Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1928. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1928
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über einige trigonometrische Reihen.

Von **Otto Hölder**.

Vorgelegt von W. v. Dyck in der Sitzung am 5. Mai 1928.

§ 1.

Einige neue Reihen.

Die elementare Gleichung

$$(1)\qquad \log\left|\sin\frac{x}{2}\right| = -\log 2 - \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos(2x)}{2} - \frac{\cos(3x)}{3} - \dots$$

ist für alle diejenigen Werte von x richtig, für die die linke Seite einen endlichen Wert hat. Da nun $\sin\frac{x}{2}$ für $0 < x < 2\pi$ positiv ist, so stellt die obige Reihe nicht nur die Cosinus-Reihe vor, durch die $\log\sin\frac{x}{2}$ im Intervall $0 \dots \pi$ ausgedrückt ist, sondern auch die Sinus-Cosinus-Reihe, die im Intervall $0 \dots 2\pi$ dieselbe Funktion darstellt, in der aber zufällig die Sinus-Glieder die Koeffizienten 0 haben.

Nach der Theorie muß es aber auch eine Sinus-Reihe geben[1]), die für $0 < x < \pi$ die Funktion $\log\sin\frac{x}{2}$ ausdrückt. Das Koeffizientengesetz dieser Reihe ist wohl noch nicht gegeben worden.

[1]) Die Funktion ist an jeder Stelle des reellen Intervalls $0 \dots \pi$, außer bei 0, regulär, und das Integral $\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}\left|\log\sin\frac{x}{2}\right| dx$ bleibt endlich, wenn ε gegen 0 geht.

Ich setze

$$\log \sin \frac{x}{2} = c_1 \sin x + c_2 \sin (2x) + c_3 \sin (3x) + \ldots, \tag{2}$$

wo

$$c_\nu = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin (\nu \alpha) \log \sin \frac{\alpha}{2} \, d\alpha. \tag{3}$$

Durch partielle Integration erhalte ich

$$\int_\varepsilon^\pi \sin (\nu \alpha) \log \sin \frac{\alpha}{2} \, d\alpha = \frac{1}{\nu} \left(- \Big|_\varepsilon^\pi \cos (\nu \alpha) \log \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \int_\varepsilon^\pi \cos (\nu \alpha) \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \, d\alpha \right)$$

$$= \frac{1}{\nu} \left(\cos (\nu \varepsilon) \log \sin \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos (2 \nu \alpha) \operatorname{cotg} \alpha \, d\alpha \right).$$

Da aber

$$\cos (\nu \varepsilon) = 1 - \frac{\nu^2 \varepsilon^2}{2} + \ldots,$$

$$\log \sin \frac{\varepsilon}{2} = \log \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{24} + \ldots,$$

so erkennt man, daß

$$\int_0^\pi \sin (\nu \alpha) \log \sin \frac{\alpha}{2} \, d\alpha = \frac{1}{\nu} \lim_{\varepsilon' \to 0} \left[\log \varepsilon' + \int_{\varepsilon'}^{\frac{\pi}{2}} \cos (2 \nu \alpha) \operatorname{cotg} \alpha \, d\alpha \right] \tag{4}$$

ist.

Ich berechne nun den letzten Grenzwert zunächst für $\nu = 1$. Es ist

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \cos (2\alpha) \operatorname{cotg} \alpha \, d\alpha = \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2 \sin^2 \alpha) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \, d\alpha$$

$$= \Big|_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \left(\log \sin \alpha + \frac{\cos (2\alpha)}{2} \right)$$

$$= - \log \sin \varepsilon - \tfrac{1}{2} - \frac{\cos (2\varepsilon)}{2}$$

$$= - \log \varepsilon - 1 + \ldots$$

und somit

$$(5)\qquad \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\log \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\,a)\operatorname{cotg} a\, d\,a\right] = -1.$$

