Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1929. Heft II

Mai-Julisitzung

München 1929
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über Resultanten und Resultanten-Systeme.

Von **Heinrich Kapferer** in Freiburg i/Br.

Vorgelegt von O. Perron in der Sitzung am 6. Juli 1929.

Einleitung.

Es hat bekanntlich einer langen Entwicklung bedurft, bis die ersten, auch im allgemeinsten Fall brauchbaren Untersuchungen über Resultanten erschienen sind. Als solche darf man wohl die tiefgründigen Arbeiten von F. Mertens[1]) bezeichnen. Fast die ganze nachfolgende Literatur über diesen Gegenstand, also die der letzten 30 Jahre, ist von jenen mehr oder weniger stark beeinflußt. Das Charakteristische der Mertensschen Theorie besteht darin, daß Definition und Existenz der Resultante vom Eliminationsprozeß losgelöst sind, und daß erst viel später gezeigt wird, daß die Resultante auch diejenige Eigenschaft hat, der sie ihren Namen verdankt, daß sie nämlich als Kriterium für die Existenz der Nullstellen eines Formensystems dienen kann.

Diese allgemeine Charakterisierung paßt nicht nur auf die Arbeiten von Mertens, sondern auch auf die großen, auf Mertens aufbauenden Abhandlungen von J. König[2]), 1903, und diejenige von Hurwitz[3]), 1913, ferner auch auf die von Mertens unabhängige neue Methode, mit welcher O. Perron[4]) zur allgemeinen Resultante gelangt.

---

1) F. Mertens, „Über die bestimmenden Eigenschaften der Resultante von n Formen mit n Veränderlichen". Wiener Akad. Sitzber. 93, 1886.

F. Mertens, „Zur Theorie der Elimination", zwei Abhandlungen, 56 und 43 Seiten, Wiener Akad. 108, Abt. IIa, 1899.

2) J. König, „Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen". Leipzig 1903, Teubner.

3) Hurwitz, „Über die Trägheitsformen eines algebraischen Moduls". Annali di Matematica XX. 1913.

4) O. Perron, Algebra, Lehrbuch in 2 Bänden, 1927. Der I. Bd. enthält die die Elimination betreffenden Kapitel. Dem Lehrbuch zeitlich voraus gehen die die Elimination betreffenden Noten desselben Verfassers in den Münchner Akad.-Berichten, 1924, und in der „Mathem. Zeitschrift", 21.

Es ist jedoch merkwürdig, daß der verhältnismäßig komplizierte Begriff der Resultante viel älter ist als ein ihm übergeordneter einfacherer und zugänglicherer Begriff, der erst aus neuster Zeit stammt, nämlich der Begriff des Resultantensystems. Während der Begriff der Resultante — im homogenen Fall — an algebraische Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten gebunden ist, bildet der Begriff „Resultantensystem" — im folgenden kurz mit R.-S. bezeichnet — das Analogon für den allgemeinen Fall, in welchem zwischen Anzahl der Gleichungen und Anzahl der Unbekannten keine vorgeschriebene Beziehung besteht. Auf den ersten Blick könnte eine solche Verallgemeinerung als das Kompliziertere erscheinen, in Wirklichkeit aber, der Theorie nach, — ja sogar der Konstruktion nach, wie in § 1 vorliegender Abhandlung offenbar werden wird — ist das R.-S. das Leichtere, Naheliegendere.

Es seien $f_1, f_2, \ldots, f_l$ l allgemeine Formen (= homogene Polynome) beliebiger Ordnung von n voneinander unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mit unbestimmten Koeffizienten a. Wir bezeichnen dann jedes System von ganzen rationalen Gebilden aus den unbestimmten Koeffizienten der l Formen allein, etwa

$$G_1(a), \ldots, G_t(a)$$

also ein System von Polynomen, die dem durch die Koeffizienten der allgemeinen Formen f_i bestimmten algebraischen „Ring" angehören, als ein R.-S. in Bezug auf diese l Formen, wenn die simultanen Gleichungen

$$G_1(a') = 0, \quad \ldots, \quad G_t(a') = 0,$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellen, daß irgendwelche durch Spezialisierung der Koeffizienten a aus f_i hervorgehende Formen f_i', $i = 1, 2, \ldots, l$ mit Koeffizienten a', eine gemeinsame nicht triviale Nullstelle besitzen. Die Gebilde $G_1(a'), \ldots, G_t(a')$ bezeichnen wir dann als R.-S. der spezialisierten Formen $f_1', \ldots, f_l'$.

Daß solche R.-S^{e} in jedem Fall existieren, ist eine Tatsache, die bei linearen Formensystemen sehr bekannt ist — l lineare Formen in n Variabeln haben dann und nur dann eine gemeinsame Nullstelle, wenn der „Rang" r der Koeffizientenmatrix kleiner als n ist, d. h. wenn ein gewisses System von Determinanten n^{ten} Grades verschwindet — für deren Allgemeingiltigkeit aber, bei nicht linearen Formen, Herr van der Waerden, als erster, wie es scheint, einen Beweis publiziert hat. Von ihm stammt auch der Name R.-S. In v. d. Waerden I[1]) findet sich allerdings blos ein Existenzbeweis, der nicht konstruktiv ist, während in v. d. Waerden II[2]) auch ein Weg angegeben ist, der nach endlich vielen Schritten zur expliziten Darstellung eines R.-S. führen muß.

In § 1 vorliegender Abhandlung geben wir nun einen neuen Existenzbeweis und zugleich eine neue Konstruktion der R.-S^{e}. Die Überlegungen hierzu beruhen im wesentlichen nur auf wiederholter Anwendung bekannter Eigenschaften der Sylvesterschen Determinante, eine Methode, die an Einfachheit wohl nichts zu wünschen übrig läßt. Hierzu verdient bemerkt zu werden, daß der Grundgedanke der Methode — in einem Spezialfall — schon bei Perron a. a. O. sich findet. Beschränkt man sich nämlich auf den Fall, wo die Anzahl der Formen mit der Anzahl der Variabeln übereinstimmt, so ist das von uns in § 1 konstruierte R.-S. in der Tat identisch mit der Gesamtheit der Gebilde A_μ in Perrons Algebra I, § 53.

Die Nützlichkeit der R.-S. überhaupt wird noch offenbarer in § 2. Denn hier dient das R.-S. als Ausgangspunkt eines neuen Existenzbeweises für die Resultanten von n Formen mit n Variabeln. Die Existenz des R.-S. zieht tatsächlich, im Spezialfall $l=n$, die Existenz einer Resultante nach sich. Wir bezeichnen dabei — etwas allgemeiner als üblich — jedes ganze rationale Gebilde $R(a)$, — also nicht nur die irreduziblen —, als eine Resultante in Bezug auf die n Formen $f_1, \ldots, f_n$ in $x_1, \ldots, x_n$, wenn die Gleichung

$$R(a') = 0$$

notwendig und hinreichend dafür ist, daß irgendwelche durch Spezialisierung der Koeffizienten a aus f_i hervorgehende Formen

---

[1]) „Ein algebraisches Kriterium für die Lösbarkeit eines Systems homogener Gleichungen“, Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Amsterdam. Proceedings, Vol. 29, Nr. 1, 1926.

[2]) „Neue Begründung der Eliminations- und Resultantentheorie“ Nieuw Archief voor Wiskunde. Tweede reeks, deel XV, vierde stuk; 1928.

f_i' mit Koeffizienten a' eine nicht triviale gemeinsame Nullstelle besitzen. Wir werden im folgenden diese zur Definition der Resultante benützte Eigenschaft kurz als die „kritische" Eigenschaft bezeichnen. Analog werden wir sagen: Das R.-S. hat die „kritische" Eigenschaft in Bezug auf $f_1, \ldots, f_l$.

