Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1930. Heft II
Mai-Julisitzung

München 1930
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Kritisch-historische Bemerkungen zur Funktionentheorie.

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung am 9. Juli 1930.

IV. Über die Bezeichnung „Elliptische Funktionen" und die Umkehrung der Weierstraßschen *Pe*-Funktion.

Unter der seit 100 Jahren üblich gewordenen Bezeichnung „*Elliptische Funktionen*" verbirgt sich bekanntlich eine völlig „*ellipsen*fremde" Gattung *eindeutiger*, durch ihre besonderen Eigenschaften höchst bemerkenswerter analytischer Funktionen, die man sinngemäßer als *gebrochene* („meromorphe") *doppelperiodische Funktionen* zu charakterisieren pflegt. Jene erstgenannte, mit dem einzigen Vorzug größerer Kürze ausgestattete Benennung wird durch ihre historische Entstehung zwar erklärt, aber keineswegs gerechtfertigt. Weil bei der Rektifikation der *Ellipse* (übrigens auch der Hyperbel) *ein* spezielles Integral von der Form $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{R}}$ erscheint (wo P eine rationaleFunktion von x, R ein Polynom 4^{ten} Grades), so bezeichnete Legendre die ganze Gattung dieser Integrale zunächst[1]) als „*Transcendantes elliptiques*", späterhin[2]) als „*Fonctions elliptiques*". Man wird schon diese Terminologie schwerlich als eine besonders zweckmäßige bezeichnen können[3]). Nichts-

---

1) In dem *Mémoire sur les transcendantes elliptiques,* lu à la cidevant (sic!) Académie des sciences en avril 1792. L'an deuxième de la république (= 1793).

2) In den *Exercices de calcul intégral sur diverses ordres de transcendantes et sur les quadratures* (1811—19) und in dem *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes* (1825—28).

3) Weierstraß, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen* (Werke, Bd. 5, S. 2): „Diese Integrale führen ihren Namen nach dem *für die Theorie völlig gleichgültigen* Umstande, daß *eines* von ihnen geeignet ist, den Bogen einer Ellipse darzustellen".

destoweniger erlitt sie noch eine merkliche *Verschlechterung*, als in den Jahren 1825—29 Abel und Jacobi ungefähr gleichzeitig durch *Umkehrung* von Legendres *fonctions elliptiques de la première espèce* das vorliegende Forschungsgebiet um ein neues Prinzip von hervorragender Fruchtbarkeit bereicherten. Jacobi benützte diese Gelegenheit, um die bei Legendre als *Integral*bezeichnung auftretenden *fonctions elliptiques* ohne weiteres als *elliptische Funktionen* zur Bezeichnung seiner *Umkehrungsfunktionen* sich anzueignen. Und *dabei* ist es, trotz Legendres lebhaftem Protest und Jacobis anfänglicher Bereitwilligkeit zu jeder gewünschten Änderung[2]), schließlich geblieben. Auf diese Weise erscheint aber die Quelle des Beiworts „*elliptisch*" wieder um eine Etappe weiter fortgerückt. Und ich wüßte, um seine Provenienz definitionsmäßig deutlich zu machen, beim besten Willen nicht anders, als etwa folgendermaßen zu definieren: Unter einer *elliptischen* Funktion versteht man die *Umkehrungsfunktion* eines Integrals von äußerlich ähnlicher Form, aber *grundsätzlich anderem* Charakter wie dasjenige, welches den Bogen einer *Ellipse* darstellt.

Hiernach erscheint mir die fragliche Bezeichnung als eine der unpassendsten, welche sich in dem Wortschatz der Analysis vorfindet. Und wenn ich auch annehme, daß diese Ansicht ziemlich verbreitet, ihre Erwähnung also trivial sein dürfte, so scheint es mir doch nützlich, sie bei passender Gelegenheit in Erinnerung zu bringen, auf daß man nicht glaube, wir Mathematiker seien „in der Gewohnheit trägem Gleise" gegen so bedenkliche „Schönheitsfehler" unempfindlich geworden. Im übrigen ist dieser Teil

---

[1]) Brief Legendres an Jacobi vom 16. Juli 1829: „..... Je devrai borner là ma lettre et ne vous parler des changements de nomenclature que vous proposez dans votre article 17 pag. 31 (sc. Fundamenta nova); mais comme d'autres personnes pourraient vous représenter qu'en cela vous avez fait une chose qui doit m'être désagréable, je ne vois pas pourquoi je vous cacherais ce que je pense de cette proposition. Je vous dirai donc franchement que je n'approuve pas votre idée et que je ne vois pas de quelle utilité elle peut être pour vous et pour la science.

..... Il me suffira de vous avoir témoigné ma surprise sur l'inconvenance et la bizarrerie de votre idée; elle n'altérera en rien les sentiments d'estime et d'affection que j'ai conçus pour vous et dont je vous renouvelle l'assurance. Le Gendre. (s. Jacobi, Werke 1, S. 451).

[2]) Brief von Jacobi an Legendre vom 19. August 1829 (a. a. O. S. 452).

meiner „kritisch-historischen Bemerkung“ nur ein beiläufiges Nebenergebnis meines Zurückgreifens auf den historischen Ursprung der elliptischen Funktionen, das mich vielmehr in der Hauptsache zur näheren Untersuchung der folgenden wesentlich wichtigeren Frage angeregt hat: Ist die Tatsache, daß die sogenannten *elliptischen Funktionen*, d. h. die *gebrochenen, doppelperiodischen Funktionen*, durch die Zufälligkeiten der *historischen* Entwicklung als *Umkehrungsfunktionen* der elliptischen Integrale erster Gattung auf die Welt gekommen sind, ausreichend, um *diese Anordnung* des zwischen den beiden Funktionsgattungen bestehenden Zusammenhanges als die *natürlichste* gelten zu lassen?

Die Frage dürfte zuerst von dem hochbegabten, leider bereits im Alter von 29 Jahren 1852 verstorbenen Gotthold Eisenstein[1]) angeschnitten und bis zu einem weiter unten noch genauer anzugebenden Punkte durchgeführt worden zu sein, in einer umfangreichen Arbeit, die 1847 im 35. Bande des Journals für Mathematik (S. 153—273), im gleichen Jahre auch in einer Sammlung Eisensteinscher Abhandlungen[2]) (S. 213—333) erschienen ist und deren *vollständiger*[3]) Titel alles wesentliche des Inhalts angibt. Er lautet:

> Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelprodukte, aus welchen die elliptischen Funktionen als Quotienten zusammengesetzt sind, und der mit ihnen zusammenhängenden Doppelreihen (als eine neue Begründungsweise der Theorie der elliptischen Funktionen, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Analogie zu den Kreisfunktionen).

Die fraglichen *Doppelprodukte* bestehen aus den Linearfaktoren der Weierstraßschen σ-Funktion *ohne* die zur *unbedingten* Kon-

[1]) Geb. 1823 zu Berlin. Die Bände 27—41 des Crelleschen Journ. f. Math. (1844—52) enthalten über 40 größere und kleinere Aufsätze von ihm.

[2]) *Mathematische Abhandlungen besonders aus den Gebieten der höheren Arithmetik und der elliptischen Funktionen von Dr. G. Eisenstein. Mit einem Vorwort von Prof. Dr. Gauß(!). Berlin, 1847.*

[3]) Dieser *vollständige* Titel findet sich *nur* in dem *Inhaltsverzeichnis* dieser Sammlung (Fußn. 2) hinter der Gaußschen Vorrede. In der entsprechenden Textüberschrift (S. 213 bzw. Journ. f. Math. S. 153) bricht der Titel schon hinter „zusammengesetzt sind“ ab. (An beiden Stellen findet sich übrigens in der Numerierung der Druckfehler IV statt: VI).

vergenz erforderlichen Exponentialfaktoren, sind also nur *bedingt*[1]) konvergent (wie durch Übergang zur *Doppelreihe* der Logarithmen bewiesen wird). Das letztere würde auch von derjenigen Eisensteinschen Doppelreihe gelten, die der Partialbruchreihe für $\wp(u)$ *ohne* die Zusatzglieder $-\frac{1}{\omega_{\mu\nu}^2}$ (in der von uns später augewendeten Schreibweise, s. § 1, Gl. (2)) entspricht, also der Reihe $\frac{1}{u^2}+\sum_{\mu\nu}'\frac{1}{(u-\omega_{\mu\nu})^2}$. Aber Eisenstein hilft sich dadurch, daß er die in gleichem Sinne *bedingt* konvergierende Reihe $\sum_{\mu\nu}'\frac{1}{\omega_{\mu\nu}^2}$ *subtrahiert* und auf diese Weise die übliche *unbedingt* konvergierende Partialbruchreihe erzeugt[2]). Die entsprechende Reihe für $\wp'(u)$ erweist sich ja ohne weiteres als *unbedingt* konvergent. Für diese als *doppelperiodisch* erkannten Funktionen gewinnt er dann durch weitere Differentationen und passende Eliminationen diejenige Form der Differentialgleichung[3]), welche der Gleichung (5) unseres § 1 entspricht, also:

$$\begin{aligned} p'(u)^2 &= 4\,(\wp(u)-\wp(\omega))\,(\wp(u)-\wp(\omega'))\,(\wp(u)-\wp(\omega'')) \\ &= 4\,(\wp(u)-a)\,(\wp(u)-a')\,(\wp(u)-a'') \end{aligned}$$

und schließt daraus, wenn $\wp(u)=x$ gesetzt wird:

$$u=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)\,(x-a')\,(x-a'')}}.$$

Er hat somit bewiesen, daß als Umkehrungsfunktion von $\wp(u)$ bei gegebenen Perioden ω, ω' ein elliptisches Integral erster Gattung erscheint, wobei aber a, a', a'' als bestimmte Funktionen von ω, ω' anzusehen sind, während die Frage nach dem entsprechenden Zusammenhange bei *beliebig vorgeschriebenen* a, a', a'' (vgl. § 1, Nr. 3) nicht berührt wird.

1) Diese „*bedingte*" Konvergenz ist in etwas anderem Sinne zu verstehen, wie es sonst bei *Doppelreihen* üblich ist. Vgl. meine „Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen": dieser Berichte 37 (1897) S. 140.

2) Die grundlegende *absolute* Konvergenz von $\sum_{\mu\nu}'\frac{1}{(u-\omega_{\mu\nu})^a}$ für $a>2$ hat er bereits als Spezialfall eines entsprechenden Satzes für beliebig vielfache Reihen an früherer Stelle bewiesen (s. Journ. f. Math. S. 157 ff. = Abh. S. 217 ff.

3) Journ. f. Math. S. 226 = Abh. S. 286.

Gebührt hiernach Eisenstein[1]) (abgesehen von seiner wesentlich schwerfälligeren Bezeichnungsweise) die Erfindung der von Weierstraß mit $\wp(u)$ bezeichneten Funktion, so hat doch erst Weierstraß ihre ganze Bedeutung für die Theorie der „elliptischen" Funktionen erkannt und zunächst auf ihr als doppelperiodischer Grundfunktion, mit Benützung der in seiner klassischen Abhandlung über die eindeutigen analytischen Funktionen entwickelten Prinzipien, die Theorie der (gebrochenen) doppelperiodischen Funktionen als eins der reizvollsten Kapitel seiner Funktionentheorie auf- und ausgebaut. Allerdings existiert bis jetzt keine vollständige und authentische Darstellung dieser von Weierstraß in seinen verschiedenen Vorlesungen über elliptische Funktionen ausgebildeten Theorie[2]). Immerhin geben die von H. A. Schwarz nach Vorlesungen und Aufzeichnungen von Weierstraß bearbeiteten „*Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen*"[3]) ein ausreichendes Bild von dem Aufbau der ganzen Theorie, und der Abschnitt über doppelperiodische Funktionen auf S. 367—409 der aus Weierstraßschen Vorlesungen hervorgegangenen, zum Teil freilich nur mit Vorsicht zu gebrauchenden „*Theorie der analytischen Funktionen von* Otto Biermann"[4]) enthält mehr als alles, was in dem vorliegenden Zusammenhange an Grundlagen der fraglichen Theorie in Betracht kommt, übrigens ja auch in fast allen einschlägigen Lehrbüchern der letzten 50 Jahre zu finden ist. Denn hier handelt es sich ja keineswegs um einen mehr oder weniger vollständigen *Aufbau* der Theorie der elliptischen Funktionen, sondern lediglich um

---

[1]) In dem Lehrbuche: *Éléments de là théorie des fonctions elliptiques* von Tannery und Molk findet sich in Bd. 1 (1893), S. 175, Fußnote, eine Bemerkung, die ein bezeichnendes Licht auf die in den späteren Lebensjahren von Weierstraß und Kronecker zwischen ihnen eingetretene Entzweiung wirft. Danach habe Kronecker vorgeschlagen, zu Ehren von Eisenstein das aus dem Anfangs- und Endbuchstaben seines Namens gebildete Zeichen $en(u)$ statt $p(u)$ zu gebrauchen.

