Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1928. Heft III
November-Dezembersitzung

München 1928
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über algebraische, insbesondere lineare Integrale algebraischer Differentialgleichungen 1. Ordnung 1. Grades.

Von **Jos. E. Hofmann.**

Mit 3 Textfiguren.

Vorgelegt von W. v. Dyck in der Sitzung am 10. November 1928.

Einleitung.

Die folgenden Untersuchungen handeln von algebraischen Integralen einer algebraischen Differentialgleichung 1. Ordnung 1. Grades, d. h. von algebraischen Funktionen, welche Integrale der Differentialgleichung sind. Ausgehend von einer projektiv invarianten Form der Differentialgleichung, werden zunächst im 1. Abschnitt einige Abzählungen ausgeführt und daran anschließend wird gezeigt, daß das allgemeine Integral aus hinreichend vielen algebraischen partikulären Integralen aufgebaut werden kann. Insbesondere ist für die gestaltliche Untersuchung die Bemerkung wichtig, daß jeder singuläre Punkt der Differentialgleichung singulär auf der Wendepunktskurve ist; also muß im Innern eines jeden singularitätenfreien Ovals der Wendekurve mindestens ein singulärer Punkt der Differentialgleichung liegen. Dieser merkwürdige Satz gilt übrigens auch allgemeiner für nicht algebraische Differentialgleichungen.

Im 2. Abschnitt werden die Differentialgleichungen behandelt, deren allgemeines Integral sich aus lauter linearen Funktionen aufbauen läßt. Hier zeigt sich, daß die singulären Punkte einer solchen Differentialgleichung in zwei Gruppen zerfallen: die der einen Gruppe sind die Schnittpunkte der geradlinigen Lösungen, die der andern sind singuläre Punkte der Wendekurve und im einfachsten Fall Sattel oder Wirbel, wenn nämlich der Punkt auf der Wendekurve ein isolierter oder ein Doppelpunkt mit zwei verschiedenen reellen Tangentenrichtungen ist.

Im 3. Abschnitt wird der nächst der Jacobi-Differentialgleichung einfachste Fall behandelt: diese Differentialgleichung enthält im allgemeinen vier geradlinige Lösungen und ihr allgemeines Integral läßt sich aus diesen aufbauen. Die Wendekurve ist hier einfach ein Geradenpaar, dessen Schnittpunkt für die Differentialgleichung singulär ist. Es wird zuerst eine Hilfsgleichung untersucht, sodann der allgemeine Fall. —

Uber den gleichen Gegenstand sind dem Verfasser nur zwei Veröffentlichungen bekannt geworden. Die eine ist das „Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré“ von G. Darboux[1]). Hier wird das allgemeine Integral in Form der folgenden Gleichung (6) gegeben, aber diese selbst auf anderm Wege abgeleitet. Nun bestimmt Darboux an Hand einer Abschätzung aus der folgenden Gleichung (4) die notwendige Höchstzahl verschiedener algebraischer Integrale der Gleichung, damit das allgemeine Integral die Form (6) habe, erhält aber dabei eine viel zu große Zahl. Herr Lutz[2]) hat bei anderer Gelegenheit in einem Fall, der in dem des Satzes 9 enthalten ist, an Hand einer von der gegebenen völlig verschiedenen Überlegung gezeigt, daß diese Zahl erniedrigt werden kann. Im übrigen steht das Ergebnis meines Satzes 6 bzw. 7 im Gegensatz zu dem Ergebnis der Überlegungen, die Herr Lutz in seinem § 13 anstellt. Wahrscheinlich sollte dort stehen:

„Zu speziellen Connexen (1,4) läßt sich ein Nullsystem 5. Grades, bestimmt durch drei allgemeine Korrelationen und Doppelverhältnis μ so konstruieren, daß die Hauptcoinzidenz des Connexes und der Nullpunkt des Nullsystems identisch sind.“

---

[1]) Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, 1878.

[2]) Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Abt., Jahrg. 1926, S. 231—277.

1. Abschnitt: Über algebraische Grundlösungen.

§ 1. Höchstzahl der wesentlichen Konstanten und singulären Punkte.

Vermöge der Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

wird ein die projektive (x_1, x_2, x_3)-Ebene einfach bedeckendes Kurvensystem definiert. Dabei sei das Koordinatendreieck reell, die A^k seien homogene Polynome m-ter Ordnung in x_1, x_2, x_3 mit reellen Koeffizienten und so gewählt, daß die drei Funktionen

$$B^1 = A^2 x_3 - A^3 x_2, \quad B^2 = A^3 x_1 - A^1 x_3, \quad B^3 = A^1 x_2 - A^2 x_1 \tag{1a}$$

keinen gemeinsamen Teiler besitzen.

Die Differentialgleichung ist projektiv invariant, d. h. sie ändert ihren Typ nicht bei umkehrbaren projektiven Transformationen. Mittels (1a) läßt sie sich so schreiben

$$B^1 dx_1 + B^2 dx_2 + B^3 dx_3 = 0, \tag{2}$$

wobei noch die Identität gilt

$$B^1 x_1 + B^2 x_2 + B^3 x_3 = 0. \tag{2a}$$

(1) ist völlig gleichwertig mit (2) + (2a). Nun enthält (2) i. a. $3\binom{m+3}{2}$ homogene Konstante, die vermöge (2a) $\binom{m+4}{2}$ linearen homogenen Gleichungen genügen:

Satz 1: Differentialgleichung (1) enthält höchstens $m^2 + 4m + 2$ wesentliche Konstante.

Die singulären Stellen von (1) sind isoliert und die gemeinsamen Nullstellen von B^k. Wir dürfen annehmen, daß auf den Koordinatenseiten kein singulärer Punkt liegt (stimmt es noch nicht, so läßt es sich durch eine projektive Transformation erreichen). Die singulären Punkte von (1) liegen also gleichzeitig auf den drei Kurven $(m+1)$-ter Ordnung $B^k = 0$, die sich je zu zweit in m Punkten einer Koordinatenseite begegnen.

Satz 2: Die Differentialgleichung (1) besitzt höchstens $m^2 + m + 1$ singuläre Punkte.

§ 2. Hesse-Kurve des Lösungssystems.

Ist $\mu(x_1, x_2, x_3)$ eine (nicht verschwindende) Lösung der Differentialgleichung

$$1)\qquad \frac{\partial}{\partial x_1}(\mu A^1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\mu A^2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\mu A^3) = 0,$$

und ist μ in x_1, x_2, x_3 homogen von der Ordnung $-(m+2)$, so wird bekanntlich vermöge dieses „letzten Jakobi-Multiplikators" der Differentialausdruck

$$2)\qquad \mu(B^1 dx_1 + B^2 dx_2 + B^3 dx_3) \equiv d\Phi$$

vollständiges Differential der in x_1, x_2, x_3 homogenen Funktion nullter Ordnung $\Phi(x_1, x_2, x_3)$; somit ist

$$(3)\qquad \underline{\Phi(x_1, x_2, x_3) = c = \text{konstant}}$$

das allgemeine Integral von (1). Das durch (3) definierte Kurvensystem hat ein und dieselbe Hesse-Kurve $H_\Phi \equiv |\Phi_{\alpha\beta}| = 0$ [1]). Mit Benutzung von (2) folgt nach einfacher Umformung

$$3)\qquad (m+1)H_\Phi = -\mu^3\Omega,$$

wobei gesetzt ist

$$(3\text{a})\qquad \underline{\Omega(x_1, x_2, x_3) \equiv \begin{vmatrix} B^1_1 & B^1_2 & B^1_3 \\ B^2_1 & B^2_2 & B^2_3 \\ B^3_1 & B^3_2 & B^3_3 \end{vmatrix}}.$$

Weder μ noch Ω können identisch verschwinden. Die Hesse-Kurve zerfällt in die (nicht weiter bemerkenswerte) Kurve $\mu = 0$ und die Kurve $\Omega = 0$. Aus (3a) folgt unmittelbar

Satz 3: Die durch $\Omega = 0$ dargestellte Kurve $3m$-ter Ordnung setzt sich zusammen aus den geradlinigen Lösungen und aus dem Ort der Wendepunkte („Wendeort" oder „Wendekurve") der Differentialgleichung; sie hat die sämtlichen singulären Punkte der Differentialgleichung zu singulären Kurvenpunkten.

