Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1930. Heft II
Mai-Julisitzung

München 1930
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über eine Formel der Invariantentheorie.

Von **Josef Lense** in München.

Vorgelegt von G. Faber in der Sitzung am 10. Mai 1930.

§ 1. Fragestellung.

Im folgenden soll eine Formel der Invariantentheorie behandelt werden, die an und für sich nicht neu und in vielen speziellen Fragestellungen sicher erkannt worden ist, deren Darstellung mir jedoch bisher in der Literatur nicht zu Gesicht gekommen ist. Eine möglichst allgemeine, strenge Begründung mit den Hilfsmitteln der Analysis scheint mir daher wohl am Platze. Ähnliche Gedankengänge wie im folgenden finden sich z. B. bei S. Lie[1]), ohne daß dort die Schlüsse in der Richtung bis zu Ende durchgeführt sind, wie es hier geschehen soll.

Wir wollen im folgenden zuerst die Fragestellung kurz schildern, ohne dabei strenge Definitionen heranzuziehen, um die Sache möglichst zu klären, und dann den strengen analytischen Beweis der Formel geben. Denken wir uns ein Kontinuum, dessen einzelne Elemente durch P unabhängige Parameter bestimmt sind. Auf dieses Kontinuum sollen die Transformationen einer T-gliedrigen Gruppe ausgeübt werden, jede Transformation ist also durch T unabhängige Parameter gegeben. Dann können Transformationen der Gruppe vorhanden sein, die jedes Element des Kontinuums in sich überführen, wir wollen sie kurz Automorphien des Elementes nennen und annehmen, daß sie durch A unabhängige Parameter festgelegt sind. Schließlich ist es möglich, daß das Kontinuum in Teilgebiete zerfällt, die bei sämtlichen Transformationen der Gruppe ungeändert bleiben. Wir nehmen an, im Kontinuum dieser Teilgebiete sei jedes Teilgebiet

[1]) S. Lie-F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen, 1. Bd., § 58, S. 212–218, Leipzig 1888, B. G. Teubner.

durch J Parameter bestimmt, es enthält also ∞^{P-J} Elemente des ursprünglichen Kontinuums. Da nun jedes Element des ursprünglichen Kontinuums bei ∞^{A} Transformationen ungeändert bleibt, gibt es gerade ∞^{T-A} Transformationen der Gruppe, die es in alle übrigen Elemente überführt, für die eine derartige Überführung überhaupt möglich ist, d. h. nach unserer letzten Annahme in ∞^{P-J}, da alle derartigen Elemente einem der erwähnten Teilgebiete angehören müssen. Infolgedessen muß gelten

$$P - J = T - A.$$

§ 2. Normierung der Elemente.

Die im vorhergehenden Paragraphen durchgeführte Dimensionsbetrachtung soll jetzt durch einen analytischen Beweis auf eine feste Grundlage gestellt werden. Die P unabhängigen Parameter, von denen die Elemente des Kontinuums abhängen, bezeichnen wir mit $a_1, a_2, \ldots a_P$, die Transformationen S der Gruppe seien durch die unabhängigen Parameter $c_1, c_2, \ldots c_T$ festgelegt. Die Transformation S selbst sei durch die Transformationsgleichungen

$$(1) \qquad b_\nu = \varphi_\nu (a_1, a_2, \ldots a_P; \quad c_1, c_2, \ldots c_T) \quad (\nu = 1, 2, \ldots P)$$

charakterisiert, d. h. durch die Ausübung der Transformation S auf das Element, das durch die Parmeter a gegeben ist, möge dieses Element in ein solches mit den Parametern b übergehen. Die Funktionen φ_ν setzen wir in der Umgebung einer gewissen Stelle $(a_1^0, a_2^0, \ldots a_P^0; \quad c_1^0, c_2^0, \ldots c_T^0)$ im Reellen einmal stetig differenzierbar, im Komplexen regulär analytisch in allen Veränderlichen voraus. Da das Element mit den Parametern b durch die zu S inverse Transformation S^{-1} in das Element mit den Parametern a übergeht, müssen die Gleichungen (1) nach den a auflösbar sein, d. h. die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_P)}{\partial(a_1, a_2, \ldots a_P)}$ wird an der betreffenden Stelle von Null verschieden vorausgesetzt. Sie verschwindet daher in einer gewissen Umgebung dieser Stelle ebenfalls nicht.