[2]) Die in Bd. 5 seiner Werke publizierte Vorlesung über elliptische Funktionen, von der weiter unten noch die Rede sein wird, verfolgt eine andere Tendenz.

[3]) Zweite Ausgabe, Bogen 1—12. Berlin 1893.

[4]) Berlin 1887.

einen im Gegensatz zu dem „historischen" (nach meinem Dafürhalten) möglichst „natürlichen" *Zugang* zu dieser Theorie.

Wenn es wohl niemanden einfallen dürfte, die Funktion $x = \sin u$ von vornherein als *Umkehrungsfunktion* des Integrals $u = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ zu behandeln, warum sollte man bei der in allen ihren merkwürdigen Eigenschaften so leicht zu durchschauenden Funktion $x = \wp(u)$ den entsprechenden Weg einschlagen, statt im Gegenteil die über sie weit leichter erlangten Kenntnisse zu benützen, um die Fundamentaleigenschaften *ihrer* Umkehrungsfunktion zu erkunden? Der Nachweis, daß dieses Ziel mit verhältnismäßig einfachen Mitteln zu erreichen ist, bildet den Inhalt der folgenden Auseinandersetzungen.

Vor allem möchte ich jedoch feststellen, daß bei ihrer Abfassung die in Fußn. 3 der Seite 129 erwähnte Weierstraßsche Vorlesung in Bd. 5 seiner Werke[1]) trotz ihres genau entgegengesetzten Ausgangspunktes mir außerordentliche Dienste geleistet hat. Sie schlägt nämlich unter ausdrücklichem Verzicht auf Vorkenntnisse und Hilfsmittel aus der allgemeinen Funktionentheorie gerade den *historischen* von uns angefochtenen Weg ein, das Integral:

$$\int\limits_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

umzukehren oder, was auf dasselbe hinausläuft, aus der Differentialgleichung:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 \quad (\text{mit } x = \infty \text{ für } u = 0)$$

x als Funktion von u zu bestimmen. Um das Unglück voll zu machen, beginnt das erste Kapitel behufs Transformation des allgemeinen elliptischen Integrals auf die obige Normalform mit einem gewaltigen Aufwand recht umständlicher, äußerst wenig anziehender Rechnungen, welche bei der ersten Lektüre mir das berüchtigte „*Lasciate ogni speranza*" bedenklich nahe legte. Indessen nach Überwindung dieses Inferno und einem kurzen Durchgangskapitel über die Integration der obigen Differential-

[1]) Weiterhin kurz als W. 5 zitiert.

gleichung durch Reihentwicklung kommen wir im dritten Kapitel schon auf bekanntes Terrain: da wird bereits als Lösung jener Differentialgleichung die Funktion $x = \wp(u)$ eingeführt, freilich zunächst in Form einer ganz schematischen Potenzreihe mit höchst bescheidenem Konvergenzbereich, doch geht es sehr bald mit der Vervollkommnung Schritt für Schritt vorwärts: Additionstheorem, genauere Bestimmung der Reihenkoeffizienten, Einführung der zu $\wp(u)$ in naher Beziehung stehenden Funktion $\sigma(u)$, gleichfalls als Potenzreihe mit jenem beschränkten Konvergenzbereich, Ausdehnung des letzteren auf die ganze Ebene, Darstellung von $\wp(u)$ durch einen Quotienten zweier beständig konvergierenden Potenzreihen, Periodizität. *Unsere* Methode bringt es mit sich, daß wir mit unserer Lösung alle diese Stadien gleichfalls durchmachen müssen, sodaß unsere Darstellung ganz parallel mit der obigen verläuft. Dabei genießen wir aber den doppelten Vorteil, daß wir manche der dort gefundenen Ergebnisse direkt benützen können, andererseits an Stelle der dortigen von Schritt zu Schritt neu zu ersinnenden algebraischen Beweismittel bestimmte Vorbilder aus der Theorie der doppelperiodischen Funktionen zur Verfügung haben.

---

§ 1. Zusammenstellung einiger die Funktionen $\zeta(u)$, $\wp(u)$, $\sigma(u)$ betreffender Grundformeln. — Die Identität $\wp(u \mid \omega, \omega') = \wp(u; g_2, g_3)$ für $g_2 = 60 \sum\limits_{\mu\nu}' \omega_{\mu\nu}^{-4}$, $g_3 = 140 \sum\limits_{\mu\nu}' \omega_{\mu\nu}^{-6}$. — Einführung der Funktionen $\mathfrak{p}(u; \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3)$, $\mathfrak{z}(u; \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3)$, $\mathfrak{s}(u; \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3)$ bei beliebig vorgeschriebenen $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$.

1. Bedeuten ω, ω' zwei beliebige komplexe Zahlen mit nicht-reellem Quotienten und setzt man:

$$\omega_{\mu\nu} = 2\mu\omega + 2\nu\omega' \text{ für } \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{exkl. } \mu = \nu = 0,$$

bezeichnet durch das Symbol $\sum\limits_{\mu\nu}'$ die Summation über die obigen μ, ν von $-\infty$ bis $+\infty$, so ist die Reihe $\sum\limits_{\mu\nu}' \omega_{\mu\nu}^{-3}$ bekanntlich *absolut konvergent* und das gleiche gilt daher, abgesehen von den Stellen $u = 0$ und $u = \omega_{\mu\nu}$, von der folgenden:

$$(1)\quad \zeta(u)=\frac{1}{u}+\sum_{\mu\nu}{}'\frac{u^2}{\omega_{\mu\nu}^2(u-\omega_{\mu\nu})}=\frac{1}{u}+\sum_{\mu\nu}{}'\left(\frac{1}{u-\omega_{\mu\nu}}+\frac{u}{\omega_{\mu\nu}^2}+\frac{1}{\omega_{\mu\nu}}\right),[1]$$

die überdies in jedem abgeschlossenen, von Stellen 0 und $\omega_{\mu\nu}$ freien Bereiche *gleichmäßig* konvergiert und somit eine *gebrochene* („meromorphe") *transcendente Funktion* $\zeta(u)$ mit den *einfachen* Polen $0,\ \omega_{\mu\nu}$ darstellt[2]).

Das entsprechende gilt dann von ihren Derivierten:

$$(2)\qquad \wp(u)=-\zeta'(u)=\frac{1}{u^2}+\sum_{\mu\nu}{}'\left(\frac{1}{(u-\omega_{\mu\nu})^2}-\frac{1}{\omega_{\mu\nu}^2}\right)$$

$$(3)\quad \wp'(u)=-2\left(\frac{1}{u^3}+\sum_{\mu\nu}{}'\frac{1}{(u-\omega_{\mu\nu})^3}\right)=-2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu}\frac{1}{(u-\omega_{\mu\nu})^3}$$

(wo jetzt: $\omega_{00}\equiv 0$).

Ein Blick auf die letzte Schreibweise läßt ohne jede Rechnung erkennen, daß $\wp'(u)$ die *Perioden* $2\omega,\ 2\omega'$ hat, und daraus folgt durch Integration der Gleichungen $\wp'(u+2\omega)=\wp'(u)$, $\wp'(u+2\omega')=\wp'(u)$ das nämliche für $\wp(u)$, da die Integrations-Konstante, wie die Substitution $u=-\omega$ bzw. $u=-\omega'$ zeigt, wegen $\wp(u)=\wp(-u)$ verschwindet.

Bedeutet r_0 das (von Null verschiedene) Absolutwert-*Minimum* der in den Summen $\sum\limits_{\mu\nu}{}'$ enthaltenen $\omega_{\mu\nu}$, so liefert die Partialbruchreihe (2) für die *gerade* Funktion $\wp(u)$, für die wir mit Rücksicht auf das folgende jetzt ausführlicher $\wp(u|\omega,\omega')$ schreiben wollen, die für $|u|<r_0$ gültige Potenzreihe:

$$(4)\ \wp(u|\omega,\omega')=u^{-2}+\sum_{2}^{\infty}{}_{\lambda}\, c_\lambda\, u^{2\lambda-2},\quad \text{wo: } c_\lambda=(2\lambda-1)\sum{}'\omega_{\mu\nu}^{-2\lambda},$$

also insbesondere:

---

[1]) Nach dem Vorbilde: $\cot xu=\dfrac{1}{u}+\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}'_{\nu}\dfrac{u}{\nu(u-\nu)}$

$$=\frac{1}{u}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{\nu}\left(\frac{1}{u-\nu}+\frac{1}{\nu}\right).$$

[2]) Auf diesen, wie mir scheint, einfachsten Zugang zur Theorie der doppelperiodischen Funktionen habe ich schon bei früherer Gelegenheit hingewiesen: s. dieser Berichte Jahrgang 1912, S. 34/5, Fußn. 2.

(4a) $$c_2 = 3 \sum_{\mu\nu}' \omega_{\mu\nu}^{-4}, \quad c_3 = 5 \sum_{\mu\nu}' \omega_{\mu\nu}^{-6}.$$

Andererseits genügt $\wp(u)$ als „*doppelperiodische Funktion* 2^{ter} *Ordnung*“ der Differentialgleichung:

(5) $$\wp'(u)^2 = 4(\wp(u) - \wp(\omega))(\wp(u) - \wp(\omega'))(\wp(u) - \wp(\omega'')),$$

wo: $\omega'' = \omega + \omega'$, $\wp(\omega) \neq \wp(\omega') \neq \wp(\omega'')$, $\wp(\omega) + \wp(\omega') + \wp(\omega'') = 0$, sodaß die vorstehende Differentialgleichung sich auch folgendermaßen schreiben läßt;

(6) $$\begin{aligned} \wp'(u)^2 &= 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3 \\ &= 4(\wp(u) - e_1)(\wp(u) - e_2)(\wp(u) - e_3), \end{aligned}$$

wo e_1, e_2, e_3 durch $\wp(\omega)$, $\wp(\omega')$, $\wp(\omega'')$ definiert sind, also: $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, $e_1 \neq e_2 \neq e_3$ und daher: $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

Die „*Invarianten*“ g_2, g_3 erscheinen hierbei zunächst als symmetrische ganze Funktionen von $\wp(\omega)$, $\wp(\omega')$, $\wp(\omega'')$, schließlich also als symmetrische Funktionen von ω, ω'. Eine einfachere Darstellung für diese, sowie zugleich auch für die Koeffizienten c_λ gewinnt man durch Einsetzen der Reihe (4) und ihrer Derivierten in die Differentialgleichung (6) und Koeffizienten-Vergleichung, nämlich:

(7) $$c_2 = \frac{1}{20} g_2, \; c_3 = \frac{1}{28} g_3 \text{ und für } \lambda \geqq 4\colon c_\lambda = \frac{1}{(\lambda-3)(2\lambda+1)} \sum_{2}^{\lambda-2}{}_{\varkappa} c_\varkappa c_{\lambda-\varkappa}.$$

Die Vergleichung der Ausdrücke (7) für g_2, g_3 mit denjenigen in Gl. (4a) liefert für die Invarianten g_2, g_3 die fundamentalen Beziehungen:

(8) $$g_2 = 60 \sum_{\mu\nu}' \omega_{\mu\nu}^{-4}, \quad g_3 = 140 \sum_{\mu\nu}' \omega_{\mu\nu}^{-6}.$$

Des weiteren zeigt die Rekursionsformel (7) für die c_λ, daß diese sich durchweg als *ganze rationale Funktionen* von g_2, g_3 mit *positiven*, rationalen Zahlenkoeffizienten darstellen lassen. Da hiernach die Reihe (4), die doch schließlich als *definierendes Funktionselement* für $\wp(u)$ angesehen werden kann, gar kein explizites ω, ω' mehr enthält, schreibt man, um dies in Evidenz zu setzen, statt $\wp(u|\omega, \omega')$ nach Bedarf auch $\wp(u; g_2, g_3)$.