Gemäß unserer Definition ist also jede Resultante auch als ein R.-S. anzusehen, nämlich als ein R.-S., das nur aus einem einzigen Polynom besteht.

Das Neue unseres Existenzbeweises beruht nicht allein darin, daß er induktiver Natur ist, sondern vor allem darin, daß er keinen Gebrauch macht von einer Eigenschaft, die seit Mertens (a. a. O.) und Hurwitz (a. a. O.) als Ausgangspunkt jeder strengen Resultantentheorie gedient hat[1]), nämlich die Eigenschaft, daß jede Resultante, multipliziert mit einer genügend hohen Potenz irgend einer der n Variabeln, dem durch die n Formen $f_1, \ldots, f_n$ bestimmten Ideal $(f_1, \ldots, f_n)$ angehört, sodaß also

$$R \cdot x_i^r \equiv 0 \quad (f_1, \ldots, f_n)$$

ist, für $i = 1, 2, \ldots, n$. Dabei ist beachtenswert, daß die Gesamtheit der Polynome $\Phi(a)$, welche die Eigenschaft

$$\Phi(a) \cdot x_i^r \equiv (f_1, \ldots, f_n) \tag{1}$$

besitzen, ebenfalls ein Ideal von Polynomen bildet, und zwar — worauf Herr v. d. Waerden (in der 2. der zitierten Abhandlungen) aufmerksam gemacht hat — sogar ein Primideal. Die Resultanten selbst erweisen sich dann — falls man sich auf die irreduziblen unter ihnen beschränkt — jeweils als Basis des zugehörigen Primideals.

Die in (1) ausgedrückte Eigenschaft der Polynome $\Phi(a)$ wollen wir nach dem Vorgang von Mertens und Hurwitz als „Grundeigenschaft" der Polynome $\Phi(a)$ in Bezug auf $f_1, \ldots, f_n$ bezeichnen.

---

[1]) Bezüglich Perrons Darstellung scheint diese Behauptung auf den ersten Blick nicht zuzutreffen. In der Tat ist jedoch der dort, im Lehrbuch, gegebene Existenzbeweis für das irreduzible Polynom $P(y_1, y_2, \ldots, y_{\varkappa+1})$, Satz 119, im Grunde gleichbedeutend mit einem — allerdings neuartigen — Existenzbeweis für die „Grundeigenschaft" der Resultante; Satz 122.

Im Gegensatz zu dieser Auffassung der Resultante, die von der „Grundeigenschaft" ausgeht, benützen wir die — leicht beweisbare — Existenz des R.-S. (§ 1) und zeigen, daß, im Falle $l = n$, die Polynome desselben a priori einen größten gemeinsamen Teiler besitzen, der die kritische Eigenschaft in Bezug auf $f_1, \ldots, f_n$ besitzt. Damit steht die Existenz einer Resultante fest.

Der § 3 zeigt, daß auch die Polynome unserer R.-S^e in jedem Fall die Grundeigenschaft besitzen in Bezug auf die l Formen, deren R.-S. sie sind, eine Eigenschaft, die übrigens auch die Polynome des v. d. Waerdenschen R.-S. haben. Ein wesentlicher Unterschied gegenüber v. d. Waerdens Theorie besteht aber darin, daß wir an dieser Stelle schon Existenz und kritische Eigenschaft der Resultante kennen und jetzt mit deren Hilfe aus dem Vorhandensein der Grundeigenschaft des R.-S. die Grundeigenschaft der Resultante überraschend leicht erschließen können. Grundeigenschaft und kritische Eigenschaft sind also — sich gegenseitig stützend — in vorliegender Abhandlung gerade in umgekehrter Reihenfolge als bisher üblich bewiesen. Hierbei ergibt sich gleichzeitig die Existenz von irreduziblen Resultanten und die Tatsache, daß überhaupt alle Resultanten, bei festem n, Potenzen ein und desselben irreduziblen Gebildes sind, von einem konstanten Faktor abgesehen.

Zusammenfassend darf man wohl sagen: Der Weg über die R.-S^e zu den Resultanten erscheint nunmehr als der leichteste Zugang zur Theorie der Elimination[1]) im Vergleich zur bisherigen Literatur.

§ 1. Existenz und Konstruktion der Resultantensysteme.

Wir können uns von vornherein darauf beschränken, daß die Formen $f_1 \ldots f_l$, deren R.-S. gebildet werden soll, sämtlich von ein und derselben Ordnung m in $x_1 \ldots x_n$ sind, denn wenn die Ordnungszahlen nicht alle einander gleich, sondern der Reihe nach etwa $m_1, m_2, \ldots, m_l$ sind, so definieren wir $l \cdot n$ Polynome durch

$$h_{i,\varkappa} \equiv x_i^{m - m_\varkappa} \cdot f_\varkappa$$

[1]) Auf die explizite Berechnung der Resultanten und auf Multiplizitätsfragen gedenke ich an anderer Stelle näher einzugehen.

$i = 1, \ldots n$ und $\varkappa = 1, \ldots l$, wobei m gleich (oder größer!) der größten der Zahlen $m_1, \ldots m_l$ ist. Es ist klar, daß, wenn es überhaupt ein R.-S. gibt für die Formen $f_1 \ldots f_l$, dasselbe zugleich die kritische Eigenschaft hat in Bezug auf die $l \cdot n$ Formen $h_{i,\varkappa}$, also ein R.-S. der Formen $h_{i,\varkappa}$ ist; umgekehrt: Wenn es überhaupt ein R.-S. gibt für die $l \cdot n$ Formen $h_{i,\varkappa}$, so stellt dasselbe zugleich auch ein R.-S. der l Formen $f_1 \ldots f_l$ dar; denn jede etwaige gemeinsame Nullstelle von l spezialisierten Formen f_i' ist auch gemeinsame Nullstelle der $l \cdot n$ zugehörigen $h'_{i,\varkappa}$ und umgekehrt. Existenzbeweis und Konstruktion des R.-S. beruhen auf folgendem Induktionsschluß:

Satz I. Falls es zu jedem System von Formen mit n Variabeln (n fest) ein R.-S. gibt, so gibt es auch ein R.-S. zu jedem System von Formen mit $n+1$ Variabeln; und zwar ist letzteres konstruierbar, falls ersteres konstruierbar ist.

Wir dürfen, nach dem oben Gesagten, voraussetzen, daß die Formen in $n+1$ Variabeln alle gleicher Ordnung m sind.

Für $n = 1$, d. h. für l Formen, die nur von ein und derselben Variabeln abhängig sind, ist Existenz und Konstruktion eines R.-S. trivial, denn hier lassen sich sämtliche l Formen darstellen durch

$$f_i \equiv a_i \cdot x^m, \qquad i = 1, \ldots l$$

und die notwendige und hinreichende Bedingung für Existenz einer von 0 verschiedenen gemeinsamen Nullstelle ist $a_1 = a_2 = \ldots = a_l = 0$, also bilden schon die l Koeffizienten $a_1, \ldots a_l$ in ihrer Gesamtheit ein R.-S.

Beweis von Satz (I).

