammen. Es werden auftreten:

---

[1]) Vgl. Bolza, Vorlesungen, S. 630.

[2]) Wiener Berichte, Bd. 107, S. 1410.

[3]) Ebenda, Bd. 108, S. 1269 f.

a) einreihige Matrizen aus n Zahlen; Bezeichnung:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad \text{usw.}$$

b) n-reihige quadratische Matrizen; Bezeichnung:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(die Einheitsmatrix).}$$

c) $2n$-reihige quadratische Matrizen; wir zerlegen sie immer in 4 Teilfelder, in deren jedem eine Matrix vom Typus b) steht, z. B. bedeutet:

$$\begin{pmatrix} A & M \\ P & \Sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} & \mu_{11} & \dots & \mu_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nn} & \mu_{n1} & \dots & \mu_{nn} \\ \varrho_{11} & \dots & \varrho_{1n} & \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varrho_{n1} & \dots & \varrho_{nn} & \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Transponierte einer Matrix A wird mit A' bezeichnet; das Zeichen $'$ wird also im folgenden **niemals** zur Bezeichnung von Differentialquotienten verwendet. Es ist z. B.

$$\alpha' = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n); \quad \begin{pmatrix} A & M \\ P & \Sigma \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A' & P' \\ M' & \Sigma' \end{pmatrix}, \quad (A\,B)' = B'A'.$$

Das Produkt von Matrizen bezeichnen wir in üblicher Weise; es ist z. B.

$$\alpha' \, A \, \beta = \beta' \, A' \, \alpha$$

die Bilinearform $a_{ik} \, \alpha_i \, \beta_k$, sie geht durch die Substitutionen:

$$\alpha = \Gamma_1 \, \bar{\alpha}, \quad \beta = \Gamma_2 \, \bar{\beta}$$

in die Form:

$$\bar{\alpha}' \, \Gamma_1' \, A \, \Gamma_2 \, \bar{\beta}$$

über.

Bei der Multiplikation von Matrizen des Typus c) kann wie bei der gewöhnlichen Multiplikationsregel verfahren werden:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & M \\ P & \Sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA + BP & AM + B\Sigma \\ \Gamma A + \Lambda P & \Gamma M + \Lambda\Sigma \end{pmatrix}.$$

Differentiation einer Matrix, deren Elemente Funktionen von x sind, bedeutet Ersetzung ihrer sämtlichen Elemente durch ihre Differentialquotienten; es gilt die Regel:

$$\frac{d(AB)}{dx} = \frac{dA}{dx} B + A \frac{dB}{dx}$$

und für die Ableitung der Reziproken A^{-1} der quadratischen Matrix A findet man leicht:

$$\frac{dA^{-1}}{dx} = -A^{-1} \frac{dA}{dx} A^{-1}.$$

2. Es sei vorausgeschickt, daß sich alle folgenden Betrachtungen im Gebiete der reellen Zahlen bewegen. Ferner benutzen wir ausnahmslos die bekannte Regel, bei Summierung über doppelt auftretende Stellenzeiger das Summenzeichen zu unterdrücken.

Wir betrachten das System linearer Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_i}{dx} &= \beta_{ki}(x)\,\eta_k + \gamma_{ki}(x)\,\pi_k, \quad \gamma_{ik} = \gamma_{ki}, \\ \frac{d\pi_i}{dx} &= -\alpha_{ik}(x)\eta_k - \beta_{ik}(x)\pi_k, \; \alpha_{ik} = \alpha_{ki}, \end{aligned} \qquad i, k = 1, 2 \,.\,.\, n \tag{1}$$

Wir können es in der Matrizenschreibweise kurz so anschreiben:

$$\frac{d\eta}{dx} = B'\eta + \Gamma\pi, \frac{d\pi}{dx} = -A\eta - B\pi, (A, \Gamma \text{ symmetrisch}) \tag{1'}$$

Die Koeffizienten α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} setzen wir in einem offenen x-Intervalle (a, b), auf das wir uns im folgenden durchaus beschränken, als stetig voraus. Da nach (1′) auch:

$$\frac{d\eta'}{dx} = \eta' B + \pi' \Gamma, \quad \frac{d\pi'}{dx} = -\eta' A - \pi' B',$$

so folgt leicht, daß für irgend zwei Lösungen $\begin{pmatrix}\eta^1\\ \pi^1\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}\eta^2\\ \pi^2\end{pmatrix}$ von (1) die Beziehung gilt:

$$\frac{d}{dx}(\eta^{1'}\pi^2 - \pi^{1'}\eta^2) = o, \text{ also } \eta^{1'}\pi^2 - \pi^{1'}\eta^2 = \text{const.} \tag{2}$$