Um jetzt die auf der rechten Seite von (4) stehenden Grenzwerte allgemein zu finden, setze ich

$$(6)\qquad \begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(\nu+1)\,a)\operatorname{cotg} a\, d\,a &= \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2\,\nu\,a)\cos(2\,a) - \sin(2\,\nu\,a)\sin 2\,a)\,\frac{\cos a}{\sin a}\, d\,a \\
&= \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\,\nu\,a)\,(1-2\sin^2 a)\,\frac{\cos a}{\sin a}\, d\,a - \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\,\nu\,a)\cdot 2\cdot\cos^2 a\cdot d\,a \\
&= \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\,\nu\,a)\operatorname{cotg} a\, d\,a - 2\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2\,\nu\,a)\sin a + \sin(2\,\nu\,a)\cos a)\cos a\, d\,a \\
&= \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\,\nu\,a)\operatorname{cotg} a\, d\,a + \Bigg|_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos((2\,\nu+2)\,a)}{2\,\nu+2} + \frac{\cos(2\,\nu\,a)}{2\,\nu}\right) \\
&= \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\,\nu\,a)\operatorname{cotg} a\, d\,a + \frac{(-1)^{\nu+1}-1}{2\,\nu+2} + \frac{(-1)^{\nu}-1}{2\,\nu} + \ldots,
\end{aligned}$$

wo die Punkte eine mit verschwindendem ε verschwindende Potenzreihe von ε bedeuten.

Setzt man jetzt zur Abkürzung

$$\frac{\pi}{2}\,\nu\, c_{\nu} = b_{\nu},$$

so ist mit Rücksicht auf (3) und (4)

$$b_{\nu} = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\log \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\,\nu\,a)\operatorname{cotg} a\, d\,a\right],$$

und mit Rücksicht auf (6)

$$(7)\qquad b_{\nu+1} = b_{\nu} + \frac{(-1)^{\nu}-1}{2\,\nu} + \frac{(-1)^{\nu+1}-1}{2\,(\nu+1)}.$$

Hieraus errechnet sich, da außerdem (vgl. (5)) der Wert von b_1 bekannt ist, für $\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots$ die unendliche Folge

$$
\begin{array}{ll}
b_1 = -1 & b_2 = -1 - \frac{1}{1} \\
b_3 = -1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{3} & b_4 = -1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \\
b_5 = -1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} & b_6 = -1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

d. h. es ist

$$b_{2n-1} = -\left(\frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \cdots + \frac{2}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}\right)$$

und

$$b_{2n} = -\left(\frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \cdots + \frac{2}{2n-1}\right).$$

Die Allgemeingiltigkeit dieser beiden Formeln erhärtet man dadurch, daß man aus der letzten mit Hilfe von (7) noch b_{2n+1} und b_{2n+2} rechnet und dann den Schluß von n auf $n+1$ anwendet. Hieraus ergibt sich nun

$$(8)\quad c_{2n-1} = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \cdots + \frac{2}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}\right)\frac{1}{2n-1}$$

und

$$(9)\qquad c_{2n} = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right)\frac{1}{n}.$$

Damit sind die Koeffizienten der Reihe (2) bestimmt. Setzt man jetzt in Gleichung (2) an Stelle von x den Wert $\pi - x$ ein, so erhält man

$$(10)\quad \log\cos\frac{x}{2} = c_1 \sin x - c_2 \sin(2x) + c_3 \sin(3x) - \cdots,$$

welche Gleichung wiederum für $0 < x < \pi$ giltig ist.

Durch Addition von (2) und (10) mit Hinzufügung von $\log 2$ auf jeder Seite erhält man mit Rücksicht auf die Werte (8) der Koeffizienten c_{2n-1}

$$(11)\quad \log\sin x = \log 2 - \frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{1}\,\frac{\sin x}{1} + \left(\frac{2}{1} + \frac{1}{3}\right)\frac{\sin(3x)}{3}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)\frac{\sin(5x)}{5} + \left(\frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right)\frac{\sin(7x)}{7} + \cdots\right\}.$$

