Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1927. Heft III
November-Dezembersitzung

München 1927
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über diejenigen Rotationsflächen, auf denen drei Systeme von kongruenten geodätischen Linien ein Dreiecksnetz bilden.

Von **Otto Volk**, Kaunas (Litauen).

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 3. Dezember 1927.

Wie schon Herr Finsterwalder[1]) darauf hinwies, gibt es auf Rotationsflächen Dreiecksnetze, deren eine Schar aus den Meridiankurven besteht, während die beiden anderen Scharen von zu den Meridiankurven symmetrisch gelegenen geodätischen Kurven gebildet werden. Diese Dreiecksnetze bestehen aus drei Scharen kongruenter Kurven und geben zugleich eine rhombische Einteilung; außer den Rotationsflächen und den auf sie abwickelbaren Flächen gibt es keine weiteren Flächen mit geodätischen rhombischen Dreiecksnetzen[2]). In Fortsetzung der Finsterwalderschen Betrachtungen hat Herr R. Sauer[3]) sich mit der Frage nach dem Charakter von Drehflächen beschäftigt, auf denen außer den Finsterwalderschen Netzen geodätische Dreiecksnetze aus drei Systemen von kongruenten, durch Drehung auseinander hervorgehenden geodätischen Linien bestehen. Indem er die kongruenten Kurven nach einem Logarithmus des Drehwinkels aufeinander folgen ließ, kam er zu einer gewissen Klasse von Rotationsflächen, von denen im

---

[1]) Vgl. S. Finsterwalder, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 6 (1899). S. 51 ff.

[2]) Vgl. O. Volk, Über geodätische Dreiecksnetze auf Flächen konstanten Krümmungsmaßes. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, math.-naturw. Klasse. Jahrgang 1927. 3. Abt. S. 19.

[3]) R. Sauer, Flächen mit drei ausgezeichneten Systemen geodätischer Linien, die sich zu einem Dreiecksnetz verknüpfen lassen. Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abteilung, 1926. S. 365 ff.

folgenden gezeigt werden wird, daß sie die einzig möglichen Rotationsflächen mit Dreiecksnetzen der angegebenen Art sind.

1. Ist eine Rotationsfläche durch die Gleichungen gegeben:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = f(r) \tag{1}$$

und sind durch $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ geodätische Linien auf dieser Fläche bestimmt, so hat man bekanntlich zwischen φ, r und u, v die Beziehungen:

$$\begin{cases} \varphi = \int \dfrac{\sqrt{1+f'^2}}{r\sqrt{r^2 U_1^2 - 1}}\,dr + U_2, \\ \varphi = \int \dfrac{\sqrt{1+f'^2}}{r\sqrt{r^2 V_1^2 - 1}}\,dr + V_2, \end{cases} \tag{2}$$

wo U_1, U_2, V_1, V_2 Funktionen nur von u bezw. v sind. Für das Linienelement in der Form

$$ds^2 = A^2\,du^2 + 2\,AC\cos\vartheta\,du\,dv + C^2\,dv^2$$

hat man dann:

$$\begin{cases} A = \sqrt{(1+f'^2)r_u^2 + r^2\varphi_u^2} = V_1 r^2 \varphi_u = \dfrac{V_1\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{r^2 V_1^2 - 1}}\,r r_u, \\ C = \sqrt{(1+f'^2)r_v^2 + r^2\varphi_v^2} = U_1 r^2 \varphi_v = \dfrac{U_1\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{r^2 V_1^2 - 1}}\,r r_v, \\ \cos\vartheta = \dfrac{(1+f'^2)r_u r_v + r^2\varphi_u\varphi_v}{AC} = \dfrac{\sqrt{r^2 V_1^2 - 1}\sqrt{r^2 U_1^2 - 1} + 1}{r^2 U_1 V_1}. \end{cases} \tag{3}$$

Die Dreiecksnetzbedingung ist[1]):

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\lg\left(\frac{A}{C^2\sin^2\vartheta}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\lg\left(\frac{C}{A^2\sin^2\vartheta}\right)\right) = 0. \tag{4}$$