§ 3. Algebraische Grundlösungen.

Da $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ eine homogene Funktion nullter Ordnung in x_1, x_2, x_3 ist, gehören in (3) höchstens zu $c = 0$ solche par-

---

[1]) Zur Abkürzung steht $U_\varkappa$ für $\frac{\partial U}{\partial x_\varkappa}$ usw.

tikuläre algebraische Lösungen, die ohne irgendwelche Umformungen in der Gestalt $[G(x_1, x_2, x_3)]^\gamma = 0$ erscheinen ($\gamma \neq 0$ konstant, G homogenes Polynom n-ter Ordnung in x_1, x_2, x_3); wir wollen solche Lösungen als algebraische Grundlösungen bezeichnen.

Ist $G = 0$ Grundlösung n-ter Ordnung, so muß sich die Differentialgleichung $B^1 dx_1 + B^2 dx_2 + B^3 dx_3 = 0$ vermöge $G = 0$ zurückführen lassen auf $G_1 dx_1 + G_2 dx_2 + G_3 dx_3 = 0$, d. h. es muß gelten

1) $$B^\varkappa \equiv Q^\varkappa G + R G_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, 3),$$

wobei die $Q^\varkappa$ homogene Polynome $m - n + 1$-ter Ordnung in x_1, x_2, x_3 sind und R wegen (2a) bestimmt wird aus

2) $$Q^1 x_1 + Q^2 x_2 + Q^3 x_3 + n R = 0.$$

Mit (1a) geht 1) über in

3) $$\begin{cases} n A^1 = Q^3 G_2 - Q^2 G_3 + K x_1 \\ n A^2 = Q^1 G_3 - Q^3 G_1 + K x_2, \\ n A^3 = Q^2 G_1 - Q^1 G_2 + K x_3, \end{cases}$$

wo $K(x_1, x_2, x_3)$ ein homogenes Polynom $(m - 1)$-ter Ordnung in x_1, x_2, x_3 ist. Hieraus folgt endlich

(4) $$\underline{\underline{A^1 G_1 + A^2 G_2 + A^3 G_3 = K G.}}$$

Aus den Gleichungen 1) erschließen wir den

Satz 4: Eine Grundlösung der Differentialgleichung (1) hat höchstens die Ordnung $n = m + 1$; sie trägt außer in ihren eigenen singulären Punkten höchstens in $n(m + 2 - n)$ Punkten (den Schnittpunkten von $R = 0$ und $G = 0$) singuläre Punkte der Differentialgleichung.

Soll die vorgegebene Kurve $G = 0$ n-ter Ordnung Grundlösung der Differentialgleichung sein, so muß für sie (4) identisch erfüllt sein. Dies liefert $\binom{m+n+1}{2}$ Gleichungen zwischen den Koeffizienten der Differentialgleichung und den $\binom{m+1}{2}$ unbekannten Koeffizienten der Funktion K, sowie den Koeffizienten von G.

Satz 5: Soll die bestimmte Kurve n-ter Ordnung $G = 0$ Grundlösung sein, so müssen $\frac{n}{2}(2m + n + 1)$ Bedingungen zwischen den Koeffizienten der Differentialgleichung bestehen.

Will man nur fordern, daß überhaupt eine Grundlösung n-ter Ordnung vorhanden ist, so ist diese Zahl um $\frac{n(n+3)}{2}$ zu vermindern.

Satz 6: *Soll die Differentialgleichung eine allgemeine Grundlösung n-ter Ordnung haben, so müssen $n(m-1)$ Bedingungen zwischen den Koeffizienten der Differentialgleichung bestehen.*

Weiter bemerken wir

Satz 7: *Nur im Fall $m = 1$ (Jakobi-Differentialgleichung) ist das Auftreten von Grundlösungen selbstverständlich; in jedem andern Fall sind die Differentialgleichungen mit Grundlösungen von einfacherer Art als die ohne Grundlösungen.*

§ 4. **Höchstzahl der Grundlösungen einer Differentialgleichung.**

Ist $G = 0$ Grundlösung n-ter Ordnung, so gilt, wie im vorigen § auseinandergesetzt wurde

1) $$B^\varkappa = Q^\varkappa G + R G_\varkappa, \quad \sum Q^\varkappa x_\varkappa + nR = 0.$$

Daraus folgt

2) $$R\frac{dG}{G} + Q^1 dx_1 + Q^2 dx_2 + Q^3 dx_3 = 0.$$

Haben wir nun zwei Grundlösungen $G^1 = 0$ der Ordnung n_1 und $G^2 = 0$ der Ordnung n_2, so tritt an Stelle von 1) die Beziehung

3) $$B^\varkappa = Q^\varkappa G^1 G^2 + R^1 G^1_\varkappa G^2 + R^2 G^1 G^2_\varkappa,$$

wobei

4) $$\sum Q^\varkappa x_\varkappa + n_1 R^1 + n_2 R^2 = 0.$$

Dabei sind R^1 und R^2 homogene Polynome der Ordnung $(m + 2 - n_1 - n_2)$ in x_1, x_2, x_3. Aus (3) folgt sogleich

5) $$R^1\frac{dG^1}{G^1} + R^2\frac{dG^2}{G^2} + Q^1 dx_1 + Q^2 dx_2 + Q^3 dx_3 = 0.$$

Es ist klar, wie sich dies entsprechend bei drei und mehr Grundlösungen durchführen läßt. Es kann schließlich sein, daß wir q Grundlösungen $G^1, G^2, G^3, \ldots, G^q$ haben, deren k_1 von der Ordnung n_1, k_2 von der Ordnung $n_2, \ldots, k_q$ von der Ordnung n_q sind, wobei gilt

(5) $$\underline{\sum_1^q{}^\nu k_\nu n_\nu = m + 2\,.}$$

Dabei seien die G^ν alle verschieden und teilerfremd! Alsdann ist $Q^1 = Q^2 = Q^3 = 0$; ferner

6) $$B^\varkappa = \beta^1 G^1_\varkappa G^2 \,..\, G^q + \beta^2 G^2_\varkappa G^3 \,..\, G^q G^1 + \ldots + \beta^q G^q_\varkappa G^1 \,..\, G^{q-1},$$

wobei die β^ν konstant sind. Jetzt geht Gleichung

$$B^1 dx_1 + B^2 dx_2 + B^3 dx_3 = 0 \text{ über in } \sum \beta^\nu \frac{dG^\nu}{G^\nu} = 0,$$

und es gilt

(6) $$\underline{\Phi \equiv (G^1)^{\beta^1} \cdot (G^2)^{\beta^2} \ldots . (G^q)^{\beta^q} = \text{konstant};}$$
$$\underline{\beta^\nu \neq 0; \quad \sum_1^q{}^\nu n_\nu \beta^\nu = 0\,.}$$

Damit haben wir den wichtigen Satz bewiesen.