Subtrahiert man jedoch (10) von (2), so ergibt sich im Hinblick auf die Werte (9) der Koeffizienten c_{2n}

$$(12)\quad \log \operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{1}\frac{\sin(2x)}{1} + \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)\frac{\sin(4x)}{2} + \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\frac{\sin(6x)}{3}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\frac{\sin(8x)}{4} + \cdots\right\}.$$

Diese Gleichung liegt mehr an der Oberfläche als die Gleichung (11), indem die Gleichung (12) unmittelbar aus der Potenzentwicklung einer elementaren Funktion hergeleitet werden kann[1]). Ich ziehe noch einige Folgerungen aus der Gleichung (11). Setzt man in ihr $x = \frac{\pi}{2}$, so wird die linke Seite gleich Null, und man erhält

[1]) Es ist nämlich für ein komplexes z, dessen Absolutbetrag kleiner als 1 ist,

$$\tfrac{1}{1}z + \left(\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{3}\right)z^3 + \left(\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}\right)z^5 + \cdots$$
$$= \frac{z}{1}(1+z^2+z^4+\cdots) + \frac{z^3}{3}(1+z^2+z^4+\cdots) + \frac{z^5}{5}(1+z^2+z^4+\cdots) + \cdots$$
$$= \left(\frac{z}{1}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots\right)\frac{1}{1-z^2} = \tfrac{1}{2}\frac{1}{1-z^2}\log\frac{1+z}{1-z},$$

woraus man durch Integration die Gleichung

$$\tfrac{1}{1}\frac{z^2}{2} + \left(\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{3}\right)\frac{z^4}{4} + \left(\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}\right)\frac{z^6}{6} + \cdots = \tfrac{1}{8}\left(\log\frac{1+z}{1-z}\right)^2$$

erhält. Diese Gleichung, die man auch dadurch erhalten kann, daß man die Potenzentwicklung von

$$\log\frac{1+z}{1-z}$$

mit sich selbst multipliziert, gibt mit $z = re^{ix}$, wenn man den reellen und imaginären Teil trennt und für den Grenzübergang $r \to 1$ den Abel'schen Hilfssatz benutzt, unter anderem die Gleichung (12).

Eine ähnliche Potenzentwicklung ist diese:

$$\frac{z^2}{2} + \left(1+\tfrac{1}{2}\right)\frac{z^3}{3} + \left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\right)\frac{z^4}{4} + \cdots + \left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\frac{z^{k+1}}{k+1}$$
$$+ \cdots = \tfrac{1}{2}(\log(1-z))^2.$$

Aus den beiden hier erwähnten Potenzreihen ergeben sich die Zahlenreihen, die bei Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 1924, S. 324 unter (a) und (b) durch Produktbildung aus speziellen Reihen abgeleitet worden sind (bei der Gleichung (b) fehlt auf der rechten Seite der Faktor $\frac{1}{2}$).

$$\frac{\pi}{4}\log 2 = \frac{1}{1} - \left(\frac{2}{1}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)\frac{1}{5} - \left(\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right)\frac{1}{7} + \cdots$$

Integriert[1]) man Gleichung (11) von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, so kommt auf die linke Seite das von **Euler** ausgewertete Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

zu stehen, und es ergibt sich schließlich

$$\frac{\pi^2}{4}\log 2 = \frac{1}{1}\,\frac{1}{1^2} + \left(\frac{2}{1}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{3^2} + \left(\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)\frac{1}{5^2} + \left(\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right)\frac{1}{7^2} + \cdots$$