2. Handelt es sich um kongruente, nicht drehsymmetrische Netze, so muß sein:

$$U_1 = \alpha^2, \quad V_1 = \beta^2, \tag{5}$$

wo α, β Konstante sind, während U_2, V_2 nicht konstant sein dürfen. Aus den Gleichungen (2) folgt dann durch Differentiation nach u bezw. v:

---

[1]) Vgl. O. Volk, l. c. S. 19.

$$(6)\quad \begin{cases} \varphi_u = \dfrac{f_1}{\sqrt{r^2\alpha^2-1}}\, r_u + U_2' = \dfrac{f_1}{\sqrt{r^2\beta^2-1}}\, r_u, \\[2ex] \varphi_v = \dfrac{f_1}{\sqrt{r^2\beta^2-1}}\, r_v + V_2' = \dfrac{f_1}{\sqrt{r^2\alpha^2-1}}\, r_v, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(7)\qquad f_1 = \frac{\sqrt{1+f'^2}}{r}.$$

Die Gleichungen (6) verlangen:

$$r_u V_2' + r_v U_2' = 0$$

und daher:

$$(8)\qquad r = F(U_2 - V_2).$$

Für f_1 findet man dann aus (6):

$$(9)\qquad f_1 = \frac{\sqrt{F^2\alpha^2-1}\sqrt{F^2\beta^2-1}}{\sqrt{F^2\alpha^2-1}-\sqrt{F^2\beta^2-1}}\cdot\frac{1}{F'}.$$

Es wird daher:

$$\frac{A}{C^2\sin^2\vartheta} = \frac{\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}\,\frac{\sqrt{F^2\alpha^2-1}\,(\sqrt{F^2\alpha^2-1}+\sqrt{F^2\beta^2-1})}{\sqrt{F^2\beta^2-1}}\,\frac{U_2'}{V_2'^2},$$

$$\frac{C}{A^2\sin^2\vartheta} = \frac{\alpha^3}{\beta^2-\alpha^2}\,\frac{\sqrt{F^2\beta^2-1}\,(\sqrt{F^2\alpha^2-1}+\sqrt{F^2\beta^2-1})}{\sqrt{F^2\alpha^2-1}}\,\frac{V_2'}{U_2'^2}$$

und aus (4) erhält man:

$$(10)\qquad \frac{U_2''}{U_2'} + \frac{V_2''}{V_2'} + \frac{t'}{t}\,U_2' - \frac{\tau'}{\tau}\,V_2' = 0,$$

wo gesetzt ist:

$$(11)\quad \begin{cases} t = \dfrac{F^2\alpha^2-1}{F^2\beta^2-1} + \sqrt{\dfrac{F^2\alpha^2-1}{F^2\beta^2-1}}, \\[2ex] \tau = \dfrac{F^2\beta^2-1}{F^2\alpha^2-1} + \sqrt{\dfrac{F^2\beta^2-1}{F^2\alpha^2-1}}; \end{cases}$$

dabei bedeuten bei t', τ' die Akzente Differentialquotienten nach $(U_2 - V_2)$. Setzt man noch:

$$(12)\qquad U = U_2',\quad V = V_2',$$

so schreibt sich (10) in der Form:

$$\frac{dU}{dU_2} + \frac{dV}{dV_2} + U\frac{t'}{t} - V\frac{\tau'}{\tau} = 0. \tag{13}$$

Schliessen wir zunächst den Fall des Kreiszylinders aus, so sind $\frac{t'}{t}$ und $\frac{\tau'}{\tau}$ voneinander nicht linear abhängig und von Null verschieden. Durch Differentiation nach U_2 und V_2 erhält man aus (13):

$$\frac{d^2U}{dU_2^2} + \left(\frac{t'}{t}\right)' U + \frac{t'}{t}\frac{dU}{dU_2} - \left(\frac{\tau'}{\tau}\right)' V = 0,$$

$$\frac{d^2V}{dV_2^2} - \left(\frac{t'}{t}\right)' U + \left(\frac{\tau'}{\tau}\right)' V - \frac{\tau'}{\tau}\frac{dV}{dV_2} = 0,$$

woraus durch Addition folgt:

$$\frac{d^2U}{dU_2^2} + \frac{d^2V}{dV_2^2} + \frac{t'}{t}\frac{dU}{dU_2} - \frac{\tau'}{\tau}\frac{dV}{dV_2} = 0. \tag{14}$$