Satz 8: Läßt sich eine Zahl von $q \leq m + 2$ verschiedenen teilerfremden Grundlösungen $G^\nu = 0$ der Differentialgleichung (1) angeben, von denen k_1 die Ordnung n_1, k_2 die Ordnung n_2, ..., k_q die Ordnung n_q haben, und gilt $\sum_1^q{}^\nu k_\nu n_\nu = m + 2$, so ist die Differentialgleichung (1) durch Quadraturen integrierbar, und ihr allgemeines Integral hat die Form (6), wobei links eine Funktion nullter Ordnung in x_1, x_2, x_3 steht.

So haben wir ein Ergebnis von Darboux (a. a. O.) auf andere Weise wiedergefunden und verbessert; denn Darboux hat als obere Schranke q die viel zu große Zahl $\binom{m+1}{2} + 2$ erhalten.

Den Abschluß dieser allgemeinen Erörterungen bildet folgender

Satz 9: Kennt man $q \leq m + 2$ verschiedene teilerfremde rationale Grundlösungen $G^\nu = 0$ der Differentialgleichung, von denen k_1 die Ordnung n_1, k_2 die Ordnung n_2, ..., k_q die Ordnung n_q haben, und gilt $\sum_1^q{}^\nu k_\nu n_\nu = m + 2$, so enthält die Differentialgleichung genau $3m + 4$ wesentliche Konstante.

Zum Beweis bedenken wir, daß eine rationale Kurve n-ter Ordnung $3n-1$ wesentliche Konstante besitzt; die $\sum k_\nu$ rationalen Kurven haben also $\sum k_\nu (3n_\nu - 1)$ wesentliche Konstante. Von den $\sum k_\nu$ Exponenten sind $\sum k_\nu - 2$ wesentlich. Das allgemeine Integral besitzt also

$$7) \qquad \sigma = \sum k_\nu (3n_\nu - 1) + \sum k_\nu - 2 = 3(m+2) - 2 = 3m + 4$$

wesentliche Konstante, und ebensoviele enthält auch die Differentialgleichung. Auf diese Zahl können wir auch durch die folgende Überlegung kommen: Die Gesamtzahl der wesentlichen Konstanten der Differentialgleichung ist $m^2 + 4m + 2$; die $\sum k_\nu$ Grundlösungen verzehren $(m-1)\sum k_\nu n_\nu = (m-1)(m+2)$. Es verbleiben als wesentliche Konstante $3m+4$, wie vorhin.

2. Abschnitt: Geradlinige Lösungen.

§ 5. Allgemeines; Wendepunkte.

Wir wenden uns nun zu Differentialgleichungen (1) mit $m+2$ verschiedenen geradlinigen Lösungen. Hier liegen die Verhältnisse besonders einfach, weil die geradlinigen Lösungen zugleich Zweige der Kurve $\Omega = 0$ sind.

Ist $x_3 = 0$ eine geradlinige Lösung, so gilt sicher $A^3 \equiv x_3 \cdot A$. Gehen wir mit $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$ zurück zu Cartesischen Koordinaten, so wird die Differentialgleichung zu

$$(7) \qquad \underline{A(x, y) + B(x, y) \cdot y' = 0} \quad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right),$$

worin A, B Polynome m-ten Grades in x, y sind. (7) hat die uneigentliche Gerade zur Lösung, auf der höchstens $m+1$ singuläre Punkte liegen. (Man zeigt übrigens leicht, daß jede Gerade, auf der $m+1$ singuläre Punkte liegen, Lösung der Differentialgleichung ist.) Die übrigen m^2 singulären Punkte sind genau die Schnittpunkte der beiden Kurven m-ter Ordnung $A = 0$, $B = 0$. (7) enthält $m^2 + 3m + 1$ Konstante, also $m+1$ weniger wie im allgemeinen Fall.

Die $m+1$ eigentlichen geradlinigen Lösungen geben wir in der Form

$$1) \qquad g_\varkappa \equiv y - h_\varkappa x - p_\varkappa = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, m+1)$$

und wir dürfen (ev. nach vorhergehender Drehung) alle h_k endlich denken. Die Geraden $g_\varkappa$ bestimmen (höchstens) $\binom{m+1}{2}$ Schnittpunkte, die für die Differentialgleichung singulär sind. Es bleiben (höchstens) $m^2 - \binom{m+1}{2} = \binom{m}{2}$ singuläre Punkte, die auf keiner geradlinigen Lösung liegen. Sie müssen also singuläre Punkte für die Wendekurve sein. Nach ausgeführter Partialbruchzerlegung wie in § 4 können wir der Differentialgleichung die Form geben

$$2) \qquad \sum_1^{m+1} {}^{\varkappa} \beta^\varkappa \frac{y' - h_\varkappa}{g_\varkappa} = 0$$

mit

$$2a) \qquad \sum_1^{m+1} {}^{\varkappa} \beta^\varkappa = 1; \quad \beta^\varkappa \neq 0.$$

Differentiieren wir hier und setzen dann $y'' = 0$, so folgt

$$3) \qquad \sum_1^{m+1} {}^{\varkappa} \beta^\varkappa \left(\frac{y' - h_\varkappa}{g_\varkappa}\right)^2 = 0.$$

Multiplizieren wir in 2) mit $\Pi g_\varkappa$, in 3) mit $(\Pi g_\varkappa)^2$, so erhalten wir nach Entfernung von y' die Kurve $3m$-ter Ordnung, die in diesen Koordinaten der Kurve $\Omega = 0$ entspricht. Wir wissen aber, daß sie noch $m+1$ geradlinige Lösungen enthalten muß. Um diese zu entfernen, bilden wir unter Berücksichtigung von 2)

$$4) \qquad (y' - h_\varkappa) \cdot \left(\sum_1^{m+1} {}^{\varrho} \frac{\beta^\varrho}{g_\varrho}\right) = - \sum_1^{m+1} {}^{\varrho} \frac{\beta^\varrho (h_\varkappa - h_\varrho)}{g_\varrho} = \frac{g_\varkappa Q_\varkappa(x, y)}{\Pi g_\varrho}.$$

Auf diese Weise haben wir $m+1$ teilerfremde Polynome $Q_\varkappa$ je vom Grade $m-1$ in x, y definiert. Multiplizieren wir in 3) mit dem Quadrat von $\left(\sum \frac{\beta^\varrho}{g_\varrho}\right) \cdot (\Pi g_\varrho)$, so erhält die Wendekurve von (1) die Gleichung

$$5) \qquad W(x, y) \equiv \sum_1^{m+1} {}^{\varkappa} \beta^\varkappa Q_\varkappa^2 = 0.$$

Sie hat also die Ordnung $2(m-1)$, wie es sein muß, und besitzt singuläre Punkte in den verbleibenden höchstens $\binom{m}{2}$ singulären Punkten der Differentialgleichung, die nicht auf den geradlinigen Lösungen liegen.