Es seien $f_1 \ldots f_l$ l allgemeine Formen in $n+1$ Variabeln $x_1 \ldots x_{n+1}$, sämtlich gleicher Ordnung m. Aus diesen Formen bilden wir, mit Hilfe von $2\,l$ neuen Unbestimmten $u_1 \ldots u_l$, $v_1 \ldots v_l$

$$(1) \qquad \begin{cases} F \equiv \sum\limits_{\lambda=1}^{l} u_\lambda \cdot f_\lambda \equiv \sum\limits_{\varkappa=0}^{m} U_\varkappa \cdot x_{n+1}^{m-\varkappa} \\ G \equiv \sum\limits_{\lambda=1}^{l} v_\lambda \cdot f_\lambda \equiv \sum\limits_{\varkappa=0}^{m} V_\varkappa \cdot x_{n+1}^{m-\varkappa} \end{cases}$$

Hierdurch sind also F und G nach Potenzen von x_{n+1} geordnet. $U_\varkappa$ und $V_\varkappa$ sind Polynome von nur n Variabeln $x_1 \ldots x_n$, und zwar jeweils von derjenigen Ordnung, die der Index $\varkappa$ angibt. Überdies gehen $U_\varkappa$ und $V_\varkappa$ auseinander hervor durch Vertauschung der u_i mit v_i, $i = 1 \ldots l$.

Nun benützen wir die Sylvestersche Determinante

$$S \equiv S\begin{pmatrix} A_0, & A_1, & \ldots & A_m \\ B_0, & B_1, & \ldots & B_m \end{pmatrix}$$

Dieselbe läßt sich kurz so charakterisieren: Sie ist eine $2m$ reihige Determinante. Als Elemente treten außer 0 nur $2m+2$ Unbestimmte auf, nämlich A_i und B_i, $i = 0, 1, \ldots m$. Bedeutet r eine der Zahlen $1, 2, \ldots m$, so ist die r-te Zeile von S definiert durch

$$\underbrace{0, 0, \ldots 0}_{r-1}, \quad A_0, A_1, \ldots, A_m, \quad \underbrace{0, 0, \ldots 0}_{m-r}$$

Die $(m+r)^{\text{te}}$ Zeile geht aus der r^{ten} hervor durch Vertauschung der A_i mit B_i, $i = 0, 1, \ldots m$.

Wir bilden nun speziell die Determinante

$$(2) \qquad S\begin{pmatrix} U_0, & U_1, & \ldots & U_m \\ V_0, & V_1, & \ldots & V_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{s} g_i(x_1 \ldots x_n) \cdot P_i(u, v),$$

wo die $P_i(u, v)$ die sämtlichen verschiedenen Potenzprodukte von der Art

$$u_1^{\alpha_1} \cdots u_l^{\alpha_l} \cdot v_1^{\beta_1} \cdots v_l^{\beta_l}$$
$$\sum \alpha = \sum \beta = m$$

bedeuten. Die $g_i(x_1 \ldots x_n)$ sind homogene Polynome in nur n Variabeln $x_1 \ldots x_n$ und sind, falls sie nicht identisch verschwinden, von der Ordnung m^2. [1])

---

[1]) Die sämtlichen Potenzprodukte $U_0^{r_0} \cdots U_m^{r_m} \cdot V_0^{s_0} \cdots V_m^{s_m}$ der entwickelten Determinante S haben bekanntlich ein und dasselbe Gewicht $m \cdot m$, d. h. es ist

$$\sum_{i=0}^{m} i \cdot (r_i + s_i) = m \cdot m$$

Da im vorliegenden Fall die Ordnung der $U_\varkappa$ und $V_\varkappa$, als Polynome in den x_i, mit dem Gewicht übereinstimmt, nämlich mit dem Index $\varkappa$, so ist m^2

Es können aber, wenigstens bei $l \geqq n$, sicher nicht alle g_i zugleich identisch verschwinden, wie folgender Satz (II) zeigt:

Durch irgendeine, aber festgewählte Spezialisierung ihrer Koeffizienten mögen die allgemeinen Formen f_i in f_i' übergehen. Gleichzeitig mögen die aus den f_i abgeleiteten Gebilde F, G, $U_\varkappa$, $V_\varkappa$, g_i in F', G', $U_\varkappa'$, $V_\varkappa'$, g_i' übergehen. Wir behaupten:

Satz II. Die Formen $f_1', \ldots f_l'$ in $n+1$ Variabeln haben dann und nur dann eine nicht triviale gemeinsame Nullstelle, wenn die s Formen $g_1', g_2', \ldots g_s'$ in nur n Variabeln eine nicht triviale gemeinsame Nullstelle haben.

Der Satz (I) wird also bewiesen sein, sobald (II) bewiesen ist; denn Satz (II) sagt doch aus, daß ein R.-S. für die durch (2) definierten speziellen Formen (speziell insofern, als ihre Koeffizienten ganze rationale Funktionen der Koeffizienten der f_i sind) $g_1, \ldots, g_s$ zugleich ein R.-S. ist für die Ausgangsformen f_i in $n+1$ Variabeln. Die g_i sind aber Formen mit nur n Variabeln $x_1 \ldots x_n$; ihr R.-S. ist also nach der Voraussetzung des Satzes (I) schon bekannt und konstruierbar.

Es bleibt also nur (II) zu beweisen. Wir trennen die Behauptung (II) in 2 Teile:

(IIa) Wenn die f_i' eine gemeinsame Nullstelle besitzen, so besitzen auch die g_i' eine gemeinsame Nullstelle.

(IIb) Wenn die g_i' eine gemeinsame Nullstelle besitzen, so besitzen auch die f_i' eine gemeinsame Nullstelle.

Zum Beweise machen wir Gebrauch von zwei sehr bekannten Eigenschaften der Sylvesterschen Determinante, die wir hier als Hilfssätze formulieren:

Wenn 2 Polynome $P(z)$ und $Q(z)$ in einer Veränderlichen z

$$P(z) \equiv A_0' z^m + A_1' z^{m+1} + \cdots + A_m' \cdot z^0$$
$$Q(z) \equiv B_0' z^m + B_1' z^{m-1} + \cdots + B_m' \, z^0$$

---

zugleich die Ordnung der g_i als Polynome in den x_i, falls sie nicht identisch verschwinden.

Die Anzahl s dieser Polynome g_i, unter denen auch identisch verschwindende vorkommen können, ist für das Folgende unwesentlich; sie ist gleich der Anzahl der verschiedenen möglichen Potenzprodukte $P_i(u, v)$ von der oben angegebenen Art, es ist demnach

$$s = \binom{m+l-1}{l-1} \cdot \binom{m+l-1}{l-1}.$$

mit irgendwelchen festgewählten Koeffizienten gegeben sind, so gilt:

Hilfssatz (a): Eine notwendige Folge der Existenz eines gemeinsamen Teilers von $P(z)$ und $Q(z)$ von mindestens 1. Grade in z ist die Gleichung

$$S\begin{pmatrix} A'_0, \ldots A'_m \\ B'_0, \ldots B'_m \end{pmatrix} = 0.$$

Hilfssatz (b): Falls A'_0 und B'_0 nicht beide verschwinden, so ist die Erfüllung der Gleichung

$$S\begin{pmatrix} A'_0, \ldots A'_m \\ B'_0, \ldots B'_m \end{pmatrix} = 0.$$

hinreichend für die Existenz eines gemeinsamen Teilers von $P(z)$ und $Q(z)$, der mindestens 1. Grades in z ist.