In analoger Weise erhält man aus dieser Gleichung durch Differentiation nach U_2 und V_2:

$$\frac{d^3U}{dU_2^3} + \frac{d^3V}{dV_2^3} + \frac{t'}{t}\frac{d^2U}{dU_2^2} - \frac{\tau'}{\tau}\frac{d^2V}{dV_2^2} = 0. \tag{15}$$

Das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen (13), (14) und (15) verlangt das Verschwinden der Determinante:

$$\begin{vmatrix} U & V & U' + V' \\ U' & V' & U'' + V'' \\ U'' & V'' & U''' + V''' \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$\begin{aligned} U(V'V''' - V''^2) + V(U''^2 - U'U''') + U'(V'V'' - VV''') \\ + V'(UU''' - U'U'') + U''(VV'' - V'^2) + V''(UU'' - U'^2) = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

wo die Akzente jetzt Differentiationen nach U_2 bezw. V_2 bedeuten.

3. Um die Funktionalgleichung (16) zu lösen, differentiieren wir sie einmal nach V_2; ist nun $VV'' - V'^2 \neq 0$, so erhält man durch Elimination aus dieser Gleichung und (16):

$$\left\{ \begin{aligned} U''^2 - U'U''' &= a_1 U + b_1 U' + c_1 U'' + d_1 (U'^2 - UU''), \\ UU''' - U'U'' &= a_2 U + b_2 U' + c_2 U'' + d_2 (U'^2 - UU''), \end{aligned} \right. \tag{17}$$

wo die a, b, c, d als konstant betrachtet werden können. Eliminiert man U''' aus den Gleichungen (17), so ergibt sich:

$$
(18) \quad \begin{aligned} & UU''^2 - U'^2 U'' = a_1 U^2 + (b_1 + a_2) UU' + b_2 U'^2 \\ & + c_1 UU'' + c_2 U'U'' + (d_1 U + d_2 U')(U'^2 - UU''). \end{aligned}
$$

Differentiiert man diese Gleichung wieder nach U_2 und berücksichtigt die Gleichungen (17), so erhält man:

$$
(19) \quad \begin{aligned} & UU''^2 + U''\left(-U'^2 + d_1 U^2 + d_2 UU' + U'\left(\frac{c_1}{d_2} - c_2\right) + U\left(-c_1 - \frac{a_2 - b_1}{d_2}\right)\right) \\ & = d_2 U'^3 + d_1 UU'^2 + U'^2\left(-c_1 + c_2\frac{d_1}{d_2} - \frac{a_2 + b_1}{d_2} + b_2\right) \\ & + UU'\left(\frac{b_2 d_1 + a_1 d_1 - 2a_1}{d_2}\right) + a_2\frac{d_1}{d_2} U^2 + U'\frac{c_2 b_1 - b_2 c_1}{d_2} \\ & + U\frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{d_2}. \end{aligned}
$$

Die beiden Gleichungen (18) und (19) stimmen nun überein, wenn ist:

$$
\begin{gathered} c_1 = 0, \quad a_1 - b_1 = 0, \quad c_2 d_1 - c_1 d_2 - a_2 - b_1 = 0, \\ b_2 d_1 + a_2 d_1 - 2a_1 - b_1 d_2 - a_2 d_2 = 0, \quad a_2 d_1 - a_1 d_2 = 0, \\ c_2 b_1 - b_2 c_1 = 0, \quad a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0. \end{gathered}
$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, wenn entweder

$$
a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0
$$

oder

$$
a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = a_2 = 0
$$

ist. Das führt auf den Ansatz:

$$
U''^2 - U'U''' = d_1(U'^2 - UU''),
$$

woraus durch Intregration kommt:

$$
(20) \qquad U'' = kU' + lU.
$$

In analoger Weise erhält man unter der Annahme, daß $UU'' - U'' \neq 0$:

$$
(21) \qquad V'' = k_1 V' + l_1 V.
$$

Durch Einsetzen der Werte von (20) und (21) in die Funktionalgleichung (16) findet man schließlich:

$$
(22) \qquad k_1 = k, \quad l_1 = l.
$$

Ist aber

$$
VV'' - V'^2 = 0,
$$

also

$$V' = kV, \tag{23}$$

so erhält man aus (16):