2. Ehe wir die letzte Bemerkung weiter verfolgen, halten wir es für zweckmäßig, den vorstehenden Reminiszenzen aus der

Theorie der Funktion $\wp(u)$ noch die folgenden auf $\zeta(u)$, $\sigma(u)$ bezüglichen hinzuzufügen.

Nach einem bekannten Satze von Weierstraß läßt sich jede *gebrochene* transcendente Funktion als Quotient zweier *ganzen* darstellen. Um dies für die Funktionen, $\zeta(u)$, $\wp(u)$ durchzuführen, bedarf man also für den Nenner eine ganze Funktion, welche die *Pole* $\omega_{\mu\nu}$ zu einfachen *Nullstellen* hat, und gelangt nach einem anderen bekannten Weierstraßschen Satze zur Bildung der Funktion:

$$(9) \qquad \sigma(u) = u \prod_{\mu\nu}' \left(1 - \frac{u}{\omega_{\mu\nu}}\right) e^{\frac{u}{\omega_{\mu\nu}} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\omega_{\mu\nu}}\right)^2},$$

(wo das Zeichen $\prod\limits_{\mu\nu}'$ in analogem Sinne zu verstehen ist, wie zuvor $\sum\limits_{\mu\nu}'$). Durch logarithmische Differentiation von Gl. (9) findet man sodann:

$$(10) \qquad \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{1}{u} + \sum_{\mu\nu}' \left(\frac{1}{u - \omega_{\mu\nu}} + \frac{u}{\omega_{\mu\nu}^2} + \frac{1}{\omega_{\mu\nu}}\right) = \zeta(u)$$

und durch nochmalige Differentiation:

$$(11) \qquad \wp(u) = \frac{\sigma'(u)^2 - \sigma(u)\,\sigma''(u)}{\sigma(u)^2}.$$

Ferner ergibt sich aus der Potenzreihe (4) für $\wp(u)$, wegen $\zeta'(u) = -\wp(u)$, durch Integration die folgende Potenzreihe für $\zeta(u)$ (ohne konstantes Glied wegen $\zeta(-u) = -\zeta(u)$):

$$(12) \qquad \zeta(u) = -u^{-1} - \sum_{2}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{1}{2\lambda - 1} c_\lambda u^{2\lambda-1} \qquad (|u| < r_0)$$

und hieraus vermittelst der aus Gl. (10) durch Multiplikation mit $u \cdot \sigma(u)$ hervorgehenden Beziehung: $u\,\sigma(u)\,\zeta(u) = u\,\sigma'(u)$ nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten:

$$(13) \qquad \sigma(u) = u + \sum_{2}^{\infty}{}_{\lambda}\, b_\lambda u^{2\lambda+1},$$

wo:

$$(13\text{a}) \qquad \begin{cases} b_2 = -\dfrac{g_2}{2^4 . 3 . 5}, \quad b_3 = -\dfrac{g_3}{2^3 . 3 . 5 . 7} \\[2ex] b_\lambda = -\dfrac{1}{2\lambda}\left(\sum\limits_{2}^{\lambda-2}{}_{\varkappa} \dfrac{c_\varkappa}{2\varkappa - 1} b_{\lambda-\varkappa} + \dfrac{c_\lambda}{2\lambda - 1}\right). \end{cases}$$

Dabei gilt die Reihe (13) auf Grund ihrer Herleitung zunächst nur für $|u| < r_0$, erweist sich indessen als *beständig kon-*

vergent, da der Charakter von $\sigma(u)$ als *ganze* transcendente Funktion bereits feststeht.

3. Setzt man $\wp(u) = x$, so nimmt die Differentialgleichung (6) die Form an:

$$(14)\quad \left(\frac{du}{dx}\right)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$$

und wird nach Hinzufügung der Anfangsbedingung: $x = \infty$ für $u = 0$, durch $x = \wp(u; g_1, g_2)$ dann und nur dann befriedigt, wenn nach Vorgabe lediglich an die Bedingung $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) \neq 0$ gebundener, im übrigen beliebiger ω, ω' die g_2, g_3 den zuvor mit (8) bezeichneten Gleichungen:

$$(8)\qquad g_2 = 60 \sum_{\mu\nu}{}' \omega_{\mu\nu}^{-4}, \quad g_3 = 140 \sum_{\mu\nu}{}' \omega_{\mu\nu}^{-6}$$

entnommen werden. Andererseits behält aber die Differentialgleichung (14) durchaus ihren Sinn, wenn an die Stelle der Zahlen g_2, g_3 zwei bis auf die einzige Beschränkung $\mathfrak{g}_2^3 - 27\,\mathfrak{g}_3^2 \neq 0$ *völlig willkürliche* $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ treten, von denen zum mindesten *nicht feststeht,* ob sie Beziehungen von der Form (8) genügen. Die Frage nach der Existenz einer die Differentialgleichung:

$$(14\,\mathrm{a})\quad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - \mathfrak{g}_2 x - \mathfrak{g}_3 \quad (x = \infty \text{ für } u = 0)$$

bei *beliebig vorgeschriebenen* $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ befriedigenden Lösung wird dann zumeist von der „entgegengesetzten" Seite in Angriff genommen, d. h. indem man die Bestimmung von u als Funktion von x auf Grund der entsprechend umgeformten Differentialgleichung:

$$(14\,\mathrm{b})\quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{4x^3 - \mathfrak{g}_2 x - \mathfrak{g}_3}} \quad (u = 0 \text{ für } x = \infty),$$

also schließlich die Diskussion des Integrals $\int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - \mathfrak{g}_2 x - \mathfrak{g}_3}}$ mit den Methoden der komplexen Integration zum Ausgangspunkte nimmt[1]).

---

[1]) Vgl. z. B. Burkhard-Faber, Elliptische Funktionen (1920), S. 62, II.

Eine direktere Erledigung der obigen Frage würde sich aus dem Nachweis ergeben, daß stets Wertepaare ω, ω' existieren, welche den im Sinne der Gleichungen (8) gebildeten Beziehungen genügen:

$$(15)\qquad \sum_{\mu\nu}{}' \omega_{\mu\nu}^{-4} = \frac{1}{60}\,\mathfrak{g}_2, \quad \sum_{\mu\nu}{}' \omega_{\mu\nu}^{-6} = \frac{1}{140}\,\mathfrak{g}_3.$$

Diesen Weg hat z. B. Hurwitz in seinen Vorlesungen[1]) eingeschlagen. Immerhin kann man wohl sagen, daß seine sehr sinnreiche, in die Theorie der *elliptischen Modulfunktionen* hineinführende Methode[2]) dem Verständnis eines Anfängers ziemliche Schwierigkeiten bereiten dürfte und daß es überdies sicher etwas mißliches hat, die Begründung eines für den ganzen Aufbau der Theorie wichtigen Ergebnisses allzusehr nach dem Ende hin in eine Art Ausläufer der Theorie zu verlegen.

Dem gegenüber soll im folgenden versucht werden, das gleiche Ziel durch eine Methode zu erreichen, welche, wie bereits oben bemerkt, in teilweiser Anlehnung an die erwähnte Vorlesung von Weierstraß, jedoch im Gegensatz zu dieser im unmittelbaren Anschluß an die so leicht zugängliche Theorie der gebrochenen doppelperiodischen Funktionen mit verhältnismäßig sehr einfachen Hilfsmitteln zu Werke geht.

4. Wir gehen von der Bemerkung aus, daß die *Konvergenz* und der *Konvergenzradius* der als definierendes Funktionselement von $\wp(u; g_2, g_3)$ dienlichen Potenzreihe: $u^{-2} + \sum_2^\infty{}_\lambda\, c_\lambda u^{2\lambda-2}$ im Hinblick auf die Koeffizientenbestimmung (7) an und für sich lediglich von der *Größe* der Absolutwerte $|g_2|$, $|g_3|$, nicht aber von dem Umstande abhängt, ob dieselben den Gleichungen (8) entnommen werden. Insbesondere lassen die Koeffizienten-Formeln (7) erkennen, daß im Falle:

$$|c_2| \leqq 1, \quad |c_3| \leqq 1, \quad \text{d. h.:} \quad |g_2| \leqq 20, \quad |g_3| \leqq 28,$$

für $\lambda \geqq 4$ sich ergibt:

$$|c_\lambda| \leqq \frac{3}{2\lambda + 1},$$

---

[1]) Hurwitz-Courant, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. 1. Auflage 1922.

[2]) A. a. O. S. 206/215.

mithin die fragliche Reihe *mindestens* den Konvergenzradius 1 besitzt.

Bedeuten jetzt also wieder $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3$ zwei im übrigen *beliebige* Zahlen, die wir nur *vorläufig* den beiden Bedingungen unterwerfen:

$$(16) \qquad |\mathfrak{g}_2| \leqq 20, \quad |\mathfrak{g}_3| \leqq 28,$$

und bezeichnen wir mit $\mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3, \mathfrak{c}_\lambda$ solche Zahlen, die genau so von $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3$ abhängen, wie die durch Gl. (7) definierten c_2, c_3, c_λ von g_2, g_3, so *konvergiert* die Reihe $\sum_2^\infty{}^\lambda \mathfrak{c}_\lambda u^{2\lambda-2}$ zum mindesten für $|u| < 1$ und kann daher nach Hinzufügung des Gliedes u^{-2} als definierendes Element einer analytischen Funktion dienen, die wir mit $\mathfrak{p}(u; \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3)$ bezeichnen wollen, sodaß also zunächst für $|u| < 1$:

$$(17) \qquad \mathfrak{p}(u; \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3) = u^{-2} + \sum_2^\infty{}^\lambda \mathfrak{c}_\lambda u^{2\lambda-2}.$$

Da aber die entsprechende Reihe mit den Koeffizienten c_λ für x in die Differentialgleichung (6) eingesetzt, diese formal befriedigen mußte, so gilt das gleiche für die Reihe (17) bezüglich der folgenden Differentialgleichung, die wir als von jetzt ab durchweg in den Vordergrund tretend durch die Nummer (I) auszeichnen wollen:

$$(\mathrm{I}) \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - \mathfrak{g}_2 x - \mathfrak{g}_3 = 4(x - \mathfrak{e}_1)(x - \mathfrak{e}_2)(x - \mathfrak{e}_3),$$

sodaß sie also in dieser Gestalt für $|u| < 1$ einschließlich der Anfangsbedingung $x = \infty$ für $u = 0$ durch $x = \mathfrak{p}(u; \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3)$ befriedigt wird.