Beim Beweise der Sätze ($\mathrm{II^a}$) und ($\mathrm{II^b}$) unterscheiden wir jeweils 2 Fälle, je nachdem nämlich die Koeffizienten von x_{n+1}^m in $f'_1, f'_2, \ldots, f'_l$, die wir der Reihe nach mit $a'_{1,n+1}, a'_{2,n+1}, \ldots a'_{l,n+1}$ bezeichnen, alle oder nicht alle verschwinden.

ad $\mathrm{II^a}$:

1. Fall $\qquad a'_{1,n+1} = a'_{2,n+1} = \cdots = a'_{l,n+1} = 0$

dann ist sowohl

$$U'_0 \equiv \sum_{\lambda=1}^{l} u_\lambda a'_{\lambda,n+1} = 0, \quad \text{als auch} \quad V'_0 \equiv \sum_{\lambda=1}^{l} v_\lambda a'_{\lambda,n+1} = 0.$$

Mit U'_0 und V'_0 verschwindet aber auch die ganze Determinante $S\begin{pmatrix} U'_0 \ldots \\ V'_0 \ldots \end{pmatrix}$ identisch in u_i, v_i, weil die Elemente ihrer ersten Vertikalreihe sämtlich verschwinden, d. h. auch es ist:

$$\sum P_i(u, v) \cdot g'_i(x, \ldots x_n) = 0 \text{ identisch in den } u_i, v_i;$$

daraus folgt aber, daß sämtliche $g'_i(x_1 \ldots x_n)$ verschwindende Polynome sind. Für solche triviale Polynome g'_i ist aber auch die Behauptung ($\mathrm{II^a}$) trivial.

2. Fall. Wenigstens einer der Koeffizienten $a'_{1,n+1} \ldots, a'_{l,n+1}$ ist von 0 verschieden. Sei etwa $a'_{\varkappa,n+1} \neq 0$; $\varkappa$ fest.

Die gemeinsame Nullstelle der Voraussetzung von ($\mathrm{II^a}$) sei $(\zeta_1 \ldots \zeta_{n+1})$; dieselbe ist, wegen $a'_{\varkappa,n+1} \neq 0$, jedenfalls verschieden von $(0, 0, \ldots 0, \underline{1})$. Also ist $(\zeta_1 \ldots \zeta_n) \neq (0, 0, \ldots 0)$.

Wir definieren 2 Polynome in x_{n+1} durch:

$$
(3) \quad \left| \begin{array}{l} F'' \equiv \sum u_\lambda f'_\lambda(\zeta_1 \ldots \zeta_n, x_{n+1}) = \sum_{\varkappa=0}^{m} U''_\varkappa \cdot x_{n+1}^{m-\varkappa} \\ \\ G'' \equiv \sum v_\lambda f'_\lambda(\zeta_1 \ldots \zeta_n, x_{n+1}) = \sum_{\varkappa=0}^{m} V''_\varkappa \cdot x_{n+1}^{m-\varkappa} \end{array} \right.
$$

Nach Voraussetzung besitzen sämtliche $f'_i(\zeta_1 \ldots \zeta_n, x_{n+1})$, und daher auch die Polynome F'' und G'' einen gemeinsamen Teiler $x_{n+1} - \zeta_{n+1}$, und zwar bei beliebigen u_i, v_i. Daher verschwindet nach Hilfssatz (a) notwendig die Determinante

$$
S\begin{pmatrix} U''_0, \ldots U''_m \\ V''_0, \ldots V''_m \end{pmatrix}, \text{ d. h. auch die Gleichung}
$$

$$
(4) \qquad \sum P_i(u, v) \cdot g'_i(\zeta_1 \ldots \zeta_n) = 0
$$

ist erfüllt für beliebige u_i, v_i; also sind sämtliche

$$
g'_i(\zeta_1 \ldots \zeta_n) = 0, \quad i = 1, 2 \ldots s.
$$

Die Formen $g'_i(x_1 \ldots x_n)$ haben also eine nicht triviale gemeinsame Nullstelle. Damit ist Satz (II[a]) bewiesen.

ad II[b]:

1. Fall $\qquad a'_{1,n+1} = a'_{2,n+1} = \cdots = a'_{l,n+1} = 0$.

Hier besitzen die f'_i jedenfalls eine gemeinsame Nullstelle, nämlich diese $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$; $x_{n+1} = 1$.

2. Fall. Wenigstens einer der Koeffizienten $a'_{1,n+1}, \ldots a'_{l,n+1}$ ist von 0 verschieden, sei etwa $a'_{\varkappa,n+1} \neq 0$; $\varkappa$ fest. Sei ferner $(\zeta_1 \ldots \zeta_n)$ eine nicht triviale Nullstelle, welche die Polynome g'_i nach der Voraussetzung von (II[b]) gemeinsam haben.

Aus der die Polynome g_i definierenden Relation (2) erhalten wir, unter Beibehaltung der Bezeichnungsweise von (3):

$$
S\begin{pmatrix} U''_0 \ldots U''_m \\ V''_0 \ldots V''_m \end{pmatrix} \equiv \sum_{i=1}^{s} P_i(u, v) \cdot g'_i(\zeta_1 \ldots \zeta_n) = 0 \text{ für beliebige } u_i, v_i.
$$

Nach dem Hilfssatz (b) besitzen die beiden Polynome F'' und G'' einen gemeinsamen Teiler von mindestens 1. Grade ins x_{n+1}, und zwar für beliebige u_i, v_i, falls nur wenigstens eine der Größen U''_0 und V''_0 von 0 verschieden ist. Letztere ist sicher der Fall in dem Spezialfall $v_\varkappa = 1$, wo der Index $\varkappa$ der oben durch $a'_{\varkappa, n+1} \neq 0$ definierte ist, die übrigen $v_i = 0$ sind, $i \neq \varkappa$, sodaß

$$V_0'' = a'_{\varkappa, n+1} \text{ und } F'' = f'_\varkappa(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, x_{n+1})$$

wird. Also hat $f'_\varkappa(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, x_{n+1})$ mit $\sum\limits_\lambda u_\lambda f'_\lambda(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, x_{n+1})$ einen gemeinsamen Teiler $\delta(x_{n+1})$ für beliebige u, und dieser ist infolgedessen auch ein gemeinsamer Teiler aller $f'_\lambda(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, x_{n+1})$[1]. Die letzteren Polynome in x_{n+1} besitzen also mindestens einen gemeinsamen Teiler $x_{n+1} - \zeta_{n+1}$, d. h. die Formen $f'_1, \ldots f'_l$ besitzen eine gemeinsame nicht triviale Nullstelle, nämlich $(\zeta_1 \ldots \zeta_{n+1})$.

Damit ist der Beweis des Satzes (II) beendigt und hiermit auch der des Satzes (I).

Da wir aber für $n = 1$ schon ein R.-S. angegeben haben, so sind Existenz und Konstruktion des R.-S. auch im allgemeinsten Fall bekannt.

Die nach der eben beschriebenen Konstruktion entstehenden Polynome des R.-S. sind freilich recht hohen Grades. Wir wollen den Grad noch näher bestimmen:

Satz: Die Polynome des eben konstruierten R.-S. von l allgemeinen Formen in n Variabeln, gleicher Ordnung m, haben alle ein und dieselbe Gesamtdimension in den Koeffizienten der l Formen, und zwar ist die **Gesamtdimension**

$$\underline{d = 2^{n-1} \cdot m^{2^{n-1}-1}}$$

Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig; denn in diesem Fall wird $d = 1$, wie es sein muß, nachdem wir oben das R.-S. für l Formen in einer Variabeln definiert haben.

Wir schließen von n auf $n + 1$.

Nach Satz (II) wissen wir: l Formen gleicher Ordnung m in $n + 1$ Variabeln haben dann und nur dann eine gemeinsame Nullstelle, wenn gewisse andere von jenen l Formen abhängige s Formen mit nur n Variabeln, die ebenfalls unter sich gleicher Ordnung $\bar{m} = m^2$ sind, eine gemeinsame Nullstelle haben.