$$U''^2 - U'U''' + k(UU''' - U'U'') - k^2(U'^2 - UU'') = 0$$

oder:

$$d\left(\frac{U''}{kU - U'}\right) + k^2 d\left(\frac{U}{kU - U'}\right) = 0$$

und daraus durch Integration:

$$U'' = -mU' + k(m-k)U. \tag{24}$$

Ist andererseits

$$U''U - U'^2 = 0,$$

also

$$U' = kU, \tag{25}$$

so erhält man in analoger Weise:

$$V'' = -mV' + k(m-k)V. \tag{26}$$

4. Betrachten wir zunächst den allgemeinen Fall, wo die Gleichungen (20) u. (21) gelten u. im allgemeinen $UV' - U'V \neq 0$ ist. Aus den Gleichungen (13) und (14) folgt dann durch Elimination:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{t'}{t} &= \frac{VV'' - V'^2 + U''V - U'V'}{UV' - U'V}, \\ \frac{\tau'}{\tau} &= \frac{UU'' - U'^2 + UV'' - U'V'}{UV' - U'V}. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Setzen wir nun noch zur Abkürzung:

$$\sigma = \sqrt{\frac{F^2\alpha^2 - 1}{F^2\beta^2 - 1}}, \tag{28}$$

so ist nach (11):

$$\begin{gathered} t = \sigma^2 + \sigma, \quad \tau = \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma}, \\ \frac{t'}{t} = \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma+1}\right)\sigma', \quad \frac{\tau'}{\tau} = \left(\frac{1}{\sigma+1} - \frac{2}{\sigma}\right)\sigma'; \end{gathered} \tag{29}$$

aus (27) folgt dann unter Berücksichtigung der Gleichungen (20), (21) und (22):

$$
(30)\quad \begin{cases}
\dfrac{3\sigma'}{\sigma} = \dfrac{t'}{t} - \dfrac{\tau'}{\tau} \\
\qquad = \dfrac{VV'' - V'^2 - (UU'' - U'^2)}{UV' - U'V} - k, \\
\dfrac{3\sigma'}{1+\sigma} = \dfrac{2t'}{t} + \dfrac{\tau'}{\tau} \\
\qquad = \dfrac{2(VV'' - V'^2) + UU'' - U'^2 + V(2kU' + 3lU) + V'(-3U' + kU)}{UV' - U'V}.
\end{cases}
$$

Man überzeugt sich leicht, daß in der Tat auf den rechten Seiten in (29) Funktionen nur von $U_2 - V_2$ stehen, indem man die Differentialgleichungen (20) und (21) in der bekannten Weise löst. Aber die beiden Gleichungen (30) müssen auch widerspruchsfrei sein. Um das zu erreichen, eliminieren wir σ' und erhalten:

$$
(31)\qquad \sigma = -\frac{2P(V) + Q(U) + VA(U) + V'B(U)}{P(V) + 2Q(U) + VC(U) + V'D(U)},
$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$
P(V) = VV'' - V'^2,\ Q(U) = UU'' - U'^2,\ A(U) = 2kU' + 3lU,
$$
$$
B(U) = -3U' + kU,\ C(U) = kU' + 3lU,\ D(U) = -3U' + 2kU.
$$

Bildet man die logarithmische Ableitung von (31), so erhält man:

$$
(32)\qquad \begin{aligned}
\frac{\sigma'}{\sigma} &= \frac{-2P'(V) + Q'(U) + VA'(U) + V'(B(U) - A(U)) - V''B(U)}{2P(V) + Q(U) + VA(U) + V'B(U)} \\
&\quad - \frac{-P'(V) + 2Q'(U) + VC'(U) + V'(-C(U) + D'(U)) - V''D(U)}{P(V) + 2Q(U) + VC(U) + V'D(U)}.
\end{aligned}
$$