Dabei genügen die jetzt mit $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ bezeichneten Wurzeln der Gleichung $4x^3 - \mathfrak{g}_2 x - \mathfrak{g}_3 = 0$ wieder der Bedingung $\mathfrak{e}_1 \neq \mathfrak{e}_2 \neq \mathfrak{e}_3$, wenn wir *ein für allemal* $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3$ der Bedingung $\mathfrak{g}_2^3 - 27\mathfrak{g}_3^2 \neq 0$ unterwerfen. Um dagegen $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3$ von der vorläufig eingeführten Beschränkung (16) zu befreien, transformieren wir die Differentialgleichung mit Hilfe der Identität:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = a^6 \left(\frac{d\,\frac{x}{a^2}}{d(au)}\right)^2 \quad (\text{wo } a \text{ eine beliebige Konstante})$$

$$\left(\frac{d\,\frac{x}{a^2}}{d(au)}\right)^2 = \frac{1}{a^6}(4x^3 - \mathfrak{g}_2 x - \mathfrak{g}_3) = 4\left(\frac{x}{a^2}\right)^3 - \frac{\mathfrak{g}_2}{a^4}\left(\frac{x}{a^2}\right) - \frac{\mathfrak{g}_3}{a^6},$$

welche nach Analogie von (I) befriedigt wird durch:

$$\frac{x}{a^2} = \mathfrak{p}\left(au;\ \frac{\mathfrak{g}_2}{a^4},\ \frac{\mathfrak{g}_3}{a^6}\right)$$

falls:

$$|au| < 1, \quad \frac{\mathfrak{g}_2}{a^4} \leqq 20, \quad \frac{\mathfrak{g}_3}{a^6} \leqq 28.$$

Durch Vergleichung der beiden für x bzw. $\frac{x}{a^2}$ gefundenen Ausdrücke ergibt sich dann die folgende (einer bekannten für $\wp(u;\, g_2, g_3)$ geltenden „Homogeneitäts-Relation" völlig analoge) Beziehung:

$$\mathfrak{p}(u;\, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3) = a^2 \mathfrak{p}\left(au;\ \frac{\mathfrak{g}_2}{a^4},\ \frac{\mathfrak{g}_3}{a^6}\right).$$

Versteht man unter a eine beliebig groß zu denkende *positive* Zahl, so besitzt die definierende Potenzreihe in u für die *rechte* Seite mindestens den Konvergenzradius $|u| = \frac{1}{a}$, wenn nur $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3$ den Bedingungen genügen:

$$|\mathfrak{g}_2| \leqq 20\, a^4, \quad |\mathfrak{g}_3| \leqq 28\, a^6.$$

Da aber die entsprechende Potenzreihe für die *linke* Seite mit jener *identisch* sein muß, so konvergiert sie unter derselben Bedingung gleichfalls für $|u| < \frac{1}{a}$. Und da es freisteht, durch beständige Vergrößerung von a jene oberen Schranken für $|\mathfrak{g}_2|$, $|\mathfrak{g}_3|$ beliebig zu erhöhen, so folgt:

Das definierende Funktions-Element (17) für $\mathfrak{p}(u;\, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3)$ *hat für jedes beliebig groß zu denkende Wertepaar* $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3$ *einen von Null verschiedenen Konvergenzradius* $\mathfrak{r}$.

Das nämliche gilt dann auch für die Potenzreihen (s. Gleichung (12), (13)), welche aus denjenigen für $\zeta(u)$, $\sigma(u)$ hervorgehen, wenn man die Koeffizienten c_λ, b_λ durch $\mathfrak{c}_\lambda$, $\mathfrak{b}_\lambda$ ersetzt (wo wiederum $\mathfrak{b}_\lambda$ aus b_λ durch Vertauschung von g_2, g_3 mit $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3$ entsteht). Hiernach definieren wir nach Analogie von $\mathfrak{p}(u;\, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3)$

zwei weitere analytysche Funktionen $\mathfrak{z}(u;\, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3)$, $\mathfrak{s}(u;\, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3)$ durch die für $|u| < \mathfrak{r}$ konvergierenden Funktions-Elemente:

$$\left.\begin{array}{ll}(18) & \mathfrak{z}(u;\, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3) = -u^{-1} - \sum_{2}^{\infty}\lambda \dfrac{1}{2\lambda-1}\, \mathfrak{c}_\lambda\, u^{2\lambda-1} \\ (19) & \mathfrak{s}(u;\, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3) = u + \sum_{2}^{\infty}\lambda\, \mathfrak{b}_\lambda\, u^{2\lambda+1}\end{array}\right\}\, |u| < \mathfrak{r}.$$

Auf Grund des formalen Zusammenhanges, welcher zwischen diesen Potenzreihen infolge ihrer Herleitung besteht, ergeben sich nach Analogie der Gleichungen (10), (2), (11) die folgenden Relationen (wobei wir zur Abkürzung der Bezeichnungen die ausdrückliche Erwähnung von $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ unterdrücken):

$$\left.\begin{array}{ll}(20) & \mathfrak{z}(u) = \dfrac{\mathfrak{s}'(u)}{\mathfrak{s}(u)} \\ (21) & \mathfrak{p}(u) = -\mathfrak{z}'(u) = \dfrac{\mathfrak{s}'(u)^2 - \mathfrak{s}(u)\,\mathfrak{s}''(u)}{\mathfrak{s}(u)^2}\end{array}\right\}\, |u| < \mathfrak{r}.$$

Wählt man für $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ ein Wertepaar, welches der Menge der zuvor mit g_2, g_3 bezeichneten angehört, so wird $\mathfrak{p}(u;\, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3)$ wegen Gemeinsamkeit des definierenden Funktions-Elements mit einem $\wp(u;\, g_2, g_3)$ *identisch.* Unser Ziel geht dahin, eine solche Identität bei beliebig gewählten $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ festzustellen. Hierzu ist zunächst erforderlich, die Gültigkeit gewisser für die Funktion $\wp(u;\, g_2, g_3)$ zumeist mit Benützung ihres Charakters als doppelperiodischen Funktion gewonnenen Grundformeln, in erster Linie des Additionstheorems, lediglich aus den bisher bekannten Eigenschaften des definierenden Funktions-Elements abzuleiten. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{z}(u)$, $\mathfrak{s}(u)$.

§ 2. Die Additionstheoreme für $\mathfrak{p}(u)$, $\mathfrak{z}(u)$ und die Formel $\mathfrak{p}(u)-\mathfrak{p}(v)=-\frac{\mathfrak{s}(u+v)\,\mathfrak{s}(u-v)}{\mathfrak{s}(u)^2\,\mathfrak{s}(v)^2}$. — $\mathfrak{s}(u)$ eine ganze, $\mathfrak{p}(u)$ eine gebrochene transcendente Funktion, welche in der ganzen Ebene der Differentialgleichung (I) genügt. — Die Frage der Periodizität von $\mathfrak{p}(u)$ und ihr Zusammenhang mit der Gleichung $\mathfrak{p}(u)=\mathfrak{e}_\lambda$.

1. Da ja das Additionstheorem von $\wp(u)$ als nachzubildendes Muster vorliegt[1]), so handelt es sich schließlich um eine bloße Verifikation der Formel:

$$\mathfrak{p}(u+v)+\mathfrak{p}(u)+\mathfrak{p}(v)=\frac{1}{4}\left(\frac{\mathfrak{p}'(u)-\mathfrak{p}'(v)}{\mathfrak{p}(u)-\mathfrak{p}(v)}\right)^2 \tag{22}$$

unter der Voraussetzung, das u, v, $u+v$ sämtlich dem Innern des Bereichs $(0)\mathfrak{r}$ angehören. Um aber für den in Aussicht genommenen Fall der Vergrößerung des Definitionsbereichs von $\mathfrak{p}(u)$ die Gültigkeit des abzuleitendes Additionstheorems von vornherein für diesen vergrößerten Bereich zu sichern, beweisen wir dasselbe gleich in der folgenden etwas erweiterten Fassung:

Ist $f(u)$ eine gerade, mit dem Pol $u=0$ behaftete Funktion, welche in einem zusammenhängenden, die Stelle $u=0$ im Innern enthaltenden Bereich $\mathfrak{B}$ bis auf etwaige Pole sich regulär verhält und für x eingesetzt der Differentialgleichung (I) genügt[2]), so gilt die Formel:

$$f(u+v)+f(u)+f(v)=\frac{1}{4}\left(\frac{f'(u)-f'(v)}{f(u)-f(v)}\right)^2, \tag{23}$$

solange u, v, $u+v$ dem Bereich $\mathfrak{B}$ angehören.

Beweis. Wir stellen zunächst fest, daß jeder *Pol* $u=u'$ (einschl. $u=0$) von der 2^{ten} Ordnung sein muß. Da $x=f(u)$ der Differentialgleichung (I) genügt, so findet man:

$$\lim_{u\to u'}\frac{f'(u)^2}{f(u)^3}=4, \text{ also } \textit{endlich} \text{ und } \neq 0.$$

Angenommen, es sei der Pol u' für $f(u)$ von der Ordnung m, so besitzt er für $f'(u)$ die Ordnungszahl $m+1$. Es wird also

---

[1]) Anderer, davon unabhängiger Beweis: W. 5, S. 24/6.

[2]) Man hat also: $f'(u)^2=4f(u)^3-\mathfrak{g}_2 f(u)-\mathfrak{g}_3$.

$f'(u)^2$ für $u \to u'$ unendlich von der Ordnung $2m+2$, $f(u)^3$ von der Ordnung 3m. Da aus der vorstehenden Grenzwertbestimmung folgt: $3m = 2m + 2$, so findet man, wie behauptet, $m = 2$.

Die zu beweisende Formel (23) läßt sich mit Hilfe der Substitution:

$$u + v = -s \quad (\text{also: } v = -(u+s))$$

in die Form setzen:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{f'(u)+f'(u+s)}{f(u)-f(u+s)}\right)^2 - f(u) - f(u+s) = f(s), \tag{24}$$

welche zeigt, daß die *linke Seite* von u *unabhängig* ist, ihre nach u genommene Derivierte also *identisch verschwinden* muß.

Um dieser letzteren eine zweckmäßige Form zu geben, setzen wir:

$$\left\{\begin{array}{llll} f(u)+f(u+s) = \varphi(u) & \text{also: } & f(u) & = \frac{1}{2}(\varphi(u)+\psi(u)) \\ f(u)-f(u+s) = \psi(u) & \quad ,, & f(u+s) & = \frac{1}{2}(\varphi(u)-\psi(u)) \end{array}\right. \tag{25}$$

sodaß also die *linke Seite von Gl. (24)* die einfachere Form annimmt:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi'(u)}{\psi(u)}\right)^2 - \varphi(u).$$

Man hat also zu bilden:

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi'(u)}{\psi(u)}\right)^2 - \varphi(u)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\varphi'(u)}{\psi(u)} \cdot \frac{\psi(u)\,\varphi''(u) - \varphi'(u)\,\psi'(u)}{\psi(u)^2} - \varphi'(u)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\varphi'(u)}{\psi(u)^3}\left(\psi(u)\,\varphi''(u) - \varphi'(u)\,\psi'(u) - 2\,\psi(u)^3\right). \tag{26}$$

Um das *erste* Glied in der Klammer umzuformen, hat man aus der ersten der Gleichungen (25):

$$\varphi''(u) = f''(u) + f''(u+s),$$

andererseits durch Differentation der Diff.-Gl. (I) (s. vorige Seite, Fußn. 2):

$$\begin{aligned}
2f'(u)f''(u) &= 12f(u)^2 f'(u) - g_2 f'(u)\\
f''(u) &= 6f(u)^2 - \tfrac{1}{2}g_2,\\
\text{ebenso: } f''(u+s) &= 6f(u+s)^2 - \tfrac{1}{2}g_2,
\end{aligned}$$

also durch Einsetzen in den Ausdruck für $\varphi''(u)$:

$$\begin{aligned}
\varphi''(u) &= 6(f(u)^2 + f(u+s)^2) - g_2\\
&= 3(\varphi(u)^2 + \psi(u)^2) - g_2
\end{aligned}$$

(s. die zweite Kolonne der Gleichungen (25)).