---

[1]) Die Reihe (11) ist im Intervall $\delta\,..\,\pi-\delta$, wenn δ einen kleinen positiven Wert bedeutet, gleichmäßig konvergent. Man erkennt dies, indem man die in Klammer gesetzte Reihe als Differenz von

$$* \quad \tfrac{2}{1}\,\frac{\sin x}{1} + \left(\tfrac{2}{1}+\tfrac{2}{3}\right)\frac{\sin(3x)}{3} + \left(\tfrac{2}{1}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}\right)\frac{\sin(5x)}{5} + \cdots$$

und von

$$** \quad \frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin(3x)}{3^2} + \frac{\sin(5x)}{5^2} + \cdots$$

auffaßt. Dabei ist die Reihe ** sogar für alle reellen x absolut und gleichmäßig konvergent. Die gleichmäßige Konvergenz der Reihe * in dem genannten Intervall ergibt sich daraus, daß die Summe $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sin((2\nu-1)x)$ in diesem Intervall für alle n beschränkt ist, und daß sich der n^{te} Koeffizient a_n in die Form

$$2\left[\left(\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{1}{n}\right]\cdot\frac{n}{2n-1}$$

setzen läßt. Hier steht in der eckigen Klammer das arithmetische Mittel aus $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots \frac{1}{2n-1}$, weshalb beide Faktoren des letzten Ausdrucks mit zunehmendem n abnehmen, und der ganze Ausdruck mit $n\to\infty$ gegen Null geht. Es ist also $a_{n+1} < a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, womit sich dann die Konvergenz vollends ergibt.

Die Reihe, die durch das Integrieren von (11) entsteht, konvergiert absolut und gleichmäßig für alle reellen x und stellt somit eine auch an den Enden des Intervalls $0\,...\,\pi$ stetige Funktion vor, weshalb 0 (und π) in sie eingesetzt werden darf.

§ 2.

Ein Grenzwert.

Im nächsten Paragraphen soll eine neue Herleitung der Kummer'schen Reihe gegeben werden. Dabei wird neben dem Integral

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \tag{13}$$

der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \log \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx \right\} = -C \tag{14}$$

gebraucht werden, wobei C die Euler'sche Konstante bedeutet.

Der Grenzwert (14) scheint nicht allgemein bekannt zu sein, und ich habe ihn bis jetzt in der Literatur nicht finden können. Er kann, zusammen mit dem überaus bekannten Integral (13), dadurch ermittelt werden, daß man das komplexe Integral

$$\int \frac{e^{-z}}{z}\, dz \tag{15}$$

um eine Viertelsebene herumführt und den Cauchy'schen Integralsatz anwendet. Begrenzt man nämlich den ersten Quadranten der komplexen Zahlenebene nach außen durch einen großen, von $+R$ nach $+Ri$ und nach innen durch einen kleinen, von $+\varepsilon i$ nach $+\varepsilon$ geführten Viertelskreis, so geht das Integral über den ersten Viertelskreis mit $R \to \infty$ gegen Null. Es bedarf das aber eines Beweises. Zu diesem Zweck setze ich

$$z = Re^{i\varphi} \qquad \left(\varphi = 0 \cdots \frac{\pi}{2}\right)$$

und teile das Intervall der Variablen φ in $0 \cdots \frac{\pi}{2} - \gamma$ und $\frac{\pi}{2} - \gamma \cdots \frac{\pi}{2}$. Das Integral über den Viertelkreis ist dann gleich der Summe

$$i \int_{0}^{\frac{\pi}{2}-\gamma} e^{-R(\cos\varphi + i \sin\varphi)}\, d\varphi + i \int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}} e^{-R(\cos\varphi + i \sin\varphi)}\, d\varphi.$$

Hier ist aber nach einer sehr einfachen Abschätzung der erste Teil absolut kleiner als

$$\frac{\pi}{2} e^{-R \sin \gamma}$$

und der zweite nicht größer als das Intervall γ. Nimmt man jetzt $\gamma < \frac{\tau}{2}$ und von Null verschieden an und hält nach der Festlegung dieses γ den Wert R über einer hinreichend großen Grenze, so kann man erreichen, daß auch der erste Teil obiger Summe kleiner als $\frac{\tau}{2}$ und somit das Integral über den großen Viertelkreis absolut kleiner als τ ist. Dabei konnte von vornherein τ beliebig klein gewählt werden.