Es sei nun x_0, y_0 einer dieser singulären Punkte und es werde zur Abkürzung gesetzt $g_\varkappa^0 \equiv y_0 - h_\varkappa x_0 - p_\varkappa \neq 0$. Dann bedenken wir, daß $\sum \frac{\beta^\varkappa}{g_\varkappa^0} = 0$, $\sum \frac{\beta^\varkappa h_\varkappa}{g_\varkappa^0} = 0$, und bilden

$$6)\quad \begin{cases} \sum \frac{\beta^\varkappa}{g_\varkappa} = (x - x_0) \sum \frac{\beta^\varkappa h_\varkappa}{g_\varkappa g_\varkappa^0} - (y - y_0) \sum \frac{\beta_\varkappa}{g_\varkappa g_\varkappa^0}, \\ \sum \frac{\beta^\varkappa h_\varkappa}{g_\varkappa} = (x - x_0) \sum \frac{\beta^\varkappa h_\varkappa^2}{g_\varkappa g_\varkappa^0} - (y - y_0) \sum \frac{\beta^\varkappa h_\varkappa}{g_\varkappa g_\varkappa^0}, \end{cases}$$

und

$$7)\qquad \Delta(x, y) = \begin{vmatrix} \sum \frac{\beta^\varkappa h_\varkappa}{g_\varkappa g_\varkappa^0} & \sum \frac{\beta^\varkappa}{g_\varkappa g_\varkappa^0} \\ \sum \frac{\beta^\varkappa h_\varkappa^2}{g_\varkappa g_\varkappa^0} & \sum \frac{\beta^\varkappa h_\varkappa}{g_\varkappa g_\varkappa^0} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2} \sum_{1}^{m+1}{}_{\varkappa,\lambda} \frac{\beta_\varkappa \beta_\lambda (h_\varkappa - h_\lambda)^2}{g_\varkappa g_\lambda g_\varkappa^0 g_\lambda^0}.$$

Ist $\Delta(x_0, y_0) \neq 0$, so ist x_0, y_0 auf der Wendekurve gewöhnlicher Doppelpunkt mit zwei verschiedenen Tangentenrichtungen; die Differentialgleichung ist bei x_0, y_0 angenähert dargestellt durch

$$8)\qquad \left\{(x - x_0) \sum \frac{\beta h}{g_0^2} - (y - y_0) \sum \frac{\beta}{g_0^2}\right\} y' = (x - x_0) \sum \frac{\beta h^2}{g_0^2} - (y - y_0) \sum \frac{\beta h}{g_0^2}$$

in wohl leicht verständlicher Abkürzung. Diese Ersatzdifferentialgleichung hat x_0, y_0 zum Sattel oder Wirbel; ihre geradlinigen Lösungen sind gleichzeitig die beiden Tangenten an die Wendekurve im Doppelpunkt x_0, y_0. Aber auch für die ursprüngliche Differentialgleichung ist x_0, y_0 Sattel oder Wirbel und wenn es (natürlich nur im ersten Fall!) Lösungen gibt, die in x_0, y_0 münden, so berühren diese je einen Zweig der Wendekurve. Es könnte ja höchstens noch ein Strudel in Frage kommen; diese Möglichkeit scheidet aber wegen der Form des allgemeinen Integrals aus.

Ist $\Delta(x_0, y_0) = 0$, so liegen die Dinge viel verwickelter; wir wollen hierauf nicht weiter eingehen. Jedenfalls gilt der

Satz 10: Diejenigen von den höchstens $\binom{m}{2}$ singulären Punkten der Differentialgleichung (2), die auf keiner geradlinigen Lösung liegen und für die $\Delta(x_0, y_0) \neq 0$ ist, sind gewöhnliche Doppelpunkte für die Wendekurve und Sattel bzw. Wirbel für die Differentialgleichung. Gehen durch einen solchen Doppelpunkt der Wendekurve zwei verschiedene reelle Zweige *derselben, so überschreitet je eine Lösung der Differentialgleichung den singulären Punkt, wobei sie je einen Zweig der Wendekurve berührt.*

§ 6. Diskussion der singulären Punkte, durch die genau zwei geradlinige Lösungen gehen.

Wir nehmen zur Diskussion der übrigen singulären Stellen unserer Differentialgleichung zunächst an, daß von den $m+2$ geradlinigen Lösungen keine drei durch ein und denselben Punkt gehen. Dann liegt einer der zu untersuchenden singulären Punkte, z. B. $P_{\varkappa\lambda}$, stets auf zwei geradlinigen Lösungen $g_\varkappa$ und g_λ $(\varkappa \neq \lambda)$.

a) $P_{\varkappa\lambda}$ sei Schnittpunkt der reellen Geraden $g_\varkappa$ und g_λ.

Wir führen mit

1) $$x = \varrho g_\varkappa, \quad y = \varrho g_\lambda, \quad z = \varrho g \qquad [g \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3]$$

neue Koordinaten ein ($g = 0$ bedeute eine Gerade nicht durch $P_{\varkappa\lambda}$). Mit $z = 1$ erhalten wir für die Lösungen in hinreichender Nähe von $P_{\varkappa\lambda}$ die Darstellung

2) $$|x|^{\beta^\varkappa} |y|^{\beta^\lambda} \Psi(x, y) = C,$$

wo $\Psi(x, y)$ eine für $x = 0$, $y = 0$ nicht verschwindende und für hinreichend kleine $x^2 + y^2$ analytische Funktion von x, y ist.

Ist $\beta^\varkappa \beta^\lambda > 0$, so ist $P_{\varkappa\lambda}$ ein Sattel.

Ist $\beta^\varkappa \beta^\lambda < 0$, $|\beta_\varkappa| < |\beta_\lambda|$, so ist $P_{\varkappa\lambda}$ ein Knoten und die weiteren in ihn mündenden Lösungen haben g_k zur Tangente.

Ist $\beta^\varkappa + \beta^\lambda = 0$, so geht durch $P_{\varkappa\lambda}$ in jeder Richtung genau eine Lösung, die sich über diesen Punkt hinaus fortsetzen läßt.

b) $P_{\varkappa\lambda}$ sei Schnittpunkt der konjugiert imaginären Geraden $g_\varkappa, g_\lambda$.

Dann ist $g_\varkappa = g' + i g''$, $g_\lambda = g' - i g''$; $\beta^\varkappa = \beta' + i \beta''$, $\beta^\lambda = \beta' - i \beta''$.

Jetzt führen wir folgende neue Koordinaten ein

3) $$r e^{i\varphi} = \varrho (g' + i g''), \quad z = \varrho g \equiv \varrho (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)$$

wie vorhin. Mit $z = 1$ kommt

4) $$r^{2\beta'} e^{-2\beta''\varphi} X(r, \varphi) = C,$$

wo $X(r, \varphi)$ eine für $r = 0$ nicht verschwindende und für hinreichend kleine $r > 0$ analytische Funktion von r, φ ist und in φ die Periode 2π besitzt.

Ist $\beta'' \neq 0$, so ist $P_{\varkappa\lambda}$ ein Strudel; ist $\beta'' = 0$, so ist $P_{\varkappa\lambda}$ ein Wirbel.

c) Ist $P_{\varkappa\lambda}$ Schnittpunkt von zwei nicht konjugierten Geraden, deren mindestens eine imaginär ist, so ist $P_{\varkappa\lambda}$ selbst imaginär und kommt für unsere aufs Reelle beschränkte Untersuchung nicht mehr in Frage.

§ 7. Zusammenfassung; Erweiterung auf die durch Grenzübergang zu bildenden Lösungen und Differentialgleichungen.

Fassen wir nun die Ergebnisse der beiden letzten §§ zusammen!

Satz 11: Die Differentialgleichung (1) besitzt höchstens $m + 2$ geradlinige Lösungen $g_\varkappa = 0$, deren keine drei durch einen Punkt gehen. Bei Erreichung der Höchstzahl ist sie durch eine Quadratur zu integrieren und hat das allgemeine Integral $g_1^{\beta^1} g_2^{\beta^2} \cdots g_{m+2}^{\beta^{m+2}} = C$, $\sum \beta^\varkappa = 0$; $\beta^\varkappa \neq 0$. Von ihren höchstens $m^2 + m + 1$ singulären Punkten sind $\binom{m+1}{2}$ Schnittpunkte der geradlinigen Lösungen und zu diskutieren wie in § 6; von den höchstens $\binom{m}{2}$ weitern singulären Punkten liegt keiner auf einer der geradlinigen Lösungen und ist jeder gleichzeitig singulär für die Wendekurve, die von der Ordnung $2(m-1)$ ist; stellt einer auf der Wendekurve einen gewöhnlichen Doppelpunkt vor, so ist er ein Wirbel oder Sattel.

