Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1928. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1928
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über eine Klasse irreduzibler Gleichungen.

Von **Hermann Schmidt** in Jena.

Vorgelegt von O. Perron in der Sitzung am 9. Juni 1928.

Satz: Es seien $f(x)$, $\varphi(x)$ Polynome von den Graden m, n mit Koeffizienten aus einem vollkommenen Körper $\mathfrak{k}$; beide seien in $\mathfrak{k}$ irreduzibel. In einem und demselben Erweiterungskörper habe $f(x) = 0$ die Wurzeln $x_1, x_2 \ldots x_m$ und $\varphi(x) = 0$ die Wurzeln $y_1, y_2 \ldots y_n$. Der Durchschnitt $\mathfrak{d} = (\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$ der beiden Wurzelkörper

$$\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{K}(\mathfrak{k}, x_1, x_2, \ldots x_m) \text{ und } \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{K}(\mathfrak{k}, y_1, y_2 \ldots y_n)$$

sei mit $\mathfrak{k}$ identisch und die Produkte

$$u_{\mu\nu} = x_\mu y_\nu \begin{Bmatrix} \mu = 1, 2, \ldots m \\ \nu = 1, 2, \ldots n \end{Bmatrix}$$

sämtlich voneinander verschieden. Dann ist das Polynom $\psi(x) = \prod_{\mu,\nu} (x - u_{\mu\nu})$ in $\mathfrak{k}$ irreduzibel.

Beweis: Man hat

$$\psi(x) = \prod_{\mu=1}^{m} \psi_\mu(x), \quad \text{wo} \quad \psi_\mu(x) = \prod_{\nu=1}^{n}(x - x_\mu y_\nu) \cdot$$

$\psi_\mu(x)$ hat offenbar Koeffizienten aus $\mathfrak{K}(\mathfrak{k}, x_\mu)$ und entsprechend $\psi(x)$ solche aus $\mathfrak{k}$. Sei $\mathfrak{G}$ die Gruppe von $\psi(x) = 0$ in $\mathfrak{k}$ und

$$\omega(u_{11} u_{12}, \ldots u_{1n}; u_{21}, \ldots u_{2n}; \ldots u_{m1}, u_{m2}, \ldots u_{mn}) = 0$$

eine Relation zwischen den Wurzeln von $\psi(x) = 0$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{k}$.

Schreibt man sie in der Form

$$\omega(x_1 y_1, \ldots x_1 y_n; x_2 y_1, \ldots x_2 y_n; \ldots x_m y_1, \ldots x_m y_n) \\ = \Omega(x_1, x_2, \ldots x_m) = 0,$$

so hat Ω Koeffizienten aus $\mathfrak{k}_2$. Nun reduziert sich wegen $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2) = \mathfrak{k}$ die Gruppe $\mathfrak{G}_1$ von $f(x) = 0$ in $\mathfrak{k}$ bei Adjunktion von $\mathfrak{k}_2$ nicht[1]); daher bleibt $\Omega = 0$ richtig bei allen in $\mathfrak{G}_1$ enthaltenen Substitutionen der x_μ. Wegen der Irreduzibilität von $f(x)$ gibt es aber, wenn k eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots m$ bedeutet, in $\mathfrak{G}_1$ sicher eine Substitution S_k der Gestalt

$$S_k = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots x_m \\ x_{i_{1,k}} & x_{i_{2,k}} & \ldots x_{i_{m,k}} \end{pmatrix} \quad \text{mit } i_{1,k} = k.$$

Daher bleibt $\omega = 0$ richtig bei den Substitutionen

$$U_k = \begin{pmatrix} u_{\mu\nu} \\ u_{i_{\mu,k}\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\mu & y_\nu \\ x_{i_{\mu,k}} & y_\nu \end{pmatrix},$$

die somit $\mathfrak{G}$ angehören.

Ebenso muß es in der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ von $\varphi(x) = 0$ zu jedem l aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$ eine Substitution T_l geben

$$T_l = \begin{pmatrix} y_\nu \\ y_{j_{\nu,l}} \end{pmatrix} \quad \text{mit } j_{1,l} = l,$$

sodaß in $\mathfrak{G}$

$$V_l = \begin{pmatrix} u_{\mu\nu} \\ u_{\mu j_{\nu,l}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\mu y_\nu \\ x_\mu y_{j_{\nu,l}} \end{pmatrix}$$

vorkommt.