[1] Exakter Beweis bei Perron a. a. O. Seite 286.

Die Polynome des R.-S. bei nur n Variabeln sind nach Voraussetzung schon sämtlich vom Grade

$$2^{n-1}\cdot \overline{m}^{2^{n-1}-1} = 2^{n-1}\cdot m^{2^{n}-2}.$$

Da die Koeffizienten der g_i ihrerseits ganze rationale homogene Funktionen der f_i sind, und zwar, wie aus der $2\,m$-reihigen Sylvesterschen Determinante hervorgeht, durchweg vom Grade $2\,m$, so ist die Gesamtdimension jener Polynome, als Funktion der Koeffizienten der f_i betrachtet, $2\,m$ mal so groß, also

$$d = 2\,m\cdot 2^{n-1}\cdot m^{2^{n}-2} = 2^{n}\cdot m^{2^{n}-1}$$

q. e. d.

§ 2. Existenz der Resultanten als Folge der Existenz von Resultantensystemen.

Das Ziel dieses § 2 sind folgende beiden a priori Aussagen über Resultantensysteme überhaupt:

Satz III. Der größte gemeinsame Teiler T sämtlicher Polynome eines jeden zu n allgemeinen Formen in n Variabeln gehörigen R.-S. besitzt die kritische Eigenschaft in Bezug auf diese n Formen[1]).

Satz IV. Ersetzt man die sämtlichen Koeffizienten irgend einer der n Formen durch Null, so nimmt auch das Polynom T den Wert Null an.

Durch Satz III wird also die Existenz aller Resultanten bewiesen, die wir in der Einleitung bloß axiomatisch durch die „kritische“ Eigenschaft definiert haben.

Die Sätze III und IV lassen sich noch verschärfen, falls man von einem R.-S. ausgeht, dessen sämtliche Polynome homogen sind in den Koeffizienten jeder einzelnen der n Formen. In der Tat sind nun gerade die Polynome jedes nach der Methode von § 1 konstruierten R.-S. von l Formen in n Variabeln homogen in den Koeffizienten[2]) jeder einzelnen der l Formen, falls

---

[1]) Polynom T ist also selbst ein R.-S. für eben diese n Formen.

[2]) Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial. Wir schließen von n auf $n+1$, setzen demnach voraus, daß die Polynome des nach § 1 konstruierten R.-S. von l Formen in n Variabeln schon homogen in den Koeffizienten jeder einzelnen der l Formen sind in dem Sinne, daß auch Dimension 0 zulässig ist. Nach den Definitionen des § 1 ist aber das R.-S. von l Formen

man auch 0 als Dimensionszahl zuläßt. Insbesondere ist dann aber auch jeder Teiler eines einzelnen Polynoms des R.-S. homogen in demselben Sinn. Dasselbe gilt von dem größten gemeinsamen Teiler, der — im Falle $l = n$ — nach Satz III die kritische Eigenschaft besitzt und daher eine Resultante darstellt.

Es gibt also für jede Zahl n eine Resultante, die homogen in den Koeffizienten jeder einzelnen der n Formen, und zwar jeweils von einer Dimension, die — infolge des Satzes IV — größer als Null ist.

Wir bezeichnen mit T_0 den größten gemeinsamen Teiler der Polynome des zu n allgemeinen linearen Formen $L_1, L_2, \ldots, L_n$ gehörigen R.-S., und bezeichnen mit $T_\varkappa$, für $\varkappa = 1, 2, \ldots n$, den größten gemeinsamen Teiler der Polynome der zu $\varkappa$ allgemeinen Formen beliebiger Ordnung $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ und zu $n - \varkappa$ allgemeinen linearen Formen $L_{\varkappa+1}, L_{\varkappa+2}, \ldots, L_n$ gehörigen R.-S.

Die Sätze III und IV werden bewiesen sein, wenn wir sie successive — durch vollständige Induktion — an $T_0, T_1, \ldots, T_n$ verifizieren.

1. Schritt.

Behauptung 1a: T_0 besitzt die kritische Eigenschaft in Bezug auf $L_1, \ldots, L_n$.

---

mit $n+1$ Variabeln erklärt als das R.-S. gewisser anderer s Formen $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ in n Variabeln, letztere definiert durch

$$S\begin{pmatrix} U_0, \ldots, U_m \\ V_0, \ldots, V_m \end{pmatrix} = \sum_i g_i(x_1, \ldots, x_n) \cdot P_i(u, v)$$

Unsere Behauptung wird also für $n+1$ bewiesen sein, wenn wir zeigen können: Die Formen $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ sind, als Polynome in den Koeffizienten der f_i betrachtet, selbst homogen in den Koeffizienten jeder einzelnen der Formen f_i. In der Tat:

Jedes einzelne Potenzprodukt der entwickelten Determinante S läßt sich so darstellen:

$$U_0^{\alpha_0} \cdots U_m^{\alpha_m} \cdot V_0^{\beta_0} \cdots V_m^{\beta_m} = \sum_r T_r \cdot u_1^{\gamma_{r1}} \cdots u_n^{\gamma_{rn}} \cdot v_1^{\delta_{r1}} \cdots v_n^{\delta_{rn}}$$
$$\sum \gamma = \sum \delta = m,$$

wobei T_r homogen in den Koeffizienten von f_1, und zwar von der Dimension $\gamma_{r_1} + \delta_{r_1}$, ferner homogen in den Koeffizienten von f_2, und zwar von der Dimension $\gamma_{r_2} + \delta_{r_2}$, usw.

Behauptung 1b: Ersetzt man die unbestimmten Koeffizienten irgend einer der n linearen Formen durch Null, so nimmt auch T_0 den Wert 0 an.

Denn die Determinante $\Delta(a)$ der Koeffizienten a der n linearen Formen hat bekanntlich die kritische Eigenschaft in Bezug auf diese n Formen und ist außerdem ein irreduzibles Gebilde ihrer n^2 Elemente. Wegen der kritischen Eigenschaft des zugehörigen R.-S. verschwinden die Polynome des letzteren jedesmal, wenn $\Delta(a)$ verschwindet, also müssen[1]) sämtliche Polynome des R.-S. durch $\Delta(a)$ teilbar sein. Also ist auch ihr größter gemeinsamer Teiler T_0 durch $\Delta(a)$ teilbar. Daraus ergibt sich die Behauptung 1a. Da außerdem die Determinante $\Delta(a)$ bekanntlich homogen vom Grad 1 ist in den Koeffizienten jeder einzelnen der n Formen, so ist auch Behauptung 1b bewiesen.

2. Schritt.

Es sei schon bewiesen, daß

a) der größte gemeinsame Teiler $T_{\varkappa-1}$ des zu $\varkappa - 1$ allgemeinen Formen beliebiger Ordnung $f_1, \ldots, f_{\varkappa-1}$ und zu $n - \varkappa + 1$ allgemeinen linearen Formen $L_\varkappa, \ldots, L_n$ gehörigen R.-S. die kritische Eigenschaft besitzt in Bezug auf diese n Formen.

Es sei ferner bewiesen, daß

b) $T_{\varkappa-1}$ den Wert 0 annimmt, falls sämtliche Koeffizienten von irgend einer der n beteiligten Formen durch 0 ersetzt werden.

Wir schließen nun von $T_{\varkappa-1}$ auf die analogen Eigenschaften von $T_\varkappa$, nämlich

Behauptung 2a: $T_\varkappa$ besitzt die kritische Eigenschaft.

Behauptung 2b:

Ersetzt man die unbestimmten Koeffizienten irgend einer der n Formen $f_1, \ldots, f_\varkappa, L_{\varkappa+1}, \ldots, L_n$ durch 0, so nimmt auch $T_\varkappa$ den Wert 0 an.