Schreibt man jetzt ein beliebiges System von $2n$ Lösungen von (1) in Form einer Matrix:

$$\begin{pmatrix} \eta_1^1 & \dots\dots & \eta_1^{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta_n^1 & \dots\dots & \eta_n^{2n} \\ \pi_1^1 & \dots\dots & \pi_1^{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \pi_n^1 & \dots\dots & \pi_n^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

so folgt aus (2), daß die Elemente des Matrizenproduktes:

$$\begin{pmatrix} \Pi_2', & -H_2' \\ -\Pi_1' & H_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

sämtlich konstant sind. Unser Augenmerk ist nun im folgenden ausschließlich auf den Fall gerichtet, daß dieses Matrizenprodukt die $2n$-reihige Einheitsmatrix

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

liefert. Das Lösungssystem (3) soll in diesem Falle ein ausgezeichnetes heißen. Da seine Determinante gewiß nicht verschwindet, so ist ein ausgezeichnetes Lösungssystem gewiß ein Fundamentalsystem für (1). Speziell erhält man ein ausgezeichnetes Lösungssystem durch die Forderung, daß an irgend einer Stelle x_0 von (a, b) die Teilmatrizen von (3) die speziellen Werte annehmen:

$$H_1(x_0) = E, \quad H_2(x_0) = 0, \quad \Pi_1(x_0) = 0, \quad \Pi_2(x_0) = E$$

Dieses spezielle ausgezeichnete Lösungssystem nennen wir kurz das zu x_0 gehörige normierte Lösungssystem.

Nach der Definition der ausgezeichneten Lösungssysteme gilt für ein solches:

$$\begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \Pi_2' & -H_2' \\ -\Pi_1' & H_1' \end{pmatrix} \tag{5}$$

Bildet man das Produkt (4) in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man also wieder die Einheitsmatrix; daraus folgt im besonderen:

$$H_1 H_2' - H_2 H_1' = 0, \tag{6}$$

d. h. $H_1 H_2'$ ist symmetrisch.

Weiter kann man aus (1') entnehmen:

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B' & \Gamma \\ -A & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 \end{pmatrix}$$

und daraus folgt für jedes ausgezeichnete System:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dH_1}{dx} & \dfrac{dH_2}{dx} \\[2mm] \dfrac{d\Pi_1}{dx} & \dfrac{d\Pi_2}{dx} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Pi_2' & -H_2' \\ -\Pi_1' & H_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B' & \Gamma \\ -A & -B \end{pmatrix},$$

woraus wir speziell:

$$\frac{dH_2}{dx}\Pi_1' - \frac{dH_1}{dx}\Pi_2' = \Gamma \tag{7}$$

erhalten.

Durch Differentiation von (6) oder aus der Symmetrie von Γ folgt noch:

$$\Pi_1 \frac{dH_2'}{dx} - \Pi_2 \frac{dH_1'}{dx} = \Gamma \tag{7'}.$$

3. Wir führen jetzt die besonderen Voraussetzungen ein, die zur Herleitung unserer Oszillationstheoreme nötig sind.

I. Γ ist für alle x in (a, b) die Matrix einer semidefiniten oder definiten Form. Wir werden diese im folgenden stets als positiv annehmen, was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet (man ändere im anderen Falle bloß die Vorzeichen aller π).

II. Es existiert keine Lösung von (1), für die alle η in einem Teilintervall von (a, b) sämtlich Null sind, außer der trivialen Lösung $\eta = 0$, $\pi = 0$.