Wir betrachten nun die Funktionalmatrix $\left\| \dfrac{\partial \varphi_\nu}{\partial c_\varrho} \right\| \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots P \\ \varrho = 1, 2, \ldots T \end{pmatrix}$. Ihr Rang sei $P - J$, ferner werde gesetzt

$$(2) \qquad T - P + J = A.$$

Nach dem Begriff des Ranges ist daher

$$P \geqq J \geqq 0, \quad A \geqq 0.$$

Der Rang soll so verstanden werden, daß alle Determinanten von höherer Ordnung als $P - J$ identisch verschwinden, dagegen mindestens eine von der Ordnung $P - J$ an der betrachteten Stelle von Null verschieden ist. Wenn wir die oben erwähnte Umgebung genügend klein nehmen, verschwindet sie in dieser ganzen Umgebung nicht. Auf einen solchen Bereich wollen wir uns im folgenden immer beschränken. Unter den φ_ν gibt es nach der Annahme über den Rang der Funktionalmatrix $P - J$ unabhängige Funktionen bezüglich der c. Sei die Bezeichnung so gewählt, daß gerade die Determinante $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{P-J})}{\partial(c_1, c_2, \ldots c_{P-J})}$ an der Stelle (a^0, c^0) nicht verschwindet. Setzen wir kurz

$$\varphi_i(a_1^0, a_2^0, \ldots a_P^0;\ c_1^0, c_2^0, \ldots c_T^0) = \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots P - J),$$

so sind die Gleichungen

$$(3) \quad \varphi_i(a_1, a_2, \ldots a_P;\ c_1, c_2, \ldots c_T) = \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots P - J),$$

nach den $P - J$ ersten der c lösbar und liefern als Auflösung

$$(4) \quad \begin{gathered} c_i = \chi_i(a_1, a_2, \ldots a_P;\ c_{P-J+1}, c_{P-J+2}, \ldots c_T;\ \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{P-J}) \\ (i = 1, 2, \ldots P - J), \end{gathered}$$

wo die χ in einer passenden Umgebung im Reellen einmal stetig differenzierbar, im Komplexen analytisch in allen Veränderlichen a und c sind und für

$$\begin{aligned} a_\nu &= a_\nu^0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots P) \\ c_k &= c_k^0 \quad (k = P - J + 1,\ P - J + 2, \ldots T) \end{aligned}$$

die Werte c_i^0 $(i = 1, 2, \ldots P - J)$ annehmen. Die Bedeutung dieser Auflösung ist folgende: Wir bestimmen jene Transformation der Gruppe, die das Element mit den Parametern a in jenes Element überführt, bei dem möglichst viele der Parameter vorgegebene Werte annehmen (hier gleich β_i werden). Wir wollen es das normierte Element und den ganzen Vorgang Normierung nennen.

§ 3. Invarianten und Automorphien.

Die letzten J der Funktionen φ_ν lassen sich durch die ersten $P-J$ darstellen, d. h. es gelten die Gleichungen

$$(5)\quad \begin{gathered}\varphi_k(a_1, a_2, \ldots a_P;\ c_1, c_2, \ldots c_T) = \psi_k(a_1, a_2, \ldots a_P;\ \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{P-J})\\ (k = P-J+1,\ P-J+2, \ldots P).\end{gathered}$$

Ein Beweis dieses Satzes findet sich bei G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, S. 306—311, Leipzig 1909: Veit & Co.

Der Rang der Funktionalmatrix $\left\|\frac{\partial \psi_k}{\partial a_\mu}\right\| \begin{pmatrix} k=P-J+1, P-J+2, \ldots P \\ \mu=1, 2, \ldots \quad P\end{pmatrix}$ ist J. Denn wäre jede Determinante J-ter Ordnung dieser Funktionalmatrix 0, so wäre nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz der Determinantentheorie die Determinante $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_P)}{\partial(a_1, a_2, \ldots a_P)} = 0$ gegen die Voraussetzung. Die Funktionen ψ also sind bezüglich der a voneinander unabhängig.