Hiernach für das *erste* Glied der Klammer in (26):

$$\psi(u)\,\varphi''(u) = 3\,\varphi(u)^2\,\psi(u) + 3\,\psi(u)^3 - g_2\,\psi(u).$$

Für das *zweite* Klammerglied von (26) findet man durch Differentiation und darauf folgende Multiplikation der Gleichungen (26), erste Kolonne:

$$\varphi'(u)\,\psi'(u) = f'(u)^2 - f'(u+s)^2,$$

also mit Benützung der Diff.-Gl. (I) und der Gleichungen (25), zweite Kolonne:

$$\begin{aligned}
\varphi'(u)\,\psi'(u) &= 4(f(u)^3 - f(u+s))^3 - g_2\,(f(u) - f(u+s))\\
&= \tfrac{1}{2}\{(\varphi(u) + \psi(u))^3 - (\varphi(u) - \psi(u))^3\} - g_2\,\psi(u)\\
&= 3\,\varphi(u)^2\,\psi(u) + \psi(u)^3 - g_2\,\psi(u).
\end{aligned}$$

Setzt man die vorstehenden Ausdrücke für die beiden ersten Klammerglieder der rechten Seite von Gl. (26), so hebt sich alles weg und man findet, wie zu beweisen war:

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi'(u)}{\psi(u)}\right)^2 - \varphi(u)\right) = 0.$$

Hieraus folgt, daß der in der Klammer stehende Ausdruck, d. h. nach seiner Provenienz *die linke Seite von Gl. (24)* von u unabhängig, allenfalls noch von s abhängig. etwa:

$$(27)\qquad \frac{1}{4}\left(\frac{f'(u) + f'(u+s)}{f(u) - f(u+s)}\right)^2 - f(u) - f(u+s) = C_s.$$

Um C_s zu bestimmen, machen wir den Grenzübergang $u \to 0$. Alsdann ergibt sich:

$$C_s = \lim_{u \to 0} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{f'(u) + f'(u+s)}{f(u) - f(u+s)} \right)^2 - f(u) \right\} - f(s)$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{u \to 0} \frac{(f'(u) + f'(u+s))^2 - 4 f(u)(f(u) - f(u+s))}{(f(u) - f(u+s))^2} - f(s).$$

Löst man die beiden Quadrate im Zähler auf und ersetzt $f'(u)^2$ durch die rechte Seite der Diff.-Gl. (I) (für $x = f(u)$, s. S. 144, Fußn. 2), so heben sich die Glieder $4f(u)^3$ weg und das einzige Glied, welches den Faktor $f(u)^2$ enthält, lautet: $8f(u)^2 f(u+s)$. Dividiert man Zähler und Nenner durch $f(u)^2$, so reduziert sich der Ausdruck unter dem Limeszeichen für $u \to 0$ auf $\frac{8f(s)}{1}$, sodaß sich ergibt:

$$C_s = f(s).$$

Durch Einsetzen dieses Ergebnisses in Gl. (27) nimmt diese genau die Form der zu beweisenden Gl. (24) an und geht durch Rücksubstitution von $s = -(u+v)$ und angemessene Umordnung in die Formel (23) über. —

Damit ist insbesondere die Gültigkeit des Additionstheorems (22) für $\wp(u)$ im Bereich $|u| < \mathfrak{r}$ bewiesen.

2. Ersetzt man in der Formel:

$$\wp(u+v) + \wp(u) + \wp(v) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right)^2$$

v durch $-v$, so wird:

$$\wp(u-v) + \wp(u) + \wp(v) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(u) + \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right)^2$$

und, wenn man die erste Gleichung von der zweiten subtrahiert:

$$(28) \qquad -\wp(u+v) + \wp(u-v) = \frac{\wp'(u)\,\wp'(v)}{(\wp(u) - \wp(v))^2},$$

anders geschrieben (wenn v als veränderlich, u als fest angesehen wird):

$$D_v\, \zeta(u+v) + D_v\, \zeta(u-v) = D_v \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(v)}.$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$\zeta(u+v) + \zeta(u-v) = \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(v)} + C_u,$$

wo C_u nur noch von u abhängen kann. Zur Bestimmung von C_u ergibt sich durch die Wahl $v \to 0$:

$$2\,\mathfrak{z}(u) = C_u,$$

sodaß also:

$$\mathfrak{z}(u+v) + \mathfrak{z}(u-v) - 2\,\mathfrak{z}(u) = \frac{\mathfrak{p}'(u)}{\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(v)}.$$

Durch Vertauschung von u und v und Addition der resultierenden Gleichung zu der vorhergehenden würde sich das Additionstheorem von $\mathfrak{z}(u)$ genau konform demjenigen von $\zeta(u)$ ergeben, kommt aber in dem vorliegenden Zusammenhange nicht weiter in Betracht. Für uns genügt die Beziehung (28), welche wir zunächst in die folgende Form setzen:

$$\frac{\mathfrak{p}'(u)}{\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(v)} = \frac{\mathfrak{s}'(u+v)}{\mathfrak{s}(u+v)} + \frac{\mathfrak{s}'(u-v)}{\mathfrak{s}(u-v)} - 2\,\frac{\mathfrak{s}'(u)}{\mathfrak{s}(u)}$$

und sodann, indem wir jetzt u als veränderlich, v als fest ansehen:

$$\frac{D_u\,(\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(v))}{\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(v)} = \frac{D_u\,(\mathfrak{s}(u+v)\,\mathfrak{s}(u-v)\,\mathfrak{s}(u)^{-2})}{\mathfrak{s}(u+v)\,\mathfrak{s}(u-v)\,\mathfrak{s}(u)}.$$

Hieraus durch Integration:

$$\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(v) = C_v\,\mathfrak{s}(u+v)\,\mathfrak{s}(u-v)\,\mathfrak{s}(u)^{-2},$$

wo C_v nur von v abhängt. Um C_v zu bestimmen, multiplizieren wir die Gleichung mit u^2 und machen den Grenzübergang $u \to 0$. Alsdann wird (wegen: $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{u}{\mathfrak{s}(u)} = 1$):

$$1 = C_v \cdot \mathfrak{s}(v)\,\mathfrak{s}(-v), \quad \text{also:} \quad C_v = -\frac{1}{\mathfrak{s}(v)^2},$$

sodaß durch Einsetzen in die vorhergehende Gleichung die (wiederum für $p(u)$ ihr vollkommenes Analogon besitzende) Formel sich ergibt[1]):

$$\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(v) = -\frac{\mathfrak{s}(u+v)\,\mathfrak{s}(u-v)}{\mathfrak{s}(u)^2\,\mathfrak{s}(v)^2}. \tag{29}$$

3. Durch die Substitution $v = u + h$ und Multiplikation mit $-\dfrac{1}{h}$ geht die letzte Gleichung in die folgende über:

---

[1]) Vgl. W. 5, S. 37, Gl. (14).

$$\mathfrak{p}(u+h)-\mathfrak{p}(u)=\frac{\mathfrak{S}(2u+h)}{\mathfrak{S}(u)^2\,\mathfrak{S}(u+h)^2}\cdot\frac{\mathfrak{S}(-h)}{h},$$

also für $h\to 0$:

$$\mathfrak{p}'(u)=-\frac{\mathfrak{S}(2u)}{\mathfrak{S}(u)^4}. \tag{30}$$

Nun war (s. Gl. (21)):

$$\mathfrak{p}(u)=\frac{\mathfrak{S}'(u)^2-\mathfrak{S}(u)\,\mathfrak{S}''(u)}{\mathfrak{S}(u)^2},$$

woraus durch Differentiation sich ergibt:

$$\mathfrak{p}'(u)=\frac{1}{\mathfrak{S}(u)^3}\left(3\,\mathfrak{S}(u)\,\mathfrak{S}'(u)\,\mathfrak{S}''(u)-\mathfrak{S}(u)^2\,\mathfrak{S}'''(u)-2\,\mathfrak{S}'(u)^3\right)$$

und sodann durch Vergleichung mit Gl. (30):

$$\mathfrak{S}(2u)=\mathfrak{S}(u)\left(2\,\mathfrak{S}'(u)^3-3\,\mathfrak{S}(u)\,\mathfrak{S}'(u)\,\mathfrak{S}''(u)+\mathfrak{S}(u)^2\,\mathfrak{S}'''(u)\right).$$

Ersetzt man schließlich u durch $\frac{u}{2}$, so folgt:

$$\mathfrak{S}(u)=\mathfrak{S}\left(\frac{u}{2}\right)\left(2\,\mathfrak{S}'\left(\frac{u}{2}\right)-3\,\mathfrak{S}\left(\frac{u}{2}\right)\mathfrak{S}'\left(\frac{u}{2}\right)\mathfrak{S}''\left(\frac{u}{2}\right)+\mathfrak{S}\left(\frac{u}{2}\right)^2\mathfrak{S}'''\left(\frac{u}{2}\right)\right). \tag{31}$$ [1]

Diese zunächst unter der Voraussetzung $|u|<\mathfrak{r}$ abgeleitete Beziehung stellt nach Einsetzen der für die einzelnen Bestandteile geltenden $\mathfrak{P}(u)$-Entwicklungen und Umformung der rechten Seite in eine einzige Potenzreihe zunächst für den Bereich $|u|<\mathfrak{r}$ eine *Identität* zwischen zwei Potenzreihen vor. Da aber die Reihe auf der *rechten* Seite für $\left|\frac{u}{2}\right|<\mathfrak{r}$, also $|u|<2\,\mathfrak{r}$ konvergiert, so erstreckt sich diese Eigenschaft auch auf die *linke*, sodaß also der ursprüngliche Konvergenz- und Definitionsbereich nunmehr *verdoppelt* esscheint. Und da dieser Verdoppelungsprozeß mit Hilfe der Gleichung (31) unbegrenzt fortsetzbar ist, so folgt schließlich, daß die ursprünglich nur als definierendes Funktionselement für den Bereich $|u|<\mathfrak{r}$ hergestellte Potenzreihe (19) (S. 143) *beständig* konvergiert und somit $\mathfrak{S}(u)$ sich als *ganze transcendente* Funktion erweist.

4. Daraus ergibt sich weiter, daß der letzte Ausdruck auf der rechten Seite von Gl. (21) einen Quotienten von zwei ganzen

[1]) Vgl. W. 5, S. 34, Gl. (10).

transcendenten Funktionen darstellt und daß somit $\mathfrak{p}(u)$ als *gebrochene transcendente* Funktion erscheint. Da diese letztere zunächst für $|u| < \mathfrak{r}$ der Differentialgleichung (I) (mit $x = \infty$ für $u = 0$) genügt, so bleibt diese Eigenschaft nunmehr für die ganze Ebene erhalten[1]) und das gleiche resultiert auch aus der Fassung des Satzes von Nr. 1 dieses Paragraphen bezüglich der Gültigkeit des Additionstheorems Gl. (22) (und der daraus gezogenen Folgerungen Gl. (28) (29)). Hiernach läßt sich das Hauptergebnis der bisherigen Untersuchung in folgender Weise zusammenfassen:

Die Differentialgleichung (I): $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - \mathfrak{g}_2 x - \mathfrak{g}_3$ *(mit der Anfangsbedingung $x = \infty$ für $u = 0$) hat bei willkürlich vorgeschriebenen, nur an die Bedingung $\mathfrak{g}_2^3 - 27\mathfrak{g}_3^2 \neq 0$ gebundenen $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3$ die in jedem endlichen Bereiche eindeutige und bis auf den (zweifachen) Pol $u = 0$, sowie etwaige sonstige Pole reguläre Lösung:*

$$x = \mathfrak{p}(u; \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3) = \frac{\mathfrak{s}'(u)^2 - \mathfrak{s}(u)\,\mathfrak{s}''(u)}{\mathfrak{s}(u)^2},$$

wo $\mathfrak{s}(u)$ durch die als beständig konvergent erkannte Reihe Gl. (19) S. (143) definiert ist.