Aus II. folgt, daß für jede Lösung von (1) die π durch die zugehörigen η schon in jedem Teilintervalle von (a, b) eindeutig bestimmt sind. Wenn wir aber im folgenden z. B. eine Lösungsmatrix H haben, so ist das zugehörige Π völlig bestimmt. Wir sprechen daher im folgenden kurz von einem ausgezeichneten Lösungssystem $(H_1 H_2)$ usw. Ein System von n Lösungen von (1), das durch eine quadratische Matrix H_1 dargestellt wird, soll konjugiert heißen, wenn es eine zweite Matrix H_2 gibt, sodaß $(H_1 H_2)$ ein ausgezeichnetes Lösungssystem ist. H_2 ist dann auch ein konjugiertes System, denn mit (H_1, H_2)

ist auch $(H_2, -H_1)$ ausgezeichnet. Ein Kriterium für konjugierte Systeme benötigen wir im folgenden nicht; daher unterdrücken wir den unschwer zu führenden Beweis des Satzes:

H_1 ist dann und nur dann ein konjugiertes System, wenn es mit dem zugehörigen H_1 die Bedingung $H_1' H_1 - H_1' H_1 = 0$ erfüllt.

4. Wir beweisen jetzt:

Satz 1. In dem Teilintervalle (α, β) von (a, b) sei die Determinante des konjugierten Systems H_1 von Null verschieden. Dann gibt es keine Lösung von (1), für welche sämtliche η an zwei Stellen x_1, x_2 von (α, β) den Wert Null annehmen, ohne zwischen x_1 und x_2 identisch Null zu sein.

Wir ergänzen das konjugierte System H_1 zu einem ausgezeichneten Lösungssystem $(H_1\, H_2)$ und betrachten die Matrix:

$$\Theta(x) = H_1^{-1} H_2,$$

die in (α, β) sicher existiert. Zunächst folgt aus (6) leicht, daß $\Theta(x)$ symmetrisch ist. Wir berechnen nun die Ableitung von $\Theta(x)$ und erhalten auf Grund von (6) und (7) sukzessive:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Theta}{dx} &= -H_1^{-1} \frac{dH_1}{dx} H_1^{-1} H_2 + H_1^{-1} \frac{dH_2}{dx} \\
&= -H_1^{-1} \frac{dH_1}{dx} \Theta + H_1^{-1} \frac{dH_2}{dx} \\
&= -H_1^{-1} \frac{dH_1}{dx} H_2' H_1^{-1'} + H_1^{-1} \frac{dH_2}{dx} \\
&= H_1^{-1} \left(\frac{dH_2}{dx} H_1' - \frac{dH_1}{dx} H_2'\right) H_1^{-1'}
\end{aligned}$$

$$\frac{d(H_1^{-1} H_2)}{dx} = H_1^{-1}\, \Gamma\, H_1^{-1'} \tag{8}$$

Nehmen wir jetzt an, für eine nicht-triviale Lösung von (1) verschwinden in x_1 und x_2 sämtliche η. Da $(H_1\, H_2)$ ein Fundamentalsystem ist, so gibt es $2n$ Konstante $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, $\beta_1 \ldots \beta_n$, sodaß:

$$\begin{aligned}
H_1(x_1)\,\alpha + H_2(x_1)\,\beta &= 0 \\
H_1(x_2)\,\alpha + H_2(x_2)\,\beta &= 0
\end{aligned}
\quad \text{oder} \quad
\begin{aligned}
\alpha + \Theta(x_1)\,\beta &= 0 \\
\alpha + \Theta(x_2)\,\beta &= 0
\end{aligned}$$

Man sieht hieraus, daß die β nicht sämtlich Null sein können. Nun ist:

$$0 = \beta' \, \Theta(x_2)\,\beta - \beta' \, \Theta(x_1)\,\beta = \int_{x_0}^{x_1} \beta' \, H_1^{-1} \, \Gamma \, H_1^{-1'} \, \beta \, dx \geqq 0$$

wegen des positiven Charakters von Γ. Man erkennt sofort, daß der Integrand identisch Null sein muß. Aus

$$\beta' \, H_1^{-1} \, \Gamma \, H_1^{-1'} \, \beta = 0$$

folgt aber, weil Γ positiven Charakter hat,

$$H_1^{-1'} \, \Gamma \, H_1^{-1'} \, \beta = 0, \quad \text{also} \quad \frac{d\,(\Theta \beta)}{dx} = 0.$$

Folglich müßte zwischen x_1 und x_2 beständig

$$\Theta(x)\,\beta + \alpha = 0$$

gelten, dann würden aber die η zwischen x_1 und x_2 identisch verschwinden, w. z. b. w.

Es sei ausdrücklich darauf verwiesen, daß beim Beweise von Satz 1 die Voraussetzung II nicht zur Verwendung gelangt ist.