In doppelter Weise lassen sich diese Untersuchungen durch Grenzübergang erweitern:

a) Entweder dadurch, daß wir mehrere der geradlinigen Lösungen stetig parallel zu sich selbst bewegen derart, daß sie schließlich durch einen Punkt gehen. Alsdann ändert sich an der Form des allgemeinen Integrals gar nichts. Gehen p geradlinige Lösungen durch den Punkt P_0, so sendet die Wendekurve genau $2(p-2)$ Zweige durch P_0. Die Form der Integralkurven nahe bei P_0 ist in den Sektoren zwischen zwei geradlinigen Lösungen durch P_0, in denen keine weitern geradlinigen Lösungen durch P_0 liegen, genau so zu bestimmen wie in § 6.

b) Bei der andern Art des Grenzübergangs lassen wir mehrere geradlinige Lösungen zusammenrücken. Sei etwa $g_0 \equiv y - h_0 x - p_0 = 0$ $\left[\frac{1}{h_0} \neq 0\right]$ eine derart q-fach zu zählende Lösung! Dann finden wir aus der Partialbruchzerlegung wie in § 5, Gleichung 2) für die Umgebung von g_0 die Darstellung

$$1) \qquad g_0^{\beta^0} \cdot e^{\frac{x\beta'}{g_0} + \frac{x^2 \beta''}{g_0^2} + \cdots + \frac{x^{q-1}\beta^{(q-1)}}{g_0^{q-1}}} \cdot \left(\prod_1^{\lambda} g_\varkappa^{\beta^\varkappa}\right) = C, \quad \beta^0 + \sum \beta^\varkappa = 1$$

und können auch hier leicht die Diskussion durchführen. Alles hängt hier ab vom Zeichen des Koeffizienten $\beta^{(q-1)}$.

Wenden wir nun die eine oder andere Art der angedeuteten Grenzübergänge mehrfach an, so wird an der Sache nichts Wesentliches geändert. Damit sind alle Differentialgleichungen gekennzeichnet, die aus dem integrablen Typ mit der Höchstzahl geradliniger Lösungen (keine drei durch einen Punkt) durch Grenzübergang gewonnen werden können.

Wir bemerken, daß sich Grenzübergänge der eben beschriebenen Art auch im allgemeinen Fall des § 4 ausführen lassen. Schließlich weisen wir darauf hin, daß die Integralkurven jedesmal dann alle algebraisch sind, wenn alle g_k (bzw. G^k) verschieden und alle $\beta^\varkappa$ reell und rational sind.

3. Abschnitt: $m = 2$; vier geradlinige Lösungen.

§ 8. Allgemeines.

Wir wenden uns zum Fall $m = 2$ mit vier geradlinigen Lösungen g_1, g_2, g_3, g_4 und nehmen zunächst an, daß deren keine drei durch einen Punkt gehen.

Von den sieben auftretenden singulären Punkten fallen sechs in die Ecken $P_{\varkappa\lambda} = g_\varkappa \times g_\lambda$ des vollständigen Vierseits der g_k; der 7. singuläre Punkt P_0 ist Doppelpunkt der Wendekurve, die von der Ordnung 2 ist, also einen zerfallenden Kegelschnitt vorstellt. Das Linienpaar der Wendegeraden ist unter Annahme reeller g_k reell verschieden für $\beta^1 \beta^2 \beta^3 \beta^4 > 0$, konjugiert imaginär für $\beta^1 \beta^2 \beta^3 \beta^4 < 0$. Eine Doppelwendegerade kann nicht auftreten.

Machen wir etwa g_4 zur uneigentlichen Geraden und führen Cartesische Koordinaten ein, so gilt das Gleichungspaar

$$1)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_{23}\,\beta^1 + x_{31}\,\beta^2 + x_{12}\,\beta^3 + x_0\,\beta^4 = 0 \\ y_{23}\,\beta^1 + y_{31}\,\beta^2 + y_{12}\,\beta^3 + y_0\,\beta^4 = 0 \end{array}\right\}.$$

Da noch $\beta^1 + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 = 0$ hinzutritt, so sind $\beta^1, \beta^2, \beta^3$ die Schwerpunktskoordinaten des 7. singulären Punktes bezüglich des Dreiecks P_{12}, P_{23}, P_{31}. Damit sind sie auch in bestimmter Weise als Doppelverhältnisse zu definieren. Sind also g_1, g_2, g_3, g_4 gegeben, so sind die $\beta^\varkappa$ bis auf ihre Verhältnisse bestimmt, wenn noch P_0 gegeben ist.

Satz 12: Sind die vier geradlinigen Lösungen g_k und der 7. singuläre Punkt P_0 nicht auf ihnen der Lage nach bekannt, so ist die zugehörige Differentialgleichung eindeutig festgelegt.

Sehen wir zwei Differentialgleichungen, die sich durch umkehrbare projektive Transformationen ineinander überführen lassen, als gleichwertig an, so erkennen wir demnach, daß es eine zweifache Mannigfaltigkeit wesentlich verschiedener Differentialgleichungen des zu untersuchenden Typus gibt.

Die gestaltliche Diskussion ist sofort durchführbar, wenn noch die Richtungen der Wendegeraden bekannt sind. Wir können die dazu notwendige Rechnung sparen, wenn wir folgende Überlegung ausführen: Vermöge der Transformation

$$2)\qquad x = x_0 + t\xi, \quad y = y_0 + t\eta \qquad (t \neq 0, \ \text{konstant})$$

erscheint die (x, y)-Ebene als Bild der (ξ, η)-Ebene; legen wir die (ξ, η)-Ebene koaxial auf die (x, y)-Ebene und lassen ihren Ursprung mit P_0 zusammenfallen, so sind beide Ebenen aus P_0 in ähnlicher Lage und t ist der Verzerrungsmaßstab; für $t = 1$ fällt das Bild auf das Original. Die Differentialgleichung und die Lösung (letztere erst nach Multiplikation mit dem Generalnenner) enthält nach Übergang zu ξ, η den Parameter t analytisch. Wie wir auch t wählen, die beiden Wendegeraden durch P_0 in der (x, y)-Ebene sind immer die nämlichen. Mit $t \to 0$ rücken die Punkte P_{23}, P_{31}, P_{12} gemeinsam gegen P_0. In der Differentialgleichung $A + By' = 0$ sind alsdann A, B in $x - x_0$, $y - y_0$ homogen zur zweiten Ordnung und im übrigen teilerfremd. Diese Differentialgleichung hätten wir immer gesondert betrachten müssen, sodaß wir nichts Nutzloses tun, wenn wir sie voraus behandeln.

§ 9. Allgemeine Untersuchung der Hilfsgleichung.