Zufolge der Gleichungen (3) und (5) ergibt sich durch Einsetzen von (4) in (1)

$$(6)\quad \begin{aligned} &b_i = \beta_i && (i = 1, 2, \ldots P-J)\\ &b_k = \psi_k(a_1, a_2, \ldots a_P;\ \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{P-J}) && (k = P-J+1, P-J+2, \ldots P).\end{aligned}$$

Zerlegen wir nun die Transformation in zwei Schritte, so daß zuerst die a in die Parameter $\bar{a}$ übergehen, wo auch die $\bar{a}$ in der angenommenen Umgebung liegen, dann die $\bar{a}$ in die b, so lauten die Transformationsgleichungen für den zweiten Schritt

$$\begin{aligned} &b_i = \beta_i && (i = 1, 2, \ldots P-J)\\ &b_k = \psi_k(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_P;\ \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{P-J}) && (k = P-J+1, P-J+2, \ldots P),\end{aligned}$$

daher nach (6)

$$\begin{gathered}\psi_k(a_1, a_2, \ldots a_P;\ \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{P-J}) = \psi_k(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_P;\ \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{P-J})\\ (k = P-J+1, P-J+2, \ldots P),\end{gathered}$$

d. h. die ψ sind J unabhängige absolute Invarianten der Elemente des Kontinuums bezüglich der Transformationen der Gruppe. Alle übrigen müssen Funktionen dieser J sein. Denn wir konnten durch unser Verfahren $P-J$ der Parameter a in in bestimmter Weise normieren, d. h. eine Transformation unserer Gruppe angeben, die das gegebene Element in ein normiertes

Element überführt, wobei $P-J$ der Parameter bestimmte vorgegebene Werte haben, d. h. es kann nicht mehr als J unabhängige absolute Invarianten geben.

Die Substitution S, welche das gegebene Element in das normierte überführt, hängt nach (2) und (4) noch von den A unabhängigen Parametern c_{P-J+1}, c_{P-J+2}, ... c_T, ab, d. h. es gibt ∞^A solche S. S_0 sei eine von ihnen und U die allgemeinste Transformation der Gruppe, welche das normierte Element in sich überführt, die sogenannte allgemeinste Automorphie des Elementes. Dann ist $S_0 U = S$, somit $U = S_0^{-1} S$, d. h. A ist die Anzahl der unabhängigen Parameter der Gruppe der Automorphien des Elementes. Damit ist die in § 1 angegebene Formel bewiesen.

§ 4. **Beispiel.**

Wir betrachten folgendes Beispiel zur Erläuterung der eben bewiesenen Formel: Die Elemente unseres Kontinuums seien alle Systeme von je 4 Punkten einer Ebene, die in gerader Linie liegen. Jeder Punkt einer Geraden ist durch einen Parameter festgelegt, die Gerade selbst durch 2, daher $P=6$. Die Transformationen der Gruppe seien die Kollineationen der Ebene. Eine ebene Kollineation ist durch 8 Parameter bestimmt, also $T=8$. 4 Punkte einer Geraden haben eine absolute projektive Invariante, nämlich ihr Doppelverhältnis, sonach $J=1$. Ein solches Punktquadrupel hat also bezüglich der ebenen Kollineationen ∞^3 Automorphien, d. h. es gibt ∞^3 Kollineationen, die das Quadrupel ungeändert lassen. Das sieht man am leichtesten so ein: Damit 2 der Punkte des Quadrupels bei den ebenen Kollineationen festbleiben, sind 4 Bedingungen notwendig, für den dritten Punkt noch eine, weil die Verbindungsgerade der beiden ersten Punkte durch jede Kollineation, welche die beiden ersten Punkte festläßt, in sich übergeht. Der vierte Punkt geht dann von selbst in sich über, weil die Kollineationen das Doppelverhältnis nicht ändern. Die Formel ist damit bestätigt.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1930

Band/Volume: 1930

Autor(en)/Author(s): Lense Josef

Artikel/Article: Über eine Formel der Invariantentheorie 101-105