Satz 2. Bedeutet $(H_1 \, H_2)$ das zur Stelle x_0 gehörige normierte Lösungssystem, so hat die Determinante $|H_2|$, deren Elemente in x_0 alle Null sind, in x_0 eine isolierte Nullstelle.

Der Satz ist eine einfache Folgerung aus Satz 1 und der Voraussetzung II. Da nämlich H_1 ebenfalls ein konjugiertes System vorstellt und $|H_1(x_0)| = 1$ ist, zeigt die Anwendung von Satz 1 auf ein Intervall um x_0, in welchem $|H_1| \neq 0$, daß für keine Lösung von (1) sämtliche η in x_0 und einem benachbarten Punkte Null sein können, ohne identisch zu verschwinden. Wäre aber $|H_2(\xi)| = 0$, so könnte man die Konstanten α so wählen, daß sie nicht alle Null sind und:

$$H_2(\xi)\,\alpha = 0.$$

Nach der eben gemachten Bemerkung müßte dann $H_2(x)\,\alpha$ in der Umgebung von x_0 identisch Null sein und wir hätten im Widerspruch zu der Voraussetzung II in $H_2\,\alpha$, $H_2\,\alpha$ eine nichttriviale Lösung von (1) vor uns, deren sämtliche η in einem Intervalle identisch verschwinden.

5. Wesentlich wird die Voraussetzung II auch beim Beweise von:

Satz 3. Die Determinante $|H_1|$ eines konjugierten Systems kann in keinem Teilintervall von (a, b) identisch Null sein.

Sei $|H_1|$ in einem Intervalle δ von (a, b) identisch Null. Wenn dann ϱ der größte Wert ist, den der Rang von H_1 in δ annimmt, so gibt es offenbar ein Teilintervall δ' von δ, in welchem eine Determinante ϱ^{ter} Ordnung aus H_1 nicht verschwindet. In δ' ist dann H_1 beständig vom Range ϱ und das Gleichungssystem:

$$H_1' a = 0 \qquad (\text{oder } a' H_1 = 0) \tag{9}$$

besitzt $n - \varrho$ linear unabhängige Lösungen $a^{(1)} \ldots a^{(n-\varrho)}$, die als stetig differenzierbare Funktionen von x angenommen werden können.

Wir bilden jetzt für eine beliebige dieser Lösungen nach (7'):

$$a' \Gamma a = a' H_1 \frac{d H_1'}{dx} a - a' H_2 \frac{d H_1'}{dx} a = - a' H_2 \frac{d H_1'}{dx} a.$$

Aus (8) folgt aber:

$$\frac{d H_1'}{dx} a + H_1' \frac{d a}{dx} = 0, \tag{10}$$

sodaß wir erhalten:

$$a' \Gamma a = a' H_2 H_1' \frac{da}{dx}$$

und nach (6):

$$a' \Gamma a = a' H_1 H_2' \frac{da}{dx} = 0.$$

Da aber Γ die Matrix einer semidefiniten Form ist, schließen wir aus dem letzten Ergebnis sogleich:

$$\Gamma a = a' \Gamma = 0.$$

Nun liefert das System (1):

$$\frac{d H_1}{dx} = B' H_1 + \Gamma H_1$$

und wir erhalten:

$$a' \frac{d H_1}{dx} = a' B' H_1, \qquad \frac{d H_1'}{dx} a\, H_1' = B a$$

und nach (10):

$$H_1'\left(\frac{d\,a}{d\,x}+B\,a\right)=0.$$

Da demnach

$$\frac{d\,a}{d\,x}+B\,a$$

gleichzeitig mit a die Gleichungen (9) befriedigt, so ergibt sich:

$$\frac{d\,a^{(\nu)}}{d\,x}+B\,a^{(\nu)}=w^{(\nu,\,\mu)}\,a^{(\mu)},$$

wo die $w^{(\nu,\,\mu)}$ stetige Funktionen von x sind.