Wir untersuchen also die Differentialgleichung

$$(8)\quad \underline{F(x,y;y') \equiv a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2+(b_0x^2+2b_1xy+b_2y^2)y' = 0}.$$

indem wir P_0 zum Ursprung der x, y-Ebene machen; da außerdem die A, B teilerfremd sind, gilt

$$(8\text{a})\quad \underline{4\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}^2 \neq 0}.$$

Die Partialbruchzerlegung zur Integration folgt aus

$$(9)\quad \underline{\frac{F(x,y;y')}{F(x,y;\frac{y}{x})} \equiv \beta^1\frac{y'-h_1}{\frac{y}{x}-h_1}+\beta^2\frac{y'-h_2}{\frac{y}{x}-h_2}+\beta^3\frac{y'-h_3}{\frac{y}{x}-h_3}},$$

indem wir die h_k (sie sind die Wurzeln der Gleichung $F(1,h;h)=0$) endlich und verschieden annehmen. Aus (9) folgt unmittelbar mit $y' = \frac{y}{x}$

$$(9\text{a})\quad \underline{\beta^1+\beta^2+\beta^3 = 1}, \quad \text{also } \beta^4 = -1.$$

Die Wendekurve hat die Gleichung

$$(10)\quad \underline{W(x,y) \equiv \begin{vmatrix} \beta^1 & h_1\beta^1 & (y-h_1x)^2 \\ \beta^2 & h_2\beta^2 & (y-h_2x)^2 \\ \beta^3 & h_3\beta^3 & (y-h_3x)^2 \end{vmatrix} = 0}$$

mit der Diskriminante

$$(10\text{a})\quad \underline{\Delta_W \equiv \begin{vmatrix} h_1^2 & h_1 & 1 \\ h_2^2 & h_2 & 1 \\ h_3^2 & h_3 & 1 \end{vmatrix}^2 \beta^1\beta^2\beta^3}.$$

Wie wir aus der allgemeinen Theorie (oder direkt) finden, ist (9) gegenüber homogenen affinen Transformationen

$$1)\quad \begin{cases} x = p_1x^* + p_2y^*, \\ y = q_1x^* + q_2y^*, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

invariant; dabei transformieren sich die h_k kovariant, die $\beta^\varkappa$ invariant. Da übrigens die Verhältnisse der $\beta^\varkappa$ bei gegebenen h_k und gegebenen Wendegeraden aus (10) berechenbar sind, bemerken wir: Aus den geradlinigen Lösungen und den Wendegeraden durch den Ursprung ist die Differentialgleichung (8) eindeutig bestimmt. Das Verhalten der Lösungen zu den geradlinigen Lösungen wollen wir entsprechend § 6 so kennzeichnen:

1. $\beta < 0$ Die Lösungen münden längs der geradlinigen in den Ursprung ein; Symbol E.

2. $0 < \beta < 1$ Die Lösungen laufen mit der geradlinigen als Asymptote ins Unendliche; Symbol A.

3. $1 < \beta$ Die Lösungen laufen zur geradlinigen parabolisch (d. h. sie bleiben von einer gewissen Stelle ab zur geradlinigen Lösung konkav und haben keine Asymptote): Symbol P.

Sonderfall: $\beta = 1$. Die Lösungen laufen mit Asymptoten parallel zur geradlinigen Lösung ins Unendliche: Symbol S. Eine geradlinige Lösung fällt im Fall $\beta = 1$ genau mit einer Wendegeraden zusammen, deren gestaltlicher Einfluß damit außer Betracht kommt.

Nun zur gestaltlichen Diskussion selbst. Wir behandeln zuerst den Fall von drei reellen h_k. Die $\beta^\varkappa$ ordnen wir nach der Größe, sodaß also gilt $\beta^1 \leq \beta^2 \leq \beta^3$, und erreichen durch eine passende affine Transformation, daß ihnen drei h_k von folgender Eigenschaft entsprechen: $h_1 < h_2 < h_3$. Da die Differentialgleichung homogen ist, liegen alle nicht geradlinigen Lösungen aus dem Ursprung ähnlich. Wir schreiben zur Kennzeichnung der Typen je drei (richtig gewählte) Symbole der obigen vier A, E, P, S an und wollen damit sagen, daß der Geraden $y - h_1 x = 0$ das 1. Symbol, der Geraden $y - h_2 x = 0$ das 2., der Geraden $y - h_3 x = 0$ das 3. zukommt. Liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden dieser Geraden eine Wendegerade, so setzen wir zwischen ihre Symbole ein W. So können wir jeden der topologisch verschiedenen Fälle kennzeichnen und bemerken, daß damit der Verlauf der Lösungen ohne weiteres abgelesen werden kann.

Bei drei reell verschiedenen h_k haben wir folgende fünf Hauptfälle:

I) EEP II) $EWAAW$ III) $EWAWP$ IV) $EPWWP$ V) AAA. Als Übergangsfälle mit $S = \widehat{AW} = \widehat{WP}$:

II) + III) $EWAS$ III) + IV) $ESWP$ II) + III) + IV) ESS.

Ist von den h_k nur eines (h) reell, die beiden andern konjugiert imaginär, so gilt $\Delta \cdot \beta < 0$. In der vorigen Bezeichnung folgen die drei weiteren Hauptfälle:

VI) E VII) AWW VIII) PWW;

Übergangsfall VII) + VIII) SW.

Hat $F(1, h; h) = 0$ mehrfache Wurzeln, so sind diese alle reell. Ist z. B. h_0 Doppelwurzel, so tritt an Stelle von (9)

$$2)\qquad \beta \frac{y' - h}{y - hx} + (1 - \beta) \frac{y' - h_0}{y - h_0 x} + \beta' \frac{xy' - y}{(y - h_0 x)^2} = 0$$

mit $\beta \neq 0$, $\beta' \neq 0$, $h \neq h_0$. Durch affine Transformation kann β' niemals zu Null werden. Das Integral ist

$$3)\qquad (y - hx)^{\beta} (y - h_0 x)^{1-\beta} e^{-\frac{\beta' x}{y - h_0 x}} = C.$$

Die Geraden $y = hx$, $y = h_0 x$ definieren in der Ebene zwei Winkelfelder; im einen laufen die Lösungen zu $y = h_0 x$ parabolisch, im andern münden sie in den Ursprung längs $y = h_0 x$ ein. Wir erteilen also der Geraden das Symbol PE, womit übrigens auch die geometrische Erzeugungsweise in Einklang steht: es haben sich nämlich zwei geradlinige Lösungen mit den Symbolen P und E vereinigt. Nur geradlinige Lösungen mit diesen Symbolen können sich in der Grenze vereinigen. Wir haben folgende Fälle:

I²) $E\ PE$ aus I); III²) $PE\ WAW$ aus III); IV²) $PWW\ PE$ aus IV). Übergangsfall aus III²) + IV²) $SW\ PE$.

Ist h_0 dreifache Wurzel, so wird (9) ersetzt durch

$$4)\qquad \frac{y' - h_0}{y - h_0 x} + \beta' \frac{xy' - y}{(y - h_0 x)^2} + \frac{x\beta''(xy' - y)}{(y - h_0 x)^3} = 0$$

mit $\beta'' \neq 0$. Durch affine Transformation kann β'' niemals sein Zeichen ändern. Das Integral ist

$$5)\qquad (y - h_0 x)\, e^{-\frac{\beta' x}{y - h_0 x} - \frac{\beta'' x^2}{2(y - h_0 x)^2}} = C.$$

Mit $\beta'' > 0$ laufen also alle Lösungen längs $y = h_0 x$ im Ursprung ein, daher Symbol EPE nach der geometrischen Erzeugung durch Grenzübergang; mit $\beta'' < 0$ laufen die Lösungen zu $y = h_0 x$ parabolisch; daher Symbol PEP. Wir haben folgende Fälle

I³) EPE aus I); gestaltlich wie VI) E;

IV^3) *PEP WW* aus IV); gestaltlich wie VIII) *PWW*.