Deshalb gehören zu $\mathfrak{G}$ auch die mn Substitutionen der $u_{\mu\nu}$

$$U_k V_l = \begin{pmatrix} u_{\mu\nu} \\ u_{i_{\mu,k}\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i_{\mu,k}\nu} \\ u_{i_{\mu,k} j_{\nu,l}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\mu\nu} \\ u_{i_{\mu,k} j_{\nu,l}} \end{pmatrix}.$$

Diese sind sämtlich voneinander verschieden, da u_{11} in die mn nach Annahme verschiedenen Elemente $u_{i_{1,k} j_{1,l}} = u_{kl}$ übergeführt wird. Daher ist $\mathfrak{G}$ transitiv und also $\psi(x)$ irreduzibel, w. z. b. w.

Allgemeiner seien $f_\varrho(x) = 0$ $(\varrho = 1, 2, \ldots r)$ r in $\mathfrak{k}$ irreduzible Gleichungen von den Graden n_ϱ mit den Wurzelsystemen $x_{\varrho\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots n_\varrho)$, die wieder in einem gemeinsamen Erweiterungskörper liegen sollen, ferner $u_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r} = x_{1\nu_1} x_{2\nu_2} \ldots x_{r\nu_r}$ und $u_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r} - u_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_r} \neq 0$ für $\sum_1^r {}_\varrho (\nu_\varrho - \varkappa_\varrho)^2 \neq 0$.

Wir setzen

$$F_\sigma(x) = \prod_{\nu_1 \ldots \nu_\sigma} (x - x_{1\nu_1} x_{2\nu_2} \ldots x_{\sigma\nu_\sigma})$$
$$(\sigma = 1, 2, \ldots r;\; F_1(x) = f_1(x)).$$

[1]) Vgl. etwa Hasse, Höhere Algebra II 1927, S. 126, 3.)

Sei ferner

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}_\varrho &= \text{Wurzelkörper von } f_\varrho(x) = 0 \text{ über } \mathfrak{k} \\ \mathfrak{K}_\sigma &= \quad\text{"}\qquad\text{"}\ F_\sigma(x) = 0 \quad\text{"}\quad \mathfrak{k}.\ (\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{k}_1). \end{aligned}$$

Wenn dann $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{k}_2) = (\mathfrak{K}_2, \mathfrak{k}_3) = \ldots (\mathfrak{K}_{r-1}, \mathfrak{k}_r) = \mathfrak{k}$, dann ist $F_r(x)$ irreduzibel in $\mathfrak{k}$.

Das ergibt sich leicht durch sukzessive Anwendung obiger Schlußweise auf die Polynompaare

$$(F_1, f_2);\ (F_2, f_3);\ \ldots (F_{r-1}, f_r),$$

wobei zu beachten ist, daß auch $u_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_\sigma} - u_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_\sigma} \neq 0$ für $\sum_1^\sigma{}_\varrho (\nu_\varrho - \varkappa_\varrho)^2 \neq 0$, da andernfalls auch eine Beziehung

$$u_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_\sigma\nu_{\sigma+1}\ldots\nu_r} - u_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_\sigma\varkappa_{\sigma+1}\ldots\varkappa_r} = 0$$

mit

$$\sum_1^r{}_\varrho (\nu_\varrho - \varkappa_\varrho)^2 \neq 0$$

gälte, wie sie nach Voraussetzung unmöglich ist; man bräuchte ja nur $\nu_{\sigma+1} = \ldots \nu_r = \varkappa_{\sigma+1} = \ldots \varkappa_r = 1$ zu setzen.

Im Falle $\mathfrak{k} = \mathfrak{K}(1)$ sei auf die Verwandtschaft des obigen Satzes mit Satz 87 des Hilbertschen Zahlberichts hingewiesen (aus der Annahme $(d_1, d_2) = 1$ für die Diskriminanten von k_1, k_2 folgt nach Satz 86, 39, 44 a. a. O. $(k_1, k_2) = \mathfrak{K}(1)$, also unsere Voraussetzung). Indessen braucht bei uns weder n_ϱ der Grad von $\mathfrak{k}_\varrho$, noch $\mathfrak{K}_r$ mit $\mathfrak{K}(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots \mathfrak{k}_r)$ identisch zu sein. Andererseits sind dort k_1, k_2 nicht notwendig Galoissche Körper. Ist aber z. B. $f_\varrho(x) = 0$ die Gleichung für die primitiven $p_\varrho^{\alpha_\varrho}$-ten Einheitswurzeln ($p_1, p_2, \ldots p_r$ verschiedene Primzahlen), so sind die Voraussetzungen beider Sätze erfüllt, wie man aus der Kenntnis der Körper $\mathfrak{k}_\varrho$ und ihrer Diskriminanten leicht entnimmt, und hieraus folgt sodann die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung für zusammengesetztes n.