Zunächst ein Hilfssatz, der sich aus den Voraussetzungen a) und b) ergibt.

Es seien $f'_1, \ldots, f'_{\varkappa-1}, L'_{\varkappa+1}, \ldots L'_n$ irgendwelche, aber festgewählte Spezialisierungen von $f_1, \ldots, f_{\varkappa-1}, L_{\varkappa+1}, \ldots L_n$. Die

[1]) Nach einem bekannten Satz: Wenn eine Form $A(z_1, \ldots, z_t)$ verschwindet in den sämtlichen Nullstellen einer Form $J(z_1, \ldots, z_t)$, wo J ein irreduzibles Gebilde ist, so ist A algebraisch teilbar durch J.

genannten $n-1$ spezialisierten Formen haben stets wenigstens eine gemeinsame nicht triviale Nullstelle.

Denn: Die Koeffizienten der genannten $n-1$ Formen und einer noch hinzuzufügenden Form $L'_\varkappa$ seien mit a' bezeichnet. Dadurch geht $T_{\varkappa-1}(a)$ in $T_{\varkappa-1}(a')$ über. Nach Voraussetzung b) wird nun $T_{\varkappa-1}(a') = 0$ sein, sobald die Koeffizienten von $L'_\varkappa$ einzeln durch 0 ersetzt werden. Dann verschwinden aber sämtliche Polynome des R.-S. Also existiert eine gemeinsame Nullstelle der genannten n Formen, worunter ja jene $n-1$ Formen des Hilssatzes sich befinden.

Beweis der Behauptung 2a:

Das R.-S. in Bezug auf $\varkappa$ allgemeine Formen beliebiger Ordnung $f_1, \ldots, f_\varkappa$ und $n-\varkappa$ lineare Formen sei dargestellt durch

$$G_1(a), \ldots, G_t(a).$$

Die Form $f_\varkappa$ von der Ordnung $m_\varkappa$ enthält die Glieder

$$a_1^{(\varkappa)} \cdot x_1^{m_\varkappa}; \quad a_2^{(\varkappa)} \cdot x_2^{m_\varkappa}; \quad \ldots; \quad a_n^{(\varkappa)} \cdot x_n^{m_\varkappa}.$$

Ich betrachte nun die Polynome $G_s(a)$, $s = 1, 2, \ldots t$ speziell als Funktionen der n unbestimmten Koeffizienten

$$a_1^{(\varkappa)}, a_2^{(\varkappa)}, \ldots, a_n^{(\varkappa)}$$

und schreibe

$$G_s(a) \equiv G_s(a_1^{(\varkappa)}, a_2^{(\varkappa)}, \ldots, a_n^{(\varkappa)}).$$

Die übrigen Koeffizienten lassen wir unbezeichnet. Aus den t Polynomen G_s bilden wir die t Polynome in z_1:

$$\underline{H_{s,1} \equiv G_s(z_1, a_2^{(\varkappa)}, a_3^{(\varkappa)}, \ldots, a_n^{(\varkappa)})}$$

$s = 1, \ldots, t$.

Analog bilde man t Polynome in z_2:

$$\underline{H_{s,2} \equiv G_s(a_1^{(\varkappa)}, z_2, a_3^{(\varkappa)}, \ldots, a_n^{(\varkappa)}); \quad s = 1, 2 \ldots t}$$

u. s. f., schließlich

$$\underline{H_{s,n} \equiv G_s(a_1^{(\varkappa)}, a_2^{(\varkappa)} \ldots . a_{n-1}^{(\varkappa)}, z_n); \quad s = 1, 2 \ldots t}$$

Aus diesen $n \cdot t$ Polynomen bilden wir weiter folgende t Polynome $K_1, K_2, \ldots K_t$, wobei allgemein bedeutet:

$$\underline{K_s \equiv H_{s,1} \cdot H_{s,2} \cdots H_{s,n}}$$

und behaupten:

Satz V. Die t Polynome $K_1, \ldots, K_t$ haben, als Polynome in den z_i betrachtet, **stets einen gemeinsamen Teiler** von mindestens 1. Grade in den z_i, wie auch die Koeffizienten der n Formen spezialisiert sein mögen.

Zum Beweise von V gehen wir aus von den $n-1$ spezialisierten Formen des obigen Hilfssatzes. Dieselben haben, nach eben diesem Hilfssatz, immer wenigstens eine gemeinsame Nullstelle

$$(\zeta_1, \ldots \zeta_n) \neq (0, 0, \ldots 0).$$

Zu den $n-1$ Formen fügen wir eine n^{te} spezialisierte Form $f'_\varkappa$ hinzu, über deren Koeffizienten wir folgendermaßen verfügen:

1. Fall: $\underline{\zeta_1 \neq 0.}$

Die Koeffizienten von $f'_\varkappa$ seien irgendwie, aber festgewählt, bis auf den einzigen Koeffizienten von $x_1^{m_\varkappa}$, nämlich $a_1^{(\varkappa)}$.

Wir ersetzen die Unbestimmte $a_1^{(\varkappa)}$ durch den eindeutig bestimmten Wert $a_1^{(\varkappa)'}$, für welchen

$$f'_\varkappa(\zeta_1, \ldots \zeta_n) = 0$$

wird. Dann ist also $(\zeta_1, \ldots \zeta_n)$ eine gemeinsame Nullstelle sämtlicher n Formen $f'_1 \ldots f'_\varkappa, L'_{\varkappa+1}, \ldots L'_n$, sodaß

$$G_s(a') = 0$$

sein muß für $s = 1, 2 \ldots t$, d. h. auch die t Polynome in z_1:

$$H_{1,1}, H_{2,1}, \ldots, H_{t,1}$$

haben den gemeinsamen Teiler $\underline{z_1 - a_1^{(\varkappa)'}}$.

2. Fall: $\zeta_1 = 0$, aber $\underline{\zeta_2 \neq 0.}$

Die Koeffizienten von $f'_\varkappa$ seien wieder irgendwie, aber fest gewählt, bis auf den Koeffizienten von $x_2^{m_\varkappa}$, nämlich $a_2^{(\varkappa)}$. Wir ersetzen die Unbestimmte durch den eindeutig bestimmten Wert, für welchen die Gleichung

$$f'_\varkappa(\zeta_1, \ldots \zeta_n) = 0$$

erfüllt ist. Dann werden wieder sämtliche $G_s(a')$ verschwinden, d. h. auch die t Polynome in z_2:

$$H_{1,2}, H_{2,2}, \ldots H_{t,2}$$

haben einen gemeinsamen Teiler, nämlich $z_2 - a_2^{(\varkappa)'}$.

Der n^{te} **Fall** tritt ein, wenn

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \cdots \zeta_{n-1} = 0, \quad \text{aber } \underline{\zeta_n \neq 0}.$$

Die Koeffizienten von $f'_\varkappa$ seien wieder irgendwie, aber fest gewählt, bis auf den einzigen Koeffizienten von $x_n^{m_\varkappa}$; denselben denke man sich ersetzt durch den eindeutig bestimmten Wert $a_n^{(\varkappa)'}$, welcher der Bedingung

$$f'_\varkappa(\zeta_1, \ldots \zeta_n) = 0$$

genügt. Dann werden sämtliche $G_s(a')$ verschwinden, d. h. auch: die t Polynome in z_n:

$$H_{1,n}, \; H_{2,n}, \ldots, H_{t,n}$$

haben einen gemeinsamen Teiler, nämlich $z_n - a_n^{(\varkappa)'}$.