Bestimmen wir jetzt ein nicht-triviales Lösungssystem $u^{(1)}\,..\,u^{(n-\varrho)}$ der linearen Differentialgleichungen:

$$\frac{d\,u^{(\nu)}}{d\,x}+w^{(\mu,\,\nu)}\,u^{(\mu)}=0,$$

so genügt die Linearkombination der $a^{(\mu)}$:

$$a=u^{(\nu)}\,a^{(\nu)}$$

ebenfalls den Gleichungen (9) und es gilt für sie:

$$\frac{d\,a}{d\,x}+B\,a=u^{(\nu)}\frac{d\,a^{(\nu)}}{d\,x}+\frac{d\,u^{(\nu)}}{d\,x}\,a^{(\nu)}+u^{(\nu)}\,B\,a^{(\nu)}$$
$$=u^{(\nu)}\,w^{(\nu,\,\mu)}\,a^{(\mu)}-u^{(\mu)}\,w^{(\mu,\,\nu)}\,a^{(\nu)}=0.$$

Als Linearkombination aus den $a^{(\nu)}$ mit nicht durchaus verschwindenden Koeffizienten können die a nicht sämtlich Null sein.

Da wir nun gezeigt haben:

$$\Gamma\,a=0,\ \frac{d\,a}{d\,x}=-B\,a,$$

so stellt $\eta=0$, $\pi=a$ in δ' eine nicht-triviale Lösung von (1′) vor, für die alle η verschwinden. Nach II darf es keine solche geben, womit der Beweis beendet ist.

6. Wir kommen jetzt zum Begriff der **konjugierten Punkte**. Sei x_0 ein beliebiger Punkt aus $(a,\,b)$ und das zugehörige normierte Lösungssystem mit $(H_1\,H_2)$ bezeichnet. Eine Lösung von (1), deren η sämtlich in x_0 verschwinden, muß sich aus den in H_2 stehenden Lösungen linear mit konstanten Koeffizienten a kombinieren:

$$\eta=H_2\,a$$

und wenn die η noch in einem weiteren Punkt Null sein sollen, ohne identisch zu verschwinden, so muß dort $|H_2| = 0$ sein. Nach Satz 2 gibt es in (a, b) unter den Nullstellen von $|H_2|$, die $> x_0$ — wenn es überhaupt solche gibt — eine kleinste x_0', unter den Nullstellen $< x_0$ eine größte x_0''. Die erstere heißt der vordere, die letztere der hintere konjugierte Punkt von x_0. Es bedeutet also z. B. der vordere konjugierte Punkt x_0' die erste auf x_0 folgende Stelle, für die es ein Lösungssystem von (1) gibt, dessen η in x_0 und x_0' sämtlich Null sind, ohne identisch zu verschwinden. Analog beim hinteren konjugierten Punkt. Wir beweisen jetzt:

Satz 4. Ist $x_0 < x_1$ und existiert zu x_1 der vordere konjugierte Punkt x_1', so ist auch x_0' vorhanden und zwar gilt $x_0' < x_1'$. (Analog für den hinteren konjugierten Punkt unter Umkehrung der Ungleichheitszeichen).

Wir beweisen zuerst, daß $x_0' \leq x_1'$. Wäre x_0' nicht vorhanden oder $> x_1'$, so würde das zu x_0 gehörige normierte Lösungssystem (H_1, H_2) in H_2 ein konjugiertes System liefern, dessen Determinante für $x_1 \leq x \leq x_1'$ von Null verschieden wäre. Da es aber ein Lösungssystem von (1) gibt, dessen η in x_1 und x_1' Null sind, ohne identisch zu verschwinden, erhalten wir einen Widerspruch gegen Satz 1. Bis jetzt sind wir wieder ohne die Voraussetzung II ausgekommen.

Es ist nun noch der Fall $x_0' = x_1'$ auszuschließen. Bezeichnet ξ einen Wert zwischen x_0 und x_1, so zeigt die Anwendung des bereits Bewiesenen, daß ξ' existiert und $\leq x_1'$ sein muß, da $\xi < x_1$. Ebenso folgt aber dann $x_0' \leq \xi'$, da $x_0 < \xi$. Wenn $x_0' = x_1'$, mußte also für alle ξ zwischen x_0 und x_1 der vordere konjugierte Punkt mit x_0' identisch sein, also eine Lösung von (1) existieren, deren η in ξ und x_0' Null sind, ohne identisch zu verschwinden. Kombiniert man diese Lösung linear aus $\tilde{H}_2$ wo $(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2)$ das zu x_0' gehörige normierte System ist, so sieht man sogleich, daß die Determinante $|\tilde{H}_2|$ im Intervall $[x_0\, x_1]$ identisch verschwinden würde. Damit kommen wir in Widerspruch zu Satz 3.