Damit ist die Gleichung (8) unter der Bedingung (8a) vollständig diskutiert. Es ergeben sich acht Hauptfälle, aus denen zehn weitere durch Grenzübergang gewonnen werden. Die Gestalt der Lösungen ist jeweils aus dem zuerteilten Symbol ablesbar. Man vgl. auch über eine andere Art der Diskussion die Abhandlung von v. Dyck, Über den Verlauf der Integralkurven einer homogenen Differentialgleichung 1. Ordnung[1]).

§ 10. Klassifikation im allgemeinen Fall.

Nun zur Erledigung der gestaltlichen Diskussion im allgemeinen Fall. Wir nehmen folgende Klassifizierung vor:

a) Alle vier geradlinigen Lösungen verschieden, keine drei durch einen Punkt.

I) $\beta^\varkappa + \beta^\lambda \neq 0$; keine Wendegerade ist geradlinige Lösung. („Allgemeiner Fall".)

II) Nach passender Indizierung: $\beta^1 + \beta^2 = 0$, $\beta^3 + \beta^4 = 0$, $\beta^\varkappa \neq \beta^\lambda$ $(\varkappa \neq \lambda)$. Eine Wendegerade ist geradlinige Lösung, die andere nicht.

III) Nach passender Indizierung: $\beta^1 = -\beta^2 = -\beta^3 = \beta^4 \neq 0$. Beide Wendegeraden sind geradlinige Lösungen. Das allgemeine Integral hat die Form $g_1\, g_4 = C g_2\, g_3$; es stellt ein Kegelschnittbüschel vor. Damit ist Fall III) völlig gekennzeichnet und braucht nicht weiter behandelt zu werden.

b) Alle vier geradlinigen Lösungen verschieden, genau drei durch einen Punkt.

Von den geradlinigen Lösungen sind mindestens zwei reell (man zeigt leicht, daß vier geradlinige Lösungen nur dann durch einen Punkt gehen oder einander naherücken und in der Grenze zusammenfallen können, wenn aus der Differentialgleichung der Faktor $xy' - y$ herausgeht, was der Bedingung „A, B teilerfremd" widerspricht). Sind die beiden andern geradlinigen Lösungen imaginär, so liegt ihr reeller Schnittpunkt auf einer der beiden reellen Geraden, aber nicht in deren Schnittpunkt. Machen wir die andere reelle Gerade zur uneigentlichen, so kommen wir genau auf die Fälle des § 9.

---

[1]) Abhandl. d. Bayr. Akad. d. Wissenschaften, XXVI (1913).

c) Mehrere geradlinige Lösungen vereinigen sich.

Wir lassen zunächst etwa g_4 gegen g_3 rücken. Das Bild kann auch dadurch erzeugt werden, daß wir zuerst die drei Geraden g_2, g_3, g_4 durch einen Punkt gehen lassen. Damit kommen wir zu den Fällen des § 9 zurück, außerdem noch zu zwei andern Fällen:

a) g_1, g_2 konjugiert imaginär, $g_4 \rightarrow g_3$
b) $g_2 \rightarrow g_1$, $g_4 \rightarrow g_3$; $g_1 \neq g_3$.

Diese wenig bemerkenswerten Fälle sollen nicht weiter behandelt werden.

Vereinigen sich drei geradlinige Lösungen, so ist die 4. sicher reell und darf zur uneigentlichen Geraden gemacht werden. Damit sind wir zu den in § 9 erwähnten Fällen zurückgekommen.

§ 11: Geometrische Diskussion der noch verbleibenden Fälle.

Die folgenden Untersuchungen gelten also nur den Fällen a I) und a II). Dabei erscheint a II) stets als Sonderfall von a I).

1. Alle vier geradlinigen Lösungen sind reell verschieden.

Die vier Geraden definieren vier Bereiche in der Ebene, die von je drei Geraden begrenzt sind; liegt P_0 in einem derselben, so ist $\beta^1\beta^2\beta^3\beta^4 < 0$ und die Wendegeraden sind konjugiert imaginär. Außerdem definieren die vier Geraden drei Bereiche, die von allen vier Geraden begrenzt werden; liegt P_0 in einem dieser Bereiche, so ist $\beta^1\beta^2\beta^3\beta^4 > 0$ und die Wendegeraden sind reell. Also zwei Fälle.

a) Ist $\beta^1\beta^2\beta^3\beta^4 < 0$,

so haben drei $\beta^\varkappa$ gleiches Zeichen. Dann erreichen wir stets (ev. durch Umordnen der Indizes) $0 < -\beta^1 \leqq -\beta^2 \leqq -\beta^3 < \beta^4$. Die Punkte P_{23}, P_{31}, P_{12} sind Sättel, die Punkte P_{14}, P_{24}, P_{34} sind Knoten, und zwar laufen in sie längs g_4 keine weiteren Lösungen mehr ein. Der Punkt P_0 liegt im Dreieck P_{23}, P_{31}, P_{12} und ist ein Wirbel. Wir machen etwa g_4 zur uneigentlichen Geraden, g_1, g_2, g_3 zu den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks. P_0 liegt in dessen Inneren. Wir nehmen das Beispiel $\beta^1 = -1$, $\beta^2 = -1$, $\beta^3 = -1$, $\beta^4 = 3$; es stellt das wohlbekannte System von Kurven 3. Ordnung dar $g_1\,g_2\,g_3 = C g_4^3$, bei dem P_0 der harmonische Pol der Geraden g_4 bz. des Dreiecks der Geraden $g_1\,g_2\,g_3$ ist. Das Bild im allgemeinen Fall ist von dem dieses Sonderfalles nicht wesentlich verschieden.

b) Ist $\beta^1 \beta^2 \beta^3 \beta^4 > 0$,

so haben je zwei der $\beta^\varkappa$ gleiches Zeichen. Wir erhalten (nach passender Anordnung der Indizes) $0 < \beta^1 < -\beta^2 \leqq -\beta^3 < \beta^4$. Die Punkte P_{14}, P_{23} sind Sättel; die Punkte P_{12}, P_{13} sind Knoten, in die weitere Lösungen längs g_1 münden; die Punkte P_{24}, P_{34} sind Knoten, in die längs g_4 keine weitere Lösung mündet. Der Punkt P_0 ist ein Sattel und liegt im Viereck P_{12}, P_{13}, P_{24}, P_{34}. Wir machen g_1, g_2, g_3, g_4 zu den Seiten eines Quadrats mit den parallelen Seiten g_1, g_4 und g_2, g_3. Dann haben wir das in Fig. 1 wiedergegebene Kurvenbild vor uns. Algebraisches Beispiel: $g_1 g_4^3 = C g_2^2 g_3^2$.

c) Der Sonderfall $0 < \beta_1 = -\beta_2 < -\beta_3 = \beta_4$

gehört zum Typus a II). Jetzt liegen die Punkte P_0, P_{12}, P_{34} in einer Geraden, die selbst Lösung ist; die andere Wendegerade ist

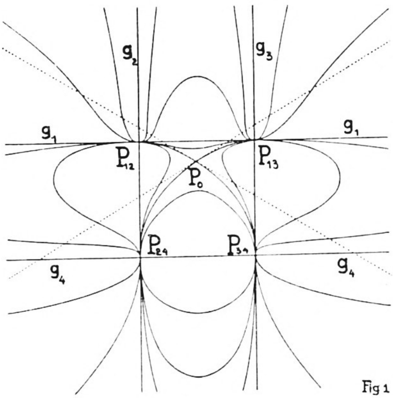

Fig 1

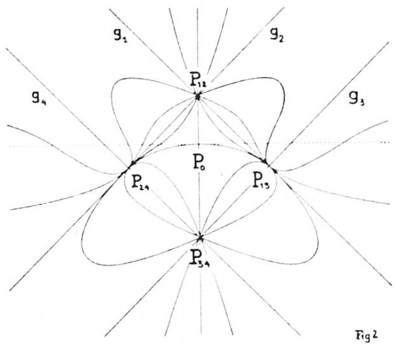

Fig 2

nicht Lösung. Durch P_{12} und P_{34} geht in jeder Richtung genau eine Lösung hindurch. Kurvenbild wie in Fig. 2; algebraisches Beispiel: $g_1 g_4^2 = C g_2 g_3^2$.