4. Um die in Aussicht genommene Identität von $\mathfrak{p}(u; \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3)$ mit irgend einem $p(u|\omega, \omega')$ feststellen zu können, bleibt schließlich noch die *doppelte Periodizität* von $\mathfrak{p}(u)$ zu erweisen. Diese Aufgabe läßt sich auf die Beantwortung der Frage zurückführen: Nimmt $\mathfrak{p}(u)$ für irgend einen Wert $\mathfrak{v}_\lambda$ den Wert $\mathfrak{e}_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, 3)$ an? Angenommen nämlich, man hätte:

---

[1]) Will man von dem hier angewendeten Gesetz der Permanenz von Funktionalgleichungen bei analytischer Fortsetzung keinen Gebrauch machen, so erkennt man die Richtigkeit der betreffenden Behauptung folgendermaßen. Man hat:

$$\mathfrak{p}(u) = \frac{\mathfrak{P}_1(u)}{\mathfrak{P}_2(u)},$$

wo $\mathfrak{P}_1(u)$, $\mathfrak{P}_2(u)$ *beständig* konvergieren. Durch Einsetzen in die Diff.-Gl. (I) und Multiplikation mit $\mathfrak{P}_2(u)^4$ ergibt sich eine zunächst für $|u| < \mathfrak{r}$ geltende *Gleichheit* beständig konvergenter Potenzreihen, also schließlich eine *Identität*, die auch nach Division mit $\mathfrak{P}_2(u)^3$ erhalten bleibt.

$$\wp(\mathfrak{v}_\lambda) = e_\lambda \quad (\text{für irgend ein } \lambda = 1, 2, 3),$$

so würde (wegen: $\wp'(u)^2 = 4 \prod_{\lambda=1,2,3} (\wp(u) - e_\lambda)$) daraus folgen:

$$\wp'(\mathfrak{v}_\lambda) = 0.$$

Durch Benützung von Gl. (28) findet man sodann:

$$\wp(u + \mathfrak{v}_\lambda) - \wp(u - \mathfrak{v}_\lambda) = - \frac{\wp'(u)\,\wp'(\mathfrak{v}_\lambda)}{(\wp(u) - \wp(\mathfrak{v}_\lambda))^2} = 0,$$

folglich, wenn man u durch $u + \mathfrak{v}_\lambda$ ersetzt:

$$\wp(u + 2\mathfrak{v}_\lambda) = \wp(u),$$

d. h. das Doppelte jeder Wurzel einer Gleichung von der Form:

$$\wp(u) = e_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, 3)$$

ist eine *Periode* von $\wp(u)$.

Wir wollen die Frage, ob $\wp(u)$ einen der Werte e_λ wirklich annimmt, schon mit Rücksicht auf die im Titel dieser Arbeit angedeutete Behandlung der *Umkehrung* von $\wp(u)$ im folgenden Paragraphen gleich etwas allgemeiner fassen, nämlich: Existiert zu jedem beliebigen Werte x mindestens ein Wert u, für welchen $\wp(u) = x$ wird? Ist also die Gleichung: $\wp(u) = x$ *umkehrbar?*

---

§ 3. Umkehrung durch Reihenentwicklung der Gleichung $x = \wp(u)$ für jedes x insbesondere auch für $x = e_\lambda$.[1])

1. Bringt man die Differentialgleichung (I) auf die Form:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}} \tag{32}$$

(das Quadratwurzelzeichen ein für allemal zweiwertig verstanden)

mit der Anfangsbedingung $u = 0$ für $x = \infty$, so ist damit die Derivierte von u (als Funktion von x) in Gestalt einer *zweiwertigen*, in der ganzen Ebene bis auf die Verzweigungspunkte e_1, e_2, e_3 und ∞ *regulären* Funktion gegeben, und daher u mit Hinzunahme der Bedingung $u = 0$ für $x = \infty$ in seinem ganzen Verlaufe als Funktion von x vollständig festgelegt. Aus der Form

[1]) Vgl. W. 5, S. 51—56.

jener Anfangsbedingung ergibt sich sofort die Notwendigkeit, als *definierendes* Anfangselement für u, also auch für $\frac{du}{dx}$ eine Entwicklung nach *negativen* Potenzen von x zu wählen. Schreibt man Gl. (32) jetzt folgendermaßen:

$$\frac{du}{dx} = \pm \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} (1 - \mathfrak{e}_1 x^{-1})^{-\frac{1}{2}} (1 - \mathfrak{e}_2 x^{-1})^{-\frac{1}{2}} (1 - \mathfrak{e}_3 x^{-1})^{-\frac{1}{2}},$$

wo die gebrochenen Potenzen durchweg als Hauptwerte, also *eindeutig* zu verstehen sind, und bedeutet $\bar{\mathfrak{e}}$ das *Maximum* von $\mathfrak{e}_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, 3$), so ergibt sich für $|x| > \bar{\mathfrak{e}}$ (also: $|\mathfrak{e}_\lambda x^{-1}| < 1$) durch Anwendung der binomischen Reihenentwicklung auf die Faktoren $(1 - \mathfrak{e}_\lambda x^{-1})^{-\frac{1}{2}}$ und Ausführung der Multiplikation eine Entwicklung von der Form:

$$\frac{du}{dx} = \pm \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} + \mathfrak{G}_1 x^{-\frac{5}{2}} + \mathfrak{G}_2 x^{-\frac{7}{2}} + \cdots \right),$$

wo $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots\cdot$ ganze symmetrische Funktionen von $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$, also schließlich ganze Funktionen von $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3$ sind. Durch Integration (bei welcher die Integrationskonstante, wegen $u = 0$ für $x = \infty$, verschwindet) folgt dann weiter:

$$(A) \quad u = \mp x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{3} \mathfrak{G}_1 x^{-1} + \frac{1}{5} \mathfrak{G}_2 x^{-2} + \cdots\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathfrak{P}_0(x^{-1}).$$

Durch diese Formel werden für jedes dem Bereiche außerhalb des Kreises $|x| = \bar{\mathfrak{e}}$ angehörige x *zwei* nur durch das Vorzeichen verschiedene[1]) Werte u festgelegt, für welche $\wp(u) = x$.

2. Um das Funktionselement (A) auf den Kreis $|x| = \bar{\mathfrak{e}}$ und sein Inneres fortzusetzen, erweist es sich als zweckmäßig (statt etwa den Faktor $\frac{1}{\sqrt{x}}$ beizubehalten und die Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x^{-1})$ in der üblichen Weise in eine $\mathfrak{P}(x - x_0)$ zu transformieren) auf die Differentialgleichung (32) zurückgehend eine neue Entwicklung nach positiven ganzen Potenzen von $x - x_0$ herzustellen, da bei diesem Verfahren der Konvergenz- und Geltungsbereich der betreffenden Entwicklung unmittelbar kenntlich wird.

[1]) Entsprechend der Beziehung: $\wp(-u) = \wp(u)$.

Es sei also x_0 ein Wert von x, zu dem bereits ein „zugehöriger", d. h. der Beziehung $\wp(u_0) = x_0$ genügender Wert u_0 als *bekannt* anzusehen ist (was insbesondere vermöge der Formel (A) der Fall wäre, wenn x_0 dem Bereiche $|x| > \bar{e}$ angehört) so setzen wir:

$$\begin{aligned} 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) &= 4\,\Pi(x - e_\lambda) \quad (\lambda = 1, 2, 3) \\ &= 4\,\Pi(x_0 - e_\lambda) \cdot \Pi \frac{x - x_0 + (x_0 - e_\lambda)}{(x_0 - e_\lambda)} \\ &= \wp'(u_0)^2\, \Pi\left(1 - \frac{x - x_0}{e_\lambda - x_0}\right) \end{aligned}$$

und daher nach Gl. (32):

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\wp'(u_0)}\, \Pi\left(1 - \frac{x - x_0}{e_\lambda - x_0}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

(NB. Das Vorzeichen bei dem hierbei benützten Übergange zur Quadratwurzel des vorhergehenden Ausdrucks ist durch die Beziehung $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x = x_0} = \frac{1}{\wp'(u_0)}$ eindeutig bestimmt).

Bezeichnet man mit ϱ_0 den *kleinsten* der Beträge $|e_\lambda - x_0|$ (also den Minimalabstand der Punkte e_λ von x_0), so wird $\left|\frac{x - x_0}{e_\lambda - x_0}\right| < 1$, wenn $|x - x_0| < \varrho_0$ und man gewinnt daher durch Einführung der binomischen Reihe in die drei Faktoren des obigen Produkts und Ausführung der Multiplikation eine Entwicklung von folgender Form:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\wp'(u_0)}\left(1 + \mathfrak{F}_1(x_0)(x - x_0) + \mathfrak{F}_2(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots\right),$$

wo die Koeffizienten $\mathfrak{F}_1(x_0)$, $\mathfrak{F}_2(x_0)$, ... rationale symmetrische Funktionen von e_1, e_2, e_3 und zugleich rationale Funktionen von x_0, also schließlich rationale Funktionen von g_2, g_3, x_0 sind. Durch Integration, mit Berücksichtigung der Beziehung $u = u_0$ für $x = x_0$, ergibt sich sodann:

$$(B) \quad u = u_0 + \frac{1}{\wp'(u_0)}\left((x - x_0) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{F}_1(x_0)(x - x_0)^2 + \tfrac{1}{3}\mathfrak{F}_2(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots\right),$$

gültig für $|x - x_0| < \varrho_0$.[1])

[1]) Hätte man dem x_0 statt u_0 den Wert $-u_0$ zugeordnet, so würde, wegen $\wp'(-u_0) = -\wp'(u_0)$ statt u der Wert $-u$ zum Vorschein kommen.

Wird jetzt, um der Einfachheit der Ausdrucksweise zuliebe eine an sich gleichgültige Festsetzung zu treffen, etwa angenommen, daß $\mathfrak{e}_1$ auf dem Kreise $|x| = \bar{\mathfrak{e}}$ liegt, also $\bar{\mathfrak{e}} = |\mathfrak{e}_1|$ zu setzen ist, und wählte man zunächst x_0 im Bereiche $|x| > |\mathfrak{e}_1|$, aber nicht gerade auf dem Halbstrahl, welcher die Verlängerung des Radius $\overline{0\mathfrak{e}_1}$ bildet, sondern möglichst seitlich davon, doch nur so weit, daß keiner der Punkte $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ näher an x_0 liegt, als $\mathfrak{e}_1$, und daß daher $\varrho_0 = |\mathfrak{e}_1 - x_0|$ wird, so verläuft ein gewisser Bogen s des Konvergenzkreises $(x_0)\varrho_0$ der Reihe (B) *im Innern* des Kreises $(0)\mathfrak{e}_1$ und schneidet aus dessen Fläche einen Zwickel aus, der keinen der Punkte $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ im Innern enthält und für dessen Punkte x, abgesehen von den auf der Begrenzung s liegenden, die Formel (B) je einen zugehörigen Wert u liefert. Ein beliebiger, etwa mit x' zu bezeichnender und vermittelst der Formel (B) mit zugehörigem u' versehener dieser Punkte kann dann in der Formel (B) mit seinem u' zusammen die Rolle des dort mit x_0, u_0 bezeichneten Wertepaares übernehmen und liefert eine nach Art der Formel (B) gebildete neue Entwicklung nach positiven ganzen Potenzen von $x - x'$, deren Geltungsbereich bei geeigneter Wahl von x' über den Bogen s hinaus sich weiter in das Innere des Kreises $(0)\mathfrak{e}_1$ erstrecken wird. In dieser Weise weiter fortfahrend kann man durch eine endliche Anzahl solcher Schritte jeden von den $\mathfrak{e}_\lambda$ verschiedenen Punkt x mit einer Entwicklung von der Form (B) *umfassen*, jeden der Punkte $\mathfrak{e}_\lambda$ als Grenzpunkt *erreichen*.