Wendet man auf das Integral (15) den Cauchy'schen Satz an, indem man im positiven Sinn um die oben genauer begrenzte Viertelsebene herumgeht[1]), so ergibt sich das Integral über den kleinen Viertelskreis nahe gleich $-\frac{\pi i}{2}$, falls ε sehr klein ist, und man erhält

$$(16) \qquad \int_{+Ri}^{+\varepsilon i} \frac{e^{-z}}{z} dz - \frac{\pi i}{2} + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-z}}{z} dz + \delta = 0,$$

wobei

$$\lim_{\substack{R \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \delta = 0$$

ist. Verwandelt man nun das erste Integral der Gleichung (16) in ein solches über ein reelles Intervall und rechnet man das zweite durch partielle Integration um, so ergibt sich

---

[1]) Kronecker (Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale, 1894, S. 246) hat das Integral

$$\int e^{-z} z^{q-1} dz$$

um genau dasselbe Gebiet herumgeführt, da er aber $0 < q < 1$ angenommen hat, in welchem Fall auch das über den kleinen inneren Viertelskreis erstreckte Integral an der Grenze verschwindet, ist ihm unsere Gleichung (14) entgangen.

$$\int_{+R}^{+\varepsilon} \frac{\cos x - i \sin x}{x}\, dx - \frac{\pi i}{2} + e^{-R} \log R - e^{-\varepsilon} \log \varepsilon + \int_{+\varepsilon}^{+R} e^{-z} \log z \, dz + \delta = 0.$$

Trennt man hier das Reelle vom Imaginären und geht in beiden Teilen der Gleichung zur Grenze $R \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ über, so ergibt der reelle Teil

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx + \log \varepsilon \right\} = \int_{0}^{+\infty} e^{-z} \log z \, dz = -C,$$

während sich aus dem imaginären Teil die Gleichung (13) ergibt.

§ 3.

Neue Herleitung der Kummer'schen Reihe.

Die Kummer'sche Reihe ergibt sich, wenn man die Funktion $\log \Gamma(x)$ für $0 < x < 1$ in eine Sinus-Cosinus-Reihe entwickelt. Nach der Theorie muß nämlich für das genannte Intervall

$$(17) \qquad \log \Gamma(x) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos(2\nu\pi x) + b_\nu \sin(2\nu\pi x))$$

sein, wenn

$$(18) \qquad a_\nu = 2 \int_0^1 \log \Gamma(x) \cos(2\nu\pi x)\, dx \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

und

$$(19) \qquad b_\nu = 2 \int_0^1 \log \Gamma(x) \sin(2\nu\pi x)\, dx \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

gesetzt wird. Kummer[1]) selbst hat die Zahlen a_ν mit Hilfe einer Eigenschaft der Gammafunktion, die Zahlen b_ν aus der Formel (19) mit Hilfe der Integraldarstellung von $\log \Gamma(x)$, also mit Hilfe eines Doppelintegrals bestimmt. Da hierbei die Integrationsfolge umgekehrt wird, während der Integrand am Ende des einen Integrationsintervalls unendlich groß wird, so dürfte eine

[1]) Vgl. Journal f. d. reine und angewandte Mathematik, Bd. 35, 1847, S. 1—4.

vollständig genaue Durchführung dieses Verfahrens nicht so ganz einfach sein.

Die folgende Herleitung[1]) genügt den Anforderungen der Strenge und ist dabei sehr kurz, wenn man die Gleichungen (13) und (14) voraussetzen darf. Gleichung (13) ergibt, wenn $2n\pi x$ an Stelle von x eingesetzt, und $n > 0$ angenommen wird,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}. \tag{20}$$

Dabei wollen wir uns noch n als ganze Zahl denken. Wir teilen nun das Integrationsintervall in Perioden[2]) und nehmen statt des Integrals zunächst die endliche Summe

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} \int_{\mu}^{\mu+1} \frac{\sin(2n\pi x)}{x}\, dx. \tag{21}$$