Damit ist Satz V bewiesen, da ja immer einer der n genannten Fälle eintritt.

Geht man zur ursprünglichen Bezeichnung über, d. h. ersetzt man die z_i wieder durch $a_i^{(\varkappa)}$, $i = 1, 2 \ldots n$, so werden die Polynome $H_{s,1}, H_{s,2}, \ldots H_{s,n}$ sämtlich identisch mit G_s; daher wird K_s zur n^{ten} Potenz von G_s, $s = 1, 2, \ldots t$.

Der Satz V sagt also aus: Die Polynome

$$G_1(a), \ldots, G_t(a)$$

haben immer einen gemeinsamen Teiler, der von mindestens 1. Grade in wenigstens einer der Unbestimmten $a_1^{(\varkappa)}, a_2^{(\varkappa)}, \ldots a_n^{(\varkappa)}$, und der, seiner Definition nach, jedesmal verschwindet, wenn die Koeffizienten a' so gewählt werden, daß die zugehörigen Formen $f'_1, \ldots, f'_\varkappa; L'_{\varkappa+1}, \ldots, L'_n$ eine gemeinsame Nullstelle haben, und der außerdem auch n u r d a n n verschwindet, weil die Polynome des R.-S. nur dann verschwinden.

Damit ist 2a bewiesen, daß nämlich $T_\varkappa$ die kritische Eigenschaft besitzt.

Beweis von 2b:

Angenommen das Polynom $T_\varkappa$ würde, entgegen der Behauptung 2b, bei der in 2b angegebenen Substitution nicht verschwinden, so müßte $T_\varkappa$ wenigstens ein Glied besitzen, das vollständig unabhängig von wenigstens einer der n Formen ist; d. h. $T_\varkappa$ hätte wenigstens ein Glied, welches keinen der Koeffizienten von einer bestimmten der n Formen zum Faktor hat. Dann hätte auch das durch die Spezialisierung

$$f_\varkappa \equiv L_\varkappa^{m_\varkappa}$$

hervorgehende $T_\varkappa$ wenigstens ein Glied, welches keinen der Koeffizienten von einer bestimmten der n Formen

$$f_1, \ldots f_{\varkappa-1}, L_\varkappa, \ldots L_n$$

als Faktor hat.

Nun besitzen aber $T_\varkappa$ und $T_{\varkappa-1}$ die kritische Eigenschaft ($T_{\varkappa-1}$ nach Voraussetzung, $T_\varkappa$ nach 2a), also muß das spezialisierte $T_\varkappa$ teilbar sein (nach dem schon oben Seite 192 Fußnote zitierten Hilfssatz) durch jeden irreduziblen Teiler von $T_{\varkappa-1}$. Es ist aber $T_{\varkappa-1}$, nach Voraussetzung, in jedem seiner Glieder mit je wenigstens einem Koeffizienten von jeder der n Formen f_1, $\ldots$, $f_{\varkappa-1}$, $L_\varkappa$, $\ldots$, L_n als Faktor behaftet. Die erwähnte Teilbarkeit ist daher unmöglich. Unsere Annahme, daß die Behauptung 2b falsch ist, führt also auf einen Widerspruch.

Als **Zusatz** folgt aus den Sätzen III und IV sofort:

Irgendwelche, aber festgewählte, $n-1$ spezielle Formen f_1', $\ldots$, f_{n-1}' beliebiger Ordnung in n Variabeln haben immer wenigstens eine gemeinsame nicht triviale Nullstelle.[1])

§ 3. Grundeigenschaft der Resultantensysteme und Resultanten-Irreduzibilität.

F. Mertens hat seine Theorie der Resultanten (a. a. O.) auf einer Eigenschaft derselben aufgebaut, von der wir bis jetzt noch keinen Gebrauch gemacht haben.

Wenn $f_1 \ldots f_n$ n allgemeine Formen der n Veränderlichen $x_1, \ldots x_n$ sind, so soll von einer ganzen rationalen Funktion Θ der Koeffizienten dieser Formen, welche die Veränderlichen $x_1, \ldots x_n$ nicht enthält, gesagt werden, nach dem Vorgang von Mertens und Hurwitz (a. a. O.), daß sie die Grundeigenschaft in Bezug auf die Formen $f_1, \ldots, f_n$ besitzt, wenn ihr Produkt in eine Potenz einer jeden der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ sich in die Gestalt bringen läßt:

[1]) Hieraus folgt u. A., daß ein für $n-1$ allgemeine Formen mit n Variabeln gebildetes R.-S. trivial werden muß, nämlich nur aus Nullen besteht.

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n,$$

wo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ebenfalls homogene Polynome in $x_1, \ldots, x_n$ sind, deren Koeffizienten Polynome der Koeffizienten der Formen sind. Wir meinen denselben Sachverhalt, wenn wir schreiben:

$$\Theta \cdot x_i^\nu \equiv 0\,(f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Zu den Polynomen Θ gehören nun bekanntlich die Resultanten. Wir werden zeigen, wie diese sog. Grundeigenschaft der Resultanten aus der analogen Eigenschaft der zugehörigen R.-S^e — die beim R.-S. viel unmittelbarer beweisbar ist als bei Resultanten — bewiesen werden kann, nachdem man — darin unterscheidet sich unsere Theorie wesentlich von der bisherigen — Existenz und kritische Eigenschaft der Resultante an dieser Stelle schon kennt.

Satz VI: Die Polynome der in § 1 konstruierten R.-S^e besitzen die Grundeigenschaft in Bezug auf die l Formen, deren R.-S. sie sind.

Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial; denn hier ist

$$f_i \equiv a_i x^m, \quad i = 1, 2, \ldots l$$

und die a_i selbst stellen, für $i = 1, \ldots, l$, schon ein R.-S. dar. Die Grundeigenschaft dieses einfachsten R.-S. ist aber schon in eben dieser Gleichung $a_i x^m = f_i$ ausgedrückt.

Wir schließen von n auf $n+1$, indem wir folgendes beweisen:

Satz VII. Wenn die Polynome des R.-S. jeder beliebigen Anzahl von Formen in n Variabeln schon die Grundeigenschaft haben in Bezug auf eben diese Formen, so besitzen auch die Polynome des R.-S. jeder beliebigen Anzahl von Formen mit $n+1$ Variabeln die Grundeigenschaft in Bezug auf eben diese Formen in $n+1$ Variabeln.

Beim Beweis machen wir Gebrauch von einer bekannten Eigenschaft der in § 1 erklärten Sylvesterschen Determinante

$$S \equiv S\begin{pmatrix} A_0, \ldots, A_m \\ B_0, \ldots, B_m \end{pmatrix};$$

dieselbe ist ausgedrückt in der Kongruenz

$$S \equiv 0\,(P(z),\ Q(z)).$$

Insbesondere gilt demnach, infolge unserer Definitionen (1) und (2) in § 1:

$$S\begin{pmatrix} U_0, \ldots, U_m \\ V_0, \ldots, V_m \end{pmatrix} \equiv 0\,(F, G);$$

und wegen

$$F \equiv 0\,(f_1, \ldots, f_l)$$
$$G \equiv 0\,(f_1, \ldots, f_\lambda)$$

folgt

$$S\begin{pmatrix} U_0, \ldots, U_m \\ V_0, \ldots, V_m \end{pmatrix} \equiv 0\,(f_1, \ldots, f_l)$$

d. h. auch

$$\sum g_i\,(x_1, \ldots, x_n) \cdot P_i\,(u, v) \equiv 0\,(f_1, \ldots, f_l)$$

und zwar für beliebige u; v; das ist nur möglich, wenn

$$\text{(1)} \qquad \frac{g_i\,(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0\,(f_1, \ldots f_l)}{i = 1, 2, \ldots, s}$$

In der Voraussetzung des Satzes VII ist aber gesagt, daß das R.-S. der Formen g_i mit nur n Variabeln, etwa $G_1, \ldots, G_t$ schon die Grundeigenschaft besitzt in Bezug auf eben diese Formen g_i, daß also gilt:

$$\text{(2)} \qquad \frac{G_\sigma \cdot x_i^\nu \equiv 0\,(g_1, \ldots, g_s)}{i = 1, 2, \ldots, n; \quad \sigma = 1, 2, \ldots, t}$$

Die Verbindung von (1) und (2) ergibt also

$$\text{(3)} \qquad G_\sigma\, x_i^\nu \equiv 0\,(f_1, \ldots, f_l) \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Die Polynome $G_1, \ldots, G_t$ sind aber, nach unserer Definition in § 1, zugleich das R.-S. der Formen $f_1, \ldots, f_l$.