3. Es bleibt schließlich noch zu zeigen, daß auch für die Stellen $x = \mathfrak{e}_\lambda$ solche $u = \mathfrak{v}_\lambda$ existieren, für welche $\wp(\mathfrak{v}_\lambda) = \mathfrak{e}_\lambda$ wird. Um das entsprechende Ergebnis gleich so zu gestalten, daß es unmittelbar für jede einzelne der drei Stellen brauchbar erscheint, wollen wir mit λ, μ, ν jede beliebige Kombination der drei Zahlen 1, 2, 3 verstehen, setzen demgemäß die Differentialgleichung (I) S. 141 in die Form:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4\,(x - \mathfrak{e}_\lambda)\,(x - \mathfrak{e}_\mu)\,(x - \mathfrak{e}_\nu),$$

gehen ferner darauf aus, für $\dfrac{dx}{du}$ eine Entwicklung nach (gebrochenen) Potenzen von $x - \mathfrak{e}_\lambda$ herzustellen und setzen daher:

$$(x-\mathfrak{e}_\lambda)(x-\mathfrak{e}_\mu)(x-\mathfrak{e}_\nu)=(x-\mathfrak{e}_\lambda)(x-\mathfrak{e}_\lambda-(\mathfrak{e}_\mu-\mathfrak{e}_\lambda))(x-\mathfrak{e}_\lambda-(\mathfrak{e}_\nu-\mathfrak{e}_\lambda))$$
$$=\mathfrak{E}_\lambda(x-\mathfrak{e}_\lambda)\left(1-\frac{x-\mathfrak{e}_\lambda}{\mathfrak{e}_\mu-\mathfrak{e}_\lambda}\right)\left(1-\frac{x-\mathfrak{e}_\lambda}{\mathfrak{e}_\nu-\mathfrak{e}_\lambda}\right),$$

wo:

$$(33) \qquad \mathfrak{E}_\lambda=(\mathfrak{e}_\mu-\mathfrak{e}_\lambda)(\mathfrak{e}_\nu-\mathfrak{e}_\lambda).$$

Alsdann wird:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{\mathfrak{E}_\lambda}}(x-\mathfrak{e}_\lambda)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x-\mathfrak{e}_\lambda}{\mathfrak{e}_\mu-\mathfrak{e}_\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x-\mathfrak{e}_\lambda}{\mathfrak{e}_\nu-\mathfrak{e}_\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

wo die Konstante $\sqrt{\mathfrak{E}_\lambda}$ *vorläufig* noch als zweiwertig anzusehen ist.

Ist dann ϱ_λ die kleinere der beiden Zahlen $|\mathfrak{e}_\mu-\mathfrak{e}_\lambda|$, $|\mathfrak{e}_\nu-\mathfrak{e}_\lambda|$ (im Falle der *Gleichheit* jede von beiden), so findet man analog wie in den vorhergehenden Fällen:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{\mathfrak{E}_\lambda}}(x-\mathfrak{e}_\lambda)^{-\frac{1}{2}}(1+\mathfrak{H}_1(\mathfrak{e}_\lambda)(x-\mathfrak{e}_\lambda)+\mathfrak{H}_2(\mathfrak{e}_\lambda)(x-\mathfrak{e}_\lambda)^2+\cdots)$$

$$(34)=\frac{1}{2\sqrt{\mathfrak{E}_\lambda}}(x-\mathfrak{e}_\lambda)^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{P}_\lambda(x-\mathfrak{e}_\lambda).$$

Dabei erscheinen die Koeffizienten $\mathfrak{H}_1(\mathfrak{e}_\lambda)$, $\mathfrak{H}_2(\mathfrak{e}_\lambda)$, ... zunächst als rationale Funktionen von $\mathfrak{e}_\lambda$, $\mathfrak{e}_\mu$, $\mathfrak{e}_\nu$ und zwar symmetrisch in Bezug auf $\mathfrak{e}_\mu$, $\mathfrak{e}_\nu$, also rational darstellbar durch $\mathfrak{e}_\lambda$ und die Koeffizienten der *ganzen* Funktion $\dfrac{4x^3-\mathfrak{g}_2x-\mathfrak{g}_3}{x-\mathfrak{e}_\lambda}$, welche durch Subtraktion von $4\mathfrak{e}_\lambda^3-\mathfrak{g}_2\mathfrak{e}_\lambda-\mathfrak{g}_3=0$ im Zähler sich auf die Form bringen läßt:

$$4(x^2+\mathfrak{e}_\lambda x+\mathfrak{e}_\lambda^2)-\mathfrak{g}_2,$$

sodaß die Koeffizienten $\mathfrak{H}(\mathfrak{e}_\lambda)$ schließlich zu rationalen Funktionen von $\mathfrak{e}_\lambda$ und $\mathfrak{g}_2$ werden[1]). — Durch Integration von Gl. (34) ergibt sich sodann:

$$(C)\quad\begin{cases} u=\mathfrak{v}_\lambda+\dfrac{1}{\sqrt{\mathfrak{E}_\lambda}}(x-\mathfrak{e}_\lambda)^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{3}\mathfrak{H}_1(\mathfrak{e}_\lambda)(x-\mathfrak{e}_\lambda)+\frac{1}{5}\mathfrak{H}_2(\mathfrak{e}_\lambda)(x-\mathfrak{e}_\lambda)^2+\cdots) \\ \quad=\mathfrak{v}_\lambda+\dfrac{1}{\sqrt{\mathfrak{E}_\lambda}}(x-\mathfrak{e}_\lambda)^{\frac{1}{2}}\overline{\mathfrak{P}_\lambda(x-\mathfrak{e}_\lambda)}, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{v}_\lambda$ eine noch zu bestimmende Konstante.

---

[1]) Bei W. 5, S. 54, Zeile 6 steht (mit Anwendung der *hier* gebrauchten Bezeichnungen): $\mathfrak{e}_\lambda$, $\mathfrak{g}_2$ und $\mathfrak{g}_3$.

Nun sei x_λ irgend eine Stelle im Innern des Kreises $(\mathfrak{e}_\lambda)\varrho_\lambda$ als des Geltungsbereichs der Formel (C). Auf Grund der am Schlusse der vorigen Nummer gemachten Bemerkung dürfen wir annehmen, daß durch passende Anwendung der Formel (B) ein zugehöriges u_λ bestimmt worden sei. Durch Einsetzen des Wertepaares x_λ, u_λ in Gl. (C) und Isolierung von $\mathfrak{v}_\lambda$ findet man also:

$$(C_1) \qquad \mathfrak{v}_\lambda = u_\lambda - \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{E}_\lambda}} \overline{(x_\lambda - \mathfrak{e}_\lambda)^{\frac{1}{2}} \mathfrak{P}_\lambda(x_\lambda - \mathfrak{e}_\lambda)}.$$

Hier erscheint aber die bisher zweiwertige Quadratwurzel aus $\mathfrak{E}_\lambda$ infolge der Festlegung: $u = u_\lambda$ für $x = x_\lambda$ eindeutig bestimmt. Geht man nämlich auf die der Formel (C) zu Grunde liegende Differentialgleichung (34) zurück, schreibt $\frac{1}{\wp'(u)}$ statt $\frac{du}{dx}$ und setzt $x = x_\lambda$, also $u = u_\lambda$, so wird:

$$\frac{1}{\wp'(u_\lambda)} = \frac{1}{2\sqrt{\mathfrak{E}_\lambda}} (x_\lambda - \mathfrak{e}_\lambda)^{\frac{1}{2}} \mathfrak{P}_\lambda(x_\lambda - \mathfrak{e}_\lambda),$$

also durch Multiplikation mit $\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{E}_\lambda}} (x_\lambda - \mathfrak{e}_\lambda)^{\frac{1}{2}} \wp'(u_\lambda)$:

$$\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{E}_\lambda}} (x_\lambda - \mathfrak{e}_\lambda)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\mathfrak{E}_\lambda} \wp'(u_\lambda) \mathfrak{P}_\lambda(x_\lambda - \mathfrak{e}_\lambda).$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks (in welchem das Vorzeichen von $\sqrt{\mathfrak{E}_\lambda}$ durch die rechte Seite vollständig bestimmt ist) in Gl. (C_1) ergibt sich für $\mathfrak{v}_\lambda$ die *eindeutige* Darstellung:

$$(C_2) \qquad \mathfrak{v}_\lambda = u_\lambda - \frac{1}{2\mathfrak{E}_\lambda} \wp'(u_\lambda) \overline{\mathfrak{P}_\lambda(x_\lambda - \mathfrak{e}_\lambda) \mathfrak{P}_\lambda(x_\lambda - \mathfrak{e}_\lambda)}.$$

Da aus Gl. (C), welche ja durch Integration aus Gl. (34) hervorgegangen ist, folgt: $\wp(u) = x$, andererseits die Beziehung besteht: $u = \mathfrak{v}_\lambda$ für $x = \mathfrak{e}_\lambda$, so findet man schließlich:

$$\wp(\mathfrak{v}_\lambda) = \mathfrak{e}_\lambda$$

also:

$$\wp'(\mathfrak{v}_\lambda) = 0.$$

§ 4. **Die doppelte Periodizität von $\mathfrak{p}(u; \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3)$[1]. — Die Minimalperioden als Minimalwurzeln der Gleichungen $\mathfrak{p}(u; \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3) = \mathfrak{e}_\lambda$. — Die Identität von $\mathfrak{p}(u; \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3)$ mit $\wp(u \mid \omega, \omega')$. — Die Wurzeln der Gleichungen: $60 \sum_{\mu\nu}' \omega_{\mu\nu}^{-4} = \mathfrak{g}_2$,**

$$140 \sum_{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}^{-6} = \mathfrak{g}_3.$$

1. Aus dem Endresultat des vorigen Paragraphen mit Berücksichtigung desjenigen von § 2 geht hervor, daß $\mathfrak{p}(u)$ die *drei* Perioden $2\mathfrak{v}_\lambda\ (\lambda = 1, 2, 3)$ besitzt. Um zu erkennen, daß die Quotienten $\frac{\mathfrak{v}_\lambda}{\mathfrak{v}_\mu}$ *nicht reell* sein können, genügt es nachzuweisen, daß keiner von ihnen *rational* sein kann. Denn die Existenz zweier Perioden mit *irrationalem* Quotienten würde von vornherein der Tatsache widersprechen, daß $\mathfrak{p}(u)$ bereits als eine eindeutige nicht konstante Funktion erkannt ist.

Wäre nun irgend ein $\frac{\mathfrak{v}_\lambda}{\mathfrak{v}_\mu}$ *rational*, so müßten sich $\mathfrak{v}_\lambda$, $\mathfrak{v}_\mu$ als ganze Vielfache einer anderen *Halbperiode* $\mathfrak{v}'$ darstellen lassen, etwa:

$$\mathfrak{v}_\lambda = l\,\mathfrak{v}', \quad \mathfrak{v}_\mu = m\,\mathfrak{v}' \quad (\text{wo } l, m \text{ ganze Zahlen}).$$

Wäre sodann *mindestens eine* der Zahlen l, m *gerade*, z. B. $m = 2m'$, so wäre $\mathfrak{v}_\mu$ als ganzes Multiplum der präsumtiven Periode $2\mathfrak{v}'$ selbst eine Periode, also:

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{v}_\mu) = \mathfrak{p}(0) = \infty,$$

im Widerspruch mit der Voraussetzung: $\mathfrak{p}(\mathfrak{v}_\mu) = \mathfrak{e}_\mu$.