Wir bringen endlich die Lehre von den konjugierten Punkten zu einem gewissen Abschluß durch die folgenden beiden Sätze:

Satz 5. Ist x_1 der vordere konjugierte Punkt von x_0, so ist x_0 der hintere konjugierte Punkt von x_1 (und umgekehrt).

Da es eine Lösung von (1) gibt, deren η in x_0 und x_1 Null sind, so muß der hintere konjugierte Punkt von x_1 — er heiße x_1'' — existieren und $> x_0$ sein. Wäre x_1'' aber $> x_0$, so gäbe es wieder eine Lösung von (1), deren η in x_1'' und x_1 Null sind, es wäre also der vordere konjugierte Punkt von x_1'' vorhanden und $\leqq x_1$, was mit Satz 4 in Widerspruch steht.

Wir können nach Satz 5 von „konjugierten Punkten" $x_0\, x_0'$ schlechthin reden, ohne beständig zu unterscheiden, ob x_0' der vordere konjugierte Punkt von x_0 oder x_0 der hintere konjugierte Punkt von x_0' ist. Es möge nun das Intervall (a, b) zwei konjugierte Punkte ξ, ξ' enthalten. Wählen wir $x_0 < \xi$ in (a, b), so muß x_0' nach Satz 4 existieren und $< \xi'$ sein. Wählen wir ferner $x_1' > \xi$ in (a, b) so muß nach Satz 4 und 5 auch $x_1 > \xi$ existieren. Fassen wir die Abszisse des (vorderen) konjugierten Punktes von x als Funktion von x auf, so ist diese Funktion für $x_0 < x < x_1$ definiert, monoton wachsend (im strengen Sinn) und ihr Wertevorrat liegt in dem Intervall $x_0' < x < x_1'$. Wir können aber denselben Schluß für x als Funktion von x' machen, indem wir x als hinteren konjugierten Punkt ansehen und erhalten so offenbar die Umkehrung der zuerst betrachteten Funktion als für $x_0' < x < x_1'$ definierte, streng monotone Funktion von x'. Daraus schließt man leicht, daß beide Funktionen stetig sind. Wir haben so erhalten:

Satz 6. Die Abszisse des vorderen konjugierten Punktes von x ist, soweit sie existiert, eine stetige, streng monoton wachsende Funktion von x. Ihre obere Grenze ist mit b identisch. Analog für den hinteren konjugierten Punkt.

Anschaulich gesprochen: bei wachsendem x bewegt sich x' beständig wachsend bis an die Grenze des Stetigkeitsintervalls (a, b).

7. Es soll jetzt kurz die Anwendung der entwickelten Theorie auf die Variationsrechnung gemacht werden. Sie ergibt sich daraus, daß in der Umgebung eines regulären[1]) Extremalenbogen, die Lagrange-Eulerschen Gleichungen in Form eines kanonischen Systems:

[1]) „regulär" soll heißen: längs des Bogens ist die Determinante nicht Null, die Bolza (Vorlesungen, § 72a) mit R bezeichnet.

$$\frac{d\,y_i}{d\,x} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{d\,p_i}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} (i = 1, 2 \,.\,.\, n) \tag{11}$$

geschrieben werden können.

Es sind dabei über die in den Angaben des Problems von Lagrange auftretenden Funktionen die üblichen Stetigkeitsvoraussetzungen zu machen. Stellen

$$y_i = y_i\,(x, a_1 \,.\,.\, a_{2n}), \qquad p_i = p_i\,(x, a_1 \,.\,.\, a_{2n})$$

die allgemeine Lösung von (11) vor, so genügen die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial y_i}{\partial a_k} = \eta_i^{(k)}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \pi_i^{(k)}$$

den „Variationsgleichungen" von (11):

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_i}{dx} &= H_{p_i y_k}\, \eta_k + H_{p_i p_k}\, \pi_k, \\ \frac{d\,\pi_i}{dx} &= -\,H_{y_i y_k}\, \eta_k - H_{y_i p_k}\, \pi_k, \end{aligned} \tag{12}$$

also genau einem System der Form (1).

Nun waren für unsere Entwicklungen die Voraussetzungen I und II wesentlich. Was bedeuten sie für (12)?