Der Satz VII wird also bewiesen sein, wenn wir noch zeigen, daß auch für x_{n+1} gilt:

$$\text{(4)} \qquad G_\sigma \cdot x_{n+1}^\mu \equiv 0\,(f_1, \ldots, f_l),$$

bei genügend groß gewähltem μ. Bezeichnet man den Koeffizienten von x_{n+1}^m innerhalb f_1 mit a, so ist

$$f_1 - a\,x_{n+1}^m \equiv 0\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

und daher

$$G_\sigma \cdot (f_1 - a\,x_{n+1}^m)^{n \cdot \nu} \equiv 0\,(G_\sigma \cdot x_1^\nu, \ldots, G_\sigma \cdot x_n^\nu)$$

Mit Hilfe der schon bewiesenen n Kongruenzen (3) folgt also

$$\text{(5)} \qquad G_\sigma \cdot (a\,x_{n+1}^m)^{n\nu} \equiv 0\,(f_1, f_2, \ldots, f_l).$$

Nun machen wir von einem eleganten Satze von Hurwitz[1]) (a. a. O., Satz Nr. 10) Gebrauch, der sich mit ganz einfachen Überlegungen beweisen läßt (vgl. v. d. Waerden II, § 6) und der in unserer Bezeichnungsweise lautet:

(6) Wenn $T \cdot x^{\nu} \equiv 0\,(f_1, \ldots, f_l)$, wo x eine bestimmt gewählte der Variabeln $x_1 \ldots x_n$ ist, und T ein Polynom der Koeffizienten der f_i allein bedeutet, so hat schon wenigstens ein irreduzibler Teiler I von T die Eigenschaft

$$I \cdot x^{\nu} \equiv 0\,(f_1, \ldots, f_l)$$

Demnach würde also, falls die behauptete Kongruenz (4) unrichtig wäre, aus (5) folgen:

$$(a\, x_{n+1}^{m})^{n\nu} \equiv 0\,(f_1, \ldots, f_l), \tag{7}$$

also eine sicher unrichtige Kongruenz[2]). Damit ist Satz VII bewiesen. Von diesem Satz VII ausgehend werden wir, in Verbindung mit (6), zur Irreduzibilität der Resultante gelangen.

Es sei von nun an die Anzahl der Formen gleich der Anzahl ihrer Variabeln, also $l = n$. G sei irgend ein Polynom des nach § 1 zugehörigen R.-S. Wir wissen, G besitzt die Grundeigenschaft in Bezug auf die n Formen. Nach (6) besitzt also G jedenfalls n irreduzible Teiler $I_1, I_2, \ldots I_n$ — dieselben brauchen nicht verschieden zu sein — folgender Art:

$$\begin{aligned} I_1 \cdot x_1^{\nu} &\equiv 0\,(f_1, \ldots, f_n) \\ &\vdots \\ I_n \cdot x_n^{\nu} &\equiv 0\,(f_1, \ldots, f_n) \end{aligned} \tag{8}$$

Wir behaupten zunächst:

(9) <u>Jedes der Polynome $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ist eine Resultante.</u>

Denn aus (8) folgt, wenn wir z. B. I_n herausgreifen: I_n verschwindet bei jeder solchen Spezialisierung der Koeffizienten der f_i, bei der die zugehörigen f_i' eine gemeinsame Nullstelle $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ besitzen mit $\zeta_n \neq 0$.

In allen jenen Fällen aber, in denen $\zeta_n = 0$ ist, verschwinden die Polynome H_σ, falls man unter H_σ, $\sigma = 1, 2, \ldots q$, ein R.-S. versteht für die n allgemeinen Formen $f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ in $n-1$ Variabeln, $i = 1, 2, \ldots n$.

[1]) Für $l = n$ schon bei Mertens.

[2]) Man setze z. B. $f_1 = f_2 = \cdots = f_l = a \cdot (x_{n+1} - x_1)_m$; dann wird (7) unrichtig bei der Substitution $x_1 = x_{n+1} \neq 0$; $a \neq 0$.

Also müssen, nach dem Hilfssatz Seite 192, Fußnote, die Polynome $I_n \cdot H_\sigma$, $\sigma = 1, 2, \ldots q$, einzeln teilbar sein durch das Produkt R aller verschiedenen irreduziblen Faktoren irgendeiner zu $f_1, \ldots, f_n$ gehörigen Resultante. Die Polynome H_σ haben aber keinen gemeinsamen Teiler[1]), also muß schon I_n durch R teilbar sein. I_n ist also eine Resultante. Ganz analog ist die Überlegung betreffend $I_1, I_2, \ldots I_{n-1}$. Damit ist (9) bewiesen.

Allgemein können sich aber je 2 Resultanten, die zu denselben n Formen gehören, und die keine vielfachen Teiler haben, nach Hilfssatz Seite 192, Fußnote, höchstens um eine multiplikative numerische Konstante unterscheiden. Es gilt also dasselbe von je 2 der Polynome $I_1, \ldots, I_n$. Daher können wir aus (8) und (9) die Tatsache entnehmen:

Es gibt eine irreduzible Resultante, welche die Mertenssche Grundeigenschaft hat:

$$\underline{R \cdot x_i^\nu \equiv 0\,(f_1, \ldots, f_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n.}$$

Weiter folgt, wiederum nach Hilfssatz Seite 192, Fußnote:

Jede andere Resultante derselben n Formen ist, von einer numerischen multiplikativen Konstanten abgesehen, eine Potenz jenes irreduziblen Gebildes R.

Es sei nochmals hervorgehoben, daß wir die „Grundeigenschaft" weder beim Existenzbeweis noch bei der Konstruktion der R.-S^e und der Resultanten benützt haben. Sie wurde nur deshalb in die vorliegende Abhandlung aufgenommen, weil sie eine ausgezeichnete und in der Literatur viel gebrauchte Eigenschaft der Resultanten darstellt, für die wir hiermit einen neuen Beweis gegeben haben.

---

[1]) Denn ein etwaiger gemeinsamer irreduzibler Teiler aller H_σ müßte, nach Seite 192, Fußnote, Teiler von sämtlichen Polynomen jedes R.-S. sein, das zu den n Formen $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$ gehört. Dies führt zu einem Widerspruch bei der folgenden Spezialisierung

$$f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = l_i^{m}(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

wo die l_i allgemein lineare Formen bedeuten; denn hier ist ein R.-S. sofort angebbar, nämlich die n verschiedener Determinanten $n-1$ Grades, welche in der Koeffizientenmatrix der n linearen Formen enthalten sind. Das sind aber n irreduzible Gebilde, von denen je 2 wesentlich verschieden sind.