Setzt man jetzt unter dem letzten Integral $x+\mu$ für x, so erhält man, da n und μ ganz sind, und deshalb

$$\sin(2n\pi(x+\mu)) = \sin(2n\pi x)$$

ist, folgenden Ausdruck

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} \int_0^1 \frac{\sin(2n\pi x)}{x+\mu}\, dx = \int_0^1 \sin(2n\pi x) \left(\sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{1}{x+\mu}\right) dx.$$

Da ferner

$$\int_0^1 \sin(2n\pi x)\, dx = 0$$

ist, kann man unter dem Integral in der Summe konstante Glieder zusetzen[3]), wodurch man

---

[1]) Es gibt noch andere Ableitungen der Kummer'schen Reihe (vgl. den Artikel von Brunel in der Math. Enzykl. II, 1. 1, S. 164).

[2]) Kronecker (a. a. O., S. 66/7) hat durch ein ähnliches Verfahren die Gleichung (13) bewiesen; dabei hat er aber zunächst das Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ genommen und in halbe Periodenintervalle eingeteilt.

[3]) Diese Methode, unter dem Integral dem mit der oscillierenden Funktion multiplizierten Ausdruck Konstanten zuzusetzen, entspricht einem schon 1840 von Hamilton benutzten Kunstgriff (Transactions of the R. Irish Academy, vol. XIX, p. 269 oben).

$$\int_0^1 \sin(2n\pi x)\left\{C + \frac{1}{x} + \sum_{\mu=1}^{m-1}\left(\frac{1}{x+\mu} - \frac{1}{\mu}\right)\right\} dx \tag{22}$$

erhält, wo C wieder die Euler'sche Konstante bedeuten soll.

Nun ist die ins Unendliche erstreckte Summe

$$C + \sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+\mu} - \frac{1}{\mu}\right)$$

der logarithmische Differentialquotient des Weierstraß'schen Produkts

$$e^{Cx}\prod_{\mu=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{\mu}\right)e^{-\frac{x}{\mu}}\right\} = \frac{1}{x\,\Gamma(x)}\text{[1]},$$

und es geht deshalb die endliche Summe

$$C + \sum_{\mu=1}^{m-1}\left(\frac{1}{x+\mu} - \frac{1}{\mu}\right), \tag{23}$$

wenn m unendlich groß wird, für das ganze Intervall von 0 bis 1 (mit Einschluß der Endwerte), gleichmäßig in die in diesem Intervall reguläre Funktion

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{1}{x} \tag{24}$$

über.

Man erkennt jetzt, daß man den Grenzwert des Ausdrucks (22) für $m \to \infty$ dadurch erhält, daß man unter dem Integral zur Grenze übergeht, und erhält mit Rücksicht auf (20)

$$-\int_0^1 \sin(2n\pi x)\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Integriert man hier noch partiell, wobei die vor das Integral tretenden Größen beim Übergang in 0 bzw. 1 verschwinden, so ergibt sich im Hinblick auf (18)

$$n\,a_n = 2n\int_0^1 \log\Gamma(x)\cos(2n\pi x)\,dx = \tfrac{1}{2}. \tag{25}$$

---

[1]) Diese Formel wird durch eine leichte Umformung des bekannten, die Gammafunktion darstellenden *Limes* erhalten.

Diese Gleichung ist nur für $n = 1, 2, 3, \ldots$ giltig (vgl. (20)), und es muß noch die bekannte Relation

$$(26) \qquad a_0 = 2 \int_0^1 \log \Gamma(x)\, dx = \log (2\pi)$$

hinzugefügt werden.

In derselben Weise wie aus Gleichung (13) lassen sich jetzt aus (14) Folgerungen ziehen. Setzt man hier die Integrationsvariable

$$x = 2 n \pi y \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

und bezeichnet man gleichzeitig $\frac{\varepsilon}{2 n \pi}$ mit ε', so ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon' \to 0} \left\{ \log (2 n \pi \varepsilon') + \int_{\varepsilon'}^{+\infty} \frac{\cos (2 n \pi y)}{y}\, dy \right\} = - C,$$

weshalb

$$(27) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \log \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos (2 n \pi x)}{x}\, dx \right\} = - C - \log (2 n \pi)$$

ist.