Wären dagegen *beide* Zahlen l, m *ungerade*, etwa: $l = 2l' + 1$, $m = 2m' + 1$, so hätte man:

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{v}_\lambda) = \mathfrak{p}(\mathfrak{v}'), \quad \mathfrak{p}(\mathfrak{v}_\mu) = \mathfrak{p}(\mathfrak{v}'),$$

was der Voraussetzung $\mathfrak{e}_\lambda \neq \mathfrak{e}_\mu$ widersprechen würde.

Da hiernach $\mathfrak{p}(u)$ die *drei* Perioden $\mathfrak{v}_\lambda\ (\lambda = 1, 2, 3)$ mit paarweise *nicht reellem* Quotienten besitzt und da, wie gesagt, der Funktionscharakter von $\mathfrak{p}(u)$ ausreichend feststeht, so ist $\mathfrak{p}(u)$ *genau doppelperiodisch*.

2. Da ferner von den unendlich vielen, aus den $\mathfrak{v}_\lambda\ (\lambda = 1, 2, 3)$ zusammensetzbaren oder sonst etwa noch vorhandenen Perioden in jedem endlichen Bereiche, insbesondere in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes nur eine endliche Anzahl von Perioden

[1] Vgl. W. 5, S. 57 ff.

liegen kann, so muß es (abgesehen von dem doppelten Vorzeichen) mindestens *eine* mit *kleinstem Absolutwert* geben, die wir mit 2ω bezeichnen wollen. Ist dann $2\omega'$ diejenige Periode vom *kleinsten Absolutwert,* welche nach Ausschaltung aller ganzzahligen $\mu \cdot 2\omega$ übrig bleibt, also $|\omega'| \geqq |\omega|$, so bezeichnen wir 2ω, $2\omega'$ als *Minimalperioden.* Dabei mag das Vorzeichen von ω *beliebig,* sodann dasjenige von ω' *so* gewählt werden, daß:

$$|\omega + \omega'| \leqq |\omega - \omega'|.$$

Setzt man alsdann:

$$\omega + \omega' = \omega'',$$

so ist auch $2\omega''$ eine Periode und zwar eine solche mit *kleinstem Absolutwert* nächst $|2\omega'|$[1]). Dabei sind 2ω, $2\omega'$, $2\omega''$ paarweise *primitive* Perioden, d. h. alle möglichen Perioden von $\wp(u)$ sind als Summen ganzzahliger Multipla von je zweien dieser Perioden darstellbar[2]).

Es fragt sich nun, ob die *Halb*perioden ω, ω', ω'', geradeso wie die ursprünglichen mit $\mathfrak{v}_\lambda$ bezeichneten, Wurzeln der Gleichungen $\wp(u) = \mathfrak{e}_\lambda$, also *Nullstellen* von $\wp'(u)$ sind — was keineswegs selbstverständlich ist. Bedeutet nämlich $\mathfrak{v}$ eine beliebige der *Halb*perioden ω, ω', ω'', so besteht nach Gl. (28) (S. 146) die Beziehung:

$$0 = \wp(u + \mathfrak{v}) - \wp(u - \mathfrak{v}) = -\frac{\wp'(u)\,\wp'(\mathfrak{v})}{(\wp(u) - \wp(\mathfrak{v}))^2},$$

welche zunächst die *beiden* Eventualitäten offen läßt:

---

1) Dabei ist also:

$$|\omega| \leqq |\omega'| \leqq |\omega''|.$$

Im Falle:

$$|\omega| = |\omega'| < |\omega''|$$

wird das Periodenparallelogramm ein Rhombus oder Quadrat; im Falle:

$$|\omega| < |\omega'| = |\omega''|$$

ein Rhombus, bei dem *eine* Diagonale *kleiner* ist, als die Seiten; im Falle:

$$|\omega| = |\omega'| = |\omega''|$$

ein Rhombus, bei dem *eine* Diagonale *gleich* den Seiten ist.

2) Vgl. meine Mitteilung: „Über einen Fundamentalsatz aus der Theorie der periodischen Funktionen“ in Bd. 30 (Jahrgang 1900) dieser Berichte S. 546, 549.

$$\wp'(\mathfrak{o}) = 0 \quad \text{oder:} \quad \wp(\mathfrak{o}) = \infty.$$

Um die Unmöglichkeit der zweiten zu erweisen, zeigen wir, daß $\mathfrak{o}$ im Falle $\wp(\mathfrak{o}) = \infty$ eine *Periode* von $\wp(u)$ wäre. Wir erinnern zunächst daran, daß auf Grund der Bemerkung, welche in § 2, Nr. 1 am Anfang des Beweises für das Additionstheorem (S. 144) gemacht wurde, $\mathfrak{o}$ für $\wp(u)$ ein *Pol zweiter Ordnung* (also für $\wp'(u)$ von der dritten Ordnung) sein müßte.

Nach dem Additionstheorem hat man:

$$\begin{aligned}\wp(u+v) &= -\wp(u) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{(\wp\, u)-\wp\,(v)}\right)^2 - \wp(v)\\ &= -\wp(u) + \frac{1}{4}\,\frac{(\wp'(u)-\wp'(v))^2 - 4\,\wp(v)\,(\wp(u)-\wp(v))^2}{(\wp(u)-\wp(v))^2}\end{aligned}$$

und daher:

$$\wp(u+\mathfrak{o}) = -\wp(u) - \frac{1}{4}\lim_{v\to\mathfrak{o}} \frac{(\wp'(u)-\wp'(v))^2 - 4\,\wp(v)\,(\wp(u)-\wp(v))^2}{(\wp(u)-\wp(v))^2}.$$

Löst man die beiden Quadrate im Zähler des letzten Gliedes auf und ersetzt $\wp'(u)^2$ durch die rechte Seite der Differentialgleichung (I) (für $x = \wp(u)$), so heben sich die beiden Glieder $4\,\wp(v)^3$ weg und als einziges Glied höchster Dimension bleibt nur das mit $\wp(v)^2$ behaftete: $8\,\wp(u)\,\wp(v)^2$ stehen. Dividiert man hiernach Zähler und Nenner mit $\wp(v)^2$, so findet man für $v \to \mathfrak{o}$[1]):

$$\wp(u+\mathfrak{o}) = -\wp(u) + \frac{1}{4}\,\frac{8\,\wp(u)}{1} = \wp(u)$$

d. h. $\mathfrak{o}$ müßte eine *Periode* von $\wp(u)$ sein, was *unmöglich* ist, da ja die unter der Bezeichnung $\mathfrak{o}$ vereinigten Zahlen ω, ω', ω'' die *Hälften* von *primitiven* Perioden sind.

Damit ist also jetzt bewiesen, daß die *Halb*perioden ω, ω', ω'' (und mit diesen alle möglichen primitiven Halbperioden) Wurzeln der Gleichungen $\wp(u) = e_\lambda$ sind. Des weiteren läßt sich aber zeigen, daß jede einzelne der Zahlen ω, ω', ω'' einer *anderen* der Gleichungen $\wp(u) = e_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, 3$) genügen muß. Da aus dem soeben geführten Beweise hervorgeht, daß *jeder Pol* von $\wp(u)$ eine *Periode* von $\wp(u)$ ist, so besitzt $\wp(u)$ keine anderen Pole, als die „Gitterpunkte" $2\mu\omega + 2\nu\omega'$ ($\mu, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$). Und

---

[1]) Die Rechnung verläuft völlig konform derjenigen, welche im Anschluß an Gl. (27) (S. 146) zur Berechnung von C_8 durchgeführt wurde.

da zu jedem der entsprechenden Periodenparallelogramme nur je einer dieser Gitterpunkte, also ein einziger *Pol zweiter Ordnung* gehört, so ist $\mathfrak{p}(u)$ eine doppelperiodische Funktion *zweiter*, also $\mathfrak{p}'(u)$ eine solche *dritter* Ordnung. Dann besitzt aber $\mathfrak{p}'(u)$ im „ersten“ Periodenparallelogramm (d. h. demjenigen mit den Eckpunkten $0, 2\omega, 2\omega'', 2\omega'$) die drei einfachen Nullstellen $\omega, \omega', \omega''$ und *nur* diese. Es muß daher $\mathfrak{p}(u)$ nach Analogie von $\wp(u)$ (vgl. § 1, Gl. (5)) einer Differentialgleichung von folgender Form genügen:

$$\mathfrak{p}'(u)^2 = 4\,(\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(\omega))\,(\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(\omega'))\,(\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(\omega'')),$$

und die Vergleichung mit der bisher benützten Form:

$$\mathfrak{p}'(u)^2 = 4\,(\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{e}_1)\,(\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{e}_2)\,(\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{e}_3)$$

zeigt, daß $\mathfrak{p}(\omega), \mathfrak{p}(\omega'), \mathfrak{p}(\omega'')$ in irgend einer bestimmten Anordnung mit $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ zusammenfallen müssen, mit anderen Worten, daß jede der drei Zahlen $\omega, \omega', \omega''$ *einer* und *nur* einer der drei Gleichungen:

$$(35) \qquad \mathfrak{p}(u) = \mathfrak{e}_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, 3)$$

genügt, und zwar als *Wurzel vom kleinsten Absolutwert* oder, wie wir kürzer sagen wollen, als *Minimalwurzel.*

Die *Minimalwurzeln* von je zweien der Gleichungen (35) liefern also verdoppelt ein *primitives Periodenpaar* von $\mathfrak{p}(u)$ und insbesondere liefern die zwei (absolut genommen) *kleinsten*, bei passender Wahl des Vorzeichens verdoppelt die *Minimalperioden* $2\omega, 2\omega'$.

3. Die Funktion $\mathfrak{p}(u)$, für die wir jetzt wieder ausführlicher schreiben wollen $\mathfrak{p}(u;\, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3)$, ist durch ihre Minimalperioden $2\omega, 2\omega'$, die zweifachen Pole $u = 0$ und $u = \omega_{\mu\nu} = 2\mu\omega + 2\nu\omega'$ ($\mu, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$), die besondere Form des Singulärteils $\frac{1}{u^2}$ an der Stelle $u = 0$ und wegen der doppelten Periodizität dem entsprechend an allen Stellen $u = \omega_{\mu\nu}$ soweit bestimmt, daß sie sich von der Partialbruchreihe $\wp(u|\omega, \omega')$ höchstens um eine *ganze* transzendente Funktion unterscheiden könnte. Da aber diese letztere doppelperiodisch sein müßte, so reduziert sie sich auf eine *Konstante* und diese schließlich auf *Null*, da die in der

Umgebung von $u = 0$ für $\mathfrak{p}(u; \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3)$, wie für $\wp(u|\omega, \omega')$ bestehende Potenzreihe *kein konstantes Glied* enthält. Hiernach wird also:

$$\mathfrak{p}(u; \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3) = \wp(u|\omega, \omega') \tag{36}$$

und diese für die beiden Funktionen bestehende Gleichheit wird insbesondere für die in der Umgebung von $u = 0$ geltenden Potenzreihen zu einer *Identität*, aus der sich insbesondere mit Rücksicht auf § 1, Gl. (8) ergibt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_2 &= \ \ 60 \sum_{\mu\nu}{}' (2\mu\omega + 2\nu\omega')^{-4} = g_2, \\ \mathfrak{g}_3 &= 140 \sum_{\mu\nu}{}' (2\mu\omega + 2\nu\omega')^{-6} = g_3, \end{aligned} \tag{37}$$

also der Beweis der eigentlich den Kernpunkt der ganzen Untersuchung bildenden Formel (15) des § 1. Da hiernach ein Unterschied zwischen den bisher mit g_2, g_3 und $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ bezeichneten Konstanten nicht mehr besteht, so gesellen sich zu der grundlegenden Beziehung (36) noch die folgenden Identitäten:

$$\mathfrak{p}(u; g_2, g_3) \equiv \wp(u; g_2, g_3) \tag{38}$