2. Zwei geradlinige Lösungen sind reell verschieden, die beiden andern sind konjugiert imaginär.

Die beiden reellen Geraden seien g_1, g_4. Wir setzen
$$g_2 = g' + i g'', \quad g_3 = g' - i g'', \quad \beta^2 = \beta' + i\beta'', \quad \beta^3 = \beta' - i\beta''.$$
Dann hat das allgemeine Integral die Form
$$g_1^{\beta^1} g_4^{\beta^4} (g'^2 + g''^2)^{\beta'} = C e^{2\beta'' \operatorname{arc\,tg} \frac{g''}{g'}}; \quad \beta^1 + \beta^4 + 2\beta' = 0.$$
Nehmen wir $\beta^1 + \beta^4 \neq 0$, so ist $\beta' \neq 0$. Jetzt sind außer P_0

nur die Punkte P_{14}, P_{23} reell. P_{23} ist Strudel für $\beta'\beta'' \neq 0$, Wirbel für $\beta' \neq 0$, $\beta'' = 0$. Werden die Punkte P_0, P_{23} voneinander durch die Geraden g_1, g_4 getrennt, so ist $\beta^1\beta^4 > 0$; werden sie nicht getrennt, so ist $\beta^1\beta^4 < 0$. Also folgende Fälle:

a) Ist $\beta^1\beta^4 > 0$,

so sei etwa $0 < \beta^1 \leq \beta$. Der Punkt P_{14} ist Sattel, P_{23} Strudel oder Wirbel, P_0 Wirbel. Wir machen etwa g_4 zur uneigentlichen Geraden. Dann trennt g_1 das wendepunktsfreie Wirbelgebiet um P_0 von dem wendepunktsfreien Wirbel — oder Strudelgebiet um P_{23}. Die entstehende Figur ist selbstverständlich.

b) Ist $\beta^1\beta^4 < 0$,

so sei $0 < -\beta^1 < \beta^4$. Der Punkt P_{14} ist Knoten; die weitern in ihn mündenden Lösungen haben g_1 zur Tangente. Der Punkt P_0 ist Sattel; es gibt eine Lösung, die von ihm ausgeht und wendepunktsfrei zu ihm zurückkehrt. Sie umschließt den Wirbel oder Strudel P_{23}, und ist im Strudelfall Grenzzykel der Spiralen. Fig. 3 bezieht sich auf den Wirbelfall. Algebraisches Beispiel $(x^2+y^2)(y-1) = C(y+1)^3$.

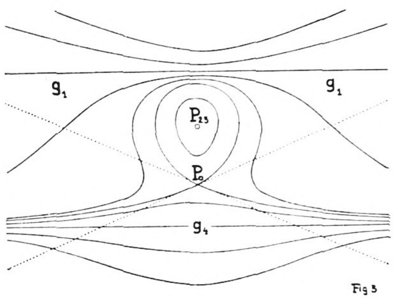

Fig 3

c) Der Sonderfall $0 < -\beta^1 = \beta^4$.

Dann ist $\beta' = 0$, $\beta'' \neq 0$. Das allgemeine Integral hat die Form $g_4 = C g_1 e^{\frac{2\beta''}{\beta^4}\operatorname{arctg}\frac{g''}{g'}}$. Die Punkte P_{14} und P_{23} liegen auf der Wendegeraden, die Lösung ist; durch sie geht in jeder Richtung genau eine Lösung. Für die Figur mache man die Wendegerade zur uneigentlichen, die nicht Lösung ist, und kann dann das Bild leicht aufbauen.

3. Die vier geradlinigen Lösungen sind paarweise konjugiert imaginär.

Wir setzen ähnlich wie oben

$$\begin{array}{llll} g_2 = g' + ig'' & g_1 = h' + ih'' & \beta^2 = \beta' + i\beta'' & \beta^1 = \gamma' + i\gamma'' \\ g_3 = g' - ig'' & g_4 = h' - ih'' & \beta^3 = \beta' - i\beta'' & \beta^4 = \gamma' - i\gamma''. \end{array}$$

Das allgemeine Integral hat dann die Form

$$(g'^2 + g''^2)^{\beta'}(h'^2 + h''^2)^{\gamma'} = C e^{2\beta'' \operatorname{arc\,tg}\frac{g''}{g'} + 2\gamma'' \operatorname{arc\,tg}\frac{h''}{h'}}; \quad \beta' + \gamma' = 0.$$

Von den singulären Punkten ist außer P_0 nur P_{14}, P_{23} reell. P_0 ist auf jeden Fall Sattel.

a) Ist $\beta' \neq 0$, $\beta''\gamma'' \neq 0$,

so sind die Strudel P_{14}, P_{23} für $\beta''\gamma'' > 0$ gleichdrehend und werden durch die Wendestrahlen getrennt; für $\beta''\gamma'' < 0$ sind sie gegendrehend und werden durch die Wendestrahlen nicht getrennt. Im ersten Fall erhalten wir die Figur einfach, indem wir den einen Wendestrahl zur uneigentlichen Geraden machen; im zweiten ist es günstiger beide Wendegerade eigentlich, aber parallel zu machen und die Strudel durch den ganzen Streifen von endlicher Breite zwischen den Wendegeraden zu trennen.

b) Im Sonderfall $\beta' = 0$, $\beta''\gamma'' \neq 0$

ist die Gerade durch P_{14}, P_{23} selbst Lösung und durch diese Punkte geht in jeder Richtung genau eine Lösung. Die Figur ist topologisch von der eines elliptischen Kreisbüschels im Endlichen nicht wesentlich verschieden, wenn wir die Wendegerade uneigentlich machen, die nicht Lösung ist. Form des allgemeinen Integrals: $\beta'' \operatorname{arc\,tg}\frac{g''}{g'} + \gamma'' \operatorname{arc\,tg}\frac{h''}{h'} = C$.

c) Im Sonderfall $\beta' \neq 0$, $\beta''\gamma'' = 0$, $\beta''^2 + \gamma''^2 \neq 0$

sei etwa $\beta'' = 0$, $\gamma'' \neq 0$. Die Lösung hat die Form

$$g'^2 + g''^2 = C(h'^2 + h''^2)\, e^{\frac{2\gamma''}{\beta'} \operatorname{arc\,tg}\frac{h''}{h'}} \; (\beta' > 0.$$

Wieder machen wir die Wendegerade, die nicht Lösung ist uneigentlich. Auf der einen Seite der Wendegeraden, die Lösung ist, liegt dann der Strudel P_{14}, auf der andern Seite der Wirbel P_{23}. Wäre $\beta'' = \gamma'' = 0$, so kämen wir zu einem Fall aus a III) zurück.

Damit haben wir einen Überblick in großen Zügen über die möglichen Fälle im Fall $m = 2$, (mindestens) vier geradlinige Lösungen gegeben. Es bleibt noch zu bemerken, wie hier nicht weiter ausgeführt werde, daß aus einzelnen Sektoren, in denen sich die Lösungen verhalten wie die der eben behandelten Differentialgleichung, in den meisten Fällen der Verlauf der Integralkurven von Gleichungen wie im 2. Abschnitt bestimmbar ist.