Der Grenzwert auf der linken Seite der letzten Gleichung kann so wie das frühere Integral (20) behandelt werden. Man hat in dem Ausdruck

$$(28) \qquad \log \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\cos (2 n \pi x)}{x}\, dx + \sum_{\mu = 1}^{m-1} \int_{\mu}^{\mu+1} \frac{\cos (2 n \pi x)}{x}\, dx$$

zuerst $m \to \infty$ und dann $\varepsilon \to 0$ gehen zu lassen. Nun ist aber der Ausdruck (28) (vgl. die Umformung, die (21) in (22) übergeführt hat) genau gleich

$$\log \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\cos (2 n \pi x)}{x}\, dx + \int_0^1 \cos (2 n \pi x) \left\{ C + \sum_{\mu=1}^{m-1} \left(\frac{1}{x + \mu} - \frac{1}{\mu} \right) \right\} dx,$$

und man erhält, wenn hier zunächst nur m zur Grenze ∞ übergeht, wegen der gleichmäßigen Annäherung von (23) an (24),

$$(29) \qquad \log \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\cos (2 n \pi x)}{x}\, dx - \int_0^1 \cos (2 n \pi x) \left[\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x} \right] dx.$$

Ehe wir hier zur Grenze $\varepsilon \to 0$ übergehen, können wir dem letzten Integral, wegen der Regularität des unter ihm stehenden Integranden, die untere Grenze ε statt 0 erteilen. Es entsteht so aus (29) ein Ausdruck, der sich in

$$\log \varepsilon - \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \cos(2\,n\,\pi\,x)\,d\,x$$

zusammenziehen läßt. Integriert man hier partiell, so ergibt sich

$$(30)\quad \log \varepsilon + \log \Gamma(\varepsilon) \cdot \cos(2\,n\,\pi\,\varepsilon) - 2\,n\,\pi \int_{\varepsilon}^{1} \log \Gamma(x) \sin(2\,n\,\pi\,x)\,d\,x.$$

Es ist aber

$$(31)\quad \log \Gamma(\varepsilon) \cos(2\,n\,\pi\,\varepsilon) = -\log \varepsilon + \delta,$$

wo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta = 0.$$

Nach dem eben Bewiesenen muß der Ausdruck (30) mit $\varepsilon \to 0$ in denselben Grenzwert wie (29), d. h. also in (27) übergehen. Man erhält also mit Rücksicht auf (31), wenn noch (19) beachtet wird,

$$(32)\quad n\,\pi\,b_n = 2\,n\,\pi \int_0^1 \log \Gamma(x) \sin(2\,n\,\pi\,x)\,d\,x = C + \log(2\,n\,\pi).$$

Setzt man jetzt die in (25), (26) und (32) gegebenen Koeffizientenwerte in (17) ein, so erhält man die Gleichung

$$\log \Gamma(x) = \tfrac{1}{2} \log(2\,\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\,n} \cos(2\,n\,\pi\,x) \right. \\ \left. + \frac{C + \log(2\,n\,\pi)}{n\,\pi} \sin(2\,n\,\pi\,x) \right\},$$

die für

$$0 < x < 1$$

giltig ist. Nachdem man dann noch die beiden bekannten Reihen, die für sich konvergieren:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\,n} \cos(2\,n\,\pi\,x) = -\tfrac{1}{2} \log 2 - \tfrac{1}{2} \log \sin(\pi\,x)$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C + \log \pi}{n \pi} \sin(2 n \pi x) = (C + \log \pi) \frac{1 - 2x}{2}$$

abgetrennt und durch ihre Summen ersetzt hat, ergibt sich die Kummer'sche Reihe in der gewöhnlichen Form

$$\log \Gamma(x) = (1 - x) \log \pi + C\left(\tfrac{1}{2} - x\right) - \tfrac{1}{2} \log \sin(\pi x) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2n)}{n} \sin(2 n \pi x).$$