Setzt man diesen Wert gleich dem aus (30) sich ergebenden, so kommt eine Gleichung von der Form:

$$
2P(V)^3 - 2Q(U)^3 + \cdots\cdots = 0,
$$

wo alle folgenden Glieder niedere Potenzen von V und V' bezw. U, U' enthalten. Daraus folgt, das $P(V)$ und $Q(U)$ einen konstanten Wert haben müssen. Sei etwa:

$$
Q(U) = UU'' - U'^2 = a,\quad P(V) = VV'' - V'^2 = b.
$$

Nach (20) wird dann:

$$
(34)\qquad -U'^2 + kUU' + lU^2 = a.
$$

Durch Differentiation erhält man hieraus:

$$k(-U'^2 + kUU' + lU^2) = 0.$$

Mit Rücksicht auf (34) muß also entweder $k = 0$ oder $a = 0$ sein. Ist $k = 0$ und $a \neq 0$, so wird für $l \neq 0$ nach (34):

$$U' = \sqrt{l(U^2 - \varrho^2)}, \quad U = \varrho \sin(\sqrt{-l}\, U_2 + \delta), \quad (\varrho^2 l = a).$$

Analoges gilt für V. Man erhält für $b \neq 0$:

$$V' = \sqrt{l(V^2 - \varrho_1^2)}; \quad V = \varrho_1 \sin(\sqrt{-l}\, V_2 + \varepsilon), \quad (\varrho_1^2 l = b).$$

Somit ergibt sich schließlich:

$$\frac{3\sigma'}{\sigma} = \frac{(\varrho_1^2 - \varrho^2)\sqrt{-l}}{\varrho\varrho_1 \sin(\sqrt{-l}(U_2 - V_2) + \delta - \varepsilon)},$$

$$\frac{3\sigma'}{1+\sigma} = -\frac{\sqrt{-l}(2\varrho^2 + \varrho_1^2) + 3\varrho\varrho_1 \cos(\sqrt{-l}(U_2 - V_2) + \delta - \varepsilon)}{\varrho\varrho_1 \sin(\sqrt{-l}(U_2 - V_2) + \delta - \varepsilon)}$$

und daher

$$(35)\quad \sigma = -\frac{2\varrho^2 + \varrho_1^2 + 3\varrho\varrho_1 \cos(\sqrt{-l}(U_2 - V_2) + \delta - \varepsilon)}{\varrho^2 + 2\varrho_1^2 + 3\varrho\varrho_1 \cos(\sqrt{-l}(U_2 - V_2) + \delta - \varepsilon)}.$$

Andererseits gibt die direkte Integration:

$$(36)\qquad \sigma = C\left(tg\left(\frac{\sqrt{-l}(U_2 - V_2) + \delta - \varepsilon}{2}\right)\right)^{\frac{\varrho_1^2 - \varrho^2}{3\varrho\varrho_1}}.$$

Die Gleichungen (35) und (36) stimmen dann und nur dann überein, wenn $\varrho = \varrho_1$ wird, d. h. wenn σ konstant wird, was aber ausgeschlossen ist. Ist $l = 0$, so erhält man:

$$U = \sqrt{-a}\, U_2 + c_1, \quad V = \sqrt{-b}\, V_2 + c_2.$$

Aus (14) erkennt man dann direkt, daß σ ebenfalls konstant sein muß, und aus (13), daß $\varrho = \varrho_1$ wird. Dieser Fall scheidet also ebenfalls aus.

5. Ist $k \neq 0$, so müssen a und b verschwinden und man erhält:

$$(36)\qquad U' = kU, \quad V' = kV, \quad U = C_1 e^{kU_2}, \quad V = C_2 e^{kV_2}.$$

In diesem Falle wird $UV' - U'V = 0$. Die Gleichungen (27) und (30) versagen; die Gleichungen (13), (14) und (15) werden identisch. In diesem Falle kann man aber die Gleichung (13) direkt integrieren. Führt man nach (29) σ ein, so erhält man

$$C_1 e^{k(U_2 - V_2)} + C_2$$

(37)
$$+ \frac{1}{k}\left(\frac{C_1 e^{k(U_1 - V_1)} + 2 C_2}{\sigma} + \frac{C_1 e^{k(U_1 - V_1)} - C_2}{\sigma + 1}\right)\sigma' = 0.$$

Durch die Substitution

(38)
$$\xi = \frac{1}{k} e^{k(U_1 - V_1)}$$

ergibt sich hieraus:

(39)
$$\frac{d\xi}{d\sigma} = -\frac{\xi\,((2\sigma + 1)\,\xi + C\,(\sigma + 2))}{(\xi + C)\,\sigma\,(\sigma + 1)},$$

wo gesetzt ist:

$$C = \frac{C_2}{k C_1}.$$

Setzt man nun:

(40)
$$\xi + C = \frac{\sigma - 1}{\sigma\eta},$$

so kann man die Veränderlichen trennen und erhält:

$$\frac{d\eta}{\eta\,(C^2 - 3C\eta + 2)} = \frac{\sigma\,d\sigma}{\sigma - 1}.$$

Durch Integration kommt dann:

$$\frac{\eta\,(C\eta - 2)}{(C\eta - 1)^2} = \gamma\,(\sigma^2 - 1),$$

woraus durch Auflösung nach η und Beachtung von (40) folgt:

$$\xi = -C\frac{\sigma + \sqrt{1 - C\gamma\,(\sigma^2 - 1)}}{\sigma\,(1 + \sqrt{1 - C\gamma\,(\sigma^2 - 1)})}.$$

Daher wird:

$$\frac{d}{d\sigma}\lg\xi =$$

$$\frac{C\gamma\sigma^3 - \sqrt{1 - C\gamma\,(\sigma^2 - 1)}^{\,3} - 1 - C\gamma}{\sigma\,(\sigma + \sqrt{1 - C\gamma(\sigma^2 - 1)})\,(1 + \sqrt{1 - C\gamma(\sigma^2 - 1)})\,\sqrt{1 - C\gamma(\sigma^2 - 1)}}$$

oder unter Beachtung von (28) und (8):

$$\frac{d}{dr}\lg \xi = \frac{r(\beta^2-\alpha^2)\left(C\gamma\sqrt{r^2\alpha^2-1}^{\,3} - \sqrt{(1+C\gamma)(r^2\beta^2-1)-C\gamma(r^2\alpha^2-1)}^{\,3}\right.}{(r^2\alpha^2-1)\,(r^2\beta^2-1)\,\left(\sqrt{r^2\alpha^2-1}+\sqrt{r^2\beta^2-1}\right)} \; {}^{*)}$$

$$\frac{\left.+(1+C\gamma)\sqrt{r^2\beta^2-1}^{\,3}\right)}{\left(\sqrt{r^2\beta^2-1}+\sqrt{(1+C\gamma)(r^2\beta^2-1)-C\gamma(r^2\alpha^2-1)}\right)\sqrt{(1+C\gamma)(r^2\beta^2-1)-C\gamma(r^2\alpha^2-1)}}.$$

Aus (9) erhält man so schließlich:

$$k r f_1(r) = \frac{(\alpha^2-\gamma_1^2)\sqrt{r^2\beta^2-1}^{\,3} + (\beta^2-\alpha^2)\sqrt{\gamma_1^2\alpha^2-1}^{\,3}}{\sqrt{r^2\alpha^2-1}\,\sqrt{r^2\beta^2-1}\,\sqrt{r^2\gamma_1^2-1}}$$

(41)

$$\frac{+(\beta^2-\gamma_1^2)\sqrt{r^2\alpha^2-1}^{\,3}}{\left((\beta^2-\gamma_1^2)\sqrt{r^2\alpha^2-1}+(\beta^2-\alpha^2)\sqrt{r^2\gamma_1^2-1}+(\gamma_1^2-\alpha^2)\sqrt{r^2\beta^2-1}\right)}, \; {}^{*)}$$

wo gesetzt ist:

$$\gamma_1^2 = \beta^2 - C\gamma\,(\alpha^2-\beta^2).$$

Der so erhaltene Wert stimmt mit dem von Herrn Sauer gefundenen überein, wie man sich leicht durch Ausrechnung der Determinanten überzeugt. Da nach (12) und (36)

$$U = U_2' = C_1 e^{k U_2}, \quad V = V_2' = C_2 e^{k V_2},$$

also

$$(42) \qquad U_2 = -\frac{1}{k}\lg(-k C_1 u), \quad V_2 = -\frac{1}{k}\lg(-k C_2 v)$$

ist, so erkennt man daraus, daß die kongruenten geodätischen Linien in der Tat nach einem Logarithmus des Drehwinkels aufeinander folgen.