Der Übergang von den Lagrange-Eulerschen Gleichungen zu (11) erfolgt bekanntlich durch den Ansatz:

$$p_i = F_{y_i'} \qquad H = y_i'\, F_{y_i'} - F\,,$$

wo F den mit Lagranges Multiplikatoren λ_ϱ gebildeten Ausdruck $f + \lambda_\varrho\, \varphi_\varrho$ bedeutet. Es handelt sich darum, statt der n durch die Bedingungen $\varphi_\varrho = 0$ gebunden y_i' und der Multiplikatoren λ_ϱ die n unabhängigen Variablen p_i einzuführen. Sehen wir also in den Gleichungen:

$$\varphi_\varrho = 0, \qquad p_i = F_{y_i'} \tag{13}$$

x und die y_i als konstant an — da sie ja bei dieser Transformation keine Rolle spielen — so ist nach (11):

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = y_i', \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\, \partial p_k} = \frac{\partial y_i'}{\partial p_k}$$

Bilden wir nun die quadratische Differentialform:

$$\frac{\partial' H}{\partial p_i\, \partial p_k}\, dp_i\, dp_k = dy_i'\, dp_i,$$

so folgt aus (13):

$$dp_i = F_{y'_i y'_k}\, d y'_k + \varphi_{\varrho y'_i}\, d\lambda_\varrho, \qquad \varphi_{\varrho y'_i}\; dy_i = 0$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k}\, dp_i\, dp_k = F_{y'_i y'_k}\; dy'_i\, dy'_k.$$

Erfüllt nun unsere Extremale die bekannte für ein Minimum notwendige Bedingung von Clebsch[1]), so folgt aus den erhaltenen Gleichungen, daß:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k}\, dp_i\, dp_k \geq 0.$$

Da die dp_i unabhängige Variable sind, ist unsere Voraussetzung I erfüllt. Man erkennt auch leicht, daß im Falle von m unabhängigen Bedingungsgleichungen $\varphi_\varrho = 0$ der Rang dieser quadratischen Form den Wert $n - m$ hat, sie also nur beim Fehlen von Bedingungsgleichungen definit ist.

Was endlich die Bedingung II betrifft, so besagt sie, daß die η_k für keine nicht-triviale Lösung von (12) in einem ganzen Intervalle verschwinden können; oder wenn die Gleichungen

$$c_k \frac{\partial y_i}{\partial a_k} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{14}$$

in einem ganzen Intervalle bestehen, so sind alle c_k Null. Differenziert man nun die Euler-Lagrangeschen Gleichungen:

$$F_{y_i} - \frac{d F_{y'_i}}{dx} = 0, \quad \varphi_\varrho = 0 \ (i = 1, 2, \ldots n, \ \varrho = 1, 2, \ldots m),$$

die ja durch die $y_i\,(x, a, \ldots a_{2n})$ und gewisse Multiplikatoren $\lambda_\varrho\,(x, a_1 \ldots a_{2n})$ erfüllt werden, nach den $a_\varkappa$ und kombiniert die Resultate linear mit den c_k, so ergibt (14), daß die Gleichungen:

$$\mu_\varrho \varphi_{\varrho y_i} - \frac{d\,(\mu_\varrho\, \varphi_{\varrho y'_i})}{dx} = 0, \ i = 1, 2, \ldots n,$$

durch

$$\mu_\varrho = c_k \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial a_k}$$

erfüllt werden. Ist nun jeder Teilbogen unserer Extremale normal[1]), so müssen die μ_ϱ identisch Null sein. Hieraus und aus

---

[1]) Vgl. Bolza, Vorlesungen, § 69, *d*.

(14) folgt aber dann sofort $c_k \frac{\partial p_i}{\partial a_k} = 0$, sodaß auf das Verschwinden aller c_k geschlossen werden kann.

Da ferner die Definition der „konjugierten Systeme“ [1]) und „konjugierten Punkte“, die wir oben benutzten, sich mit der in der Variationsrechnung üblichen deckt, so können wir das Endergebnis aussprechen:

Für einen regulären[2]) Extremalenbogen, der die Bedingung von Clebsch erfüllt und keinen anormalen Teilbogen enthält, gelten die oben entwickelten Sätze 1—6.

Erlangen, Ende Oktober 1927.

[1]) Dies folgt aus dem in 3. angegebenen Kennzeichen der konjugierten Systeme, wenn man die Bedingungen für konjugierte Systeme im Sinne von v. Escherich (Bolza, Vorlesungen, § 76 o) der kanonischen Gestalt der Variationsgleichungen anpackt.

[2]) Vgl. Anmerkg. S. 254.