6. Wir haben noch den Fall des Kreiszylinders zu betrachten. Sei also:

$$(43) \qquad x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi.$$

Die geodätischen Linien $u =$ const. und $v =$ const. sind dann bestimmt durch die beiden Gleichungen:

$$(44) \qquad \begin{cases} z = U_1\varphi + U_2, \\ z = V_1\varphi + V_2. \end{cases}$$

Sollen die beiden Scharen aus kongruenten Kurven bestehen, so muß sein:

---

*) Infolge der geringen Zeilenbreite mußte der Nenner geteilt werden; als Nenner ist das Produkt der beiden Nenner zu nehmen.

$$U_1 = \alpha, \quad V_1 = \beta, \tag{45}$$

wo α, β Konstante bedeuten. Man erhält dann:

$$z = \frac{\beta U_2 - \alpha V_2}{\beta - \alpha}, \quad \varphi = \frac{U_2 - V_2}{\beta - \alpha};$$

es wird ferner:

$$\left\{ \begin{aligned} A &= m U_2', \\ C &= n V_2', \\ \cos\vartheta &= p, \end{aligned} \right. \tag{46}$$

wo m, n, p Konstante bedeuten, die durch α, β, a bestimmt sind. Es wird daher:

$$\frac{A}{C^2 \sin^2\vartheta} = \frac{m}{n^2 (1 - p^2)} \frac{U_2'}{V_2'^2},$$

$$\frac{C}{A^2 \sin^2\vartheta} = \frac{n}{m^2 (1 - p^2)} \frac{V_2'}{U_2'^2}$$

und die Dreiecksnetzbedingung (4) gibt:

$$\frac{U_2''}{U_2'} + \frac{V_2''}{V_2'} = 0. \tag{47}$$

Daraus folgt:

$$\frac{U_2''}{U_2'} = k, \quad \frac{V_2''}{V_2'} = -k$$

oder durch Integration:

$$U_2 = C_1 e^{ku} + C_2, \quad V_2 = C_3 e^{kv} + C_4. \tag{48}$$

Die beiden Scharen $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ sind daher gegeben durch die Beziehungen:

$$\left\{ \begin{aligned} z &= \alpha\varphi + C_1 e^{ku} + C_2, \\ z &= \beta\varphi + C_3 e^{-kv} + C_4. \end{aligned} \right. \tag{49}$$

Die Kurven $u + v = \text{const.}$ sind dann bestimmt durch die Gleichung:

$$z - \alpha\varphi - C_2 = \frac{C_1}{C_3} (z - \beta\varphi - C_4) e^{k(u+v)}, \tag{50}$$

woraus man sofort erkennt, daß die Diagonalkurven unseres Dreiecksnetzes keine kongruenten Kurven sind.

Damit haben wir also den Satz bewiesen.

Diejenigen Rotationsflächen, auf denen neben den geodätischen rhombischen Dreiecksnetzen noch weitere Dreiecksnetze existieren, die aus drei Systemen von kongruenten, nach einem Logarithmus des Drehwinkels aufeinander folgenden, geodätischen Linien bestehen, sind die einzigen, auf denen solche ausgezeichnete geodätische kongruente Dreiecksnetze möglich sind. Auf dem Kreiszylinder gibt es ausgezeichnete Dreiecksnetze nur von der Art, daß zwei Systeme aus kongruenten geodätichen Linien bestehen, die nach dem Gesetze einer Exponentialfunktion sich verschieben, während die Diagonalkurven kein System kongruenter geodätischer Linien bilden.

Anmerkung bei der Korrektur.

Die Beziehungen (20) und (21) kann man einfacher unter Umgehung der Funktionalgleichung (16) erhalten, indem man die nach U_2 bezw. V_2 differentiierte Gleichung (13) mit $\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)'$ bezw. $\left(\frac{t'}{t}\right)'$ durchdividiert und nochmals nach U_2 bezw. V_2 differentiiert. Die Gleichungen (22) ergeben sich dann aus (13) und (14).

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1927

Band/Volume: 1927

Autor(en)/Author(s): Volk Otto

Artikel/Article: Diejenigen Rotationsflächen auf denen drei Systeme von kongruenten geodätischen Linien ein Dreiecksnetz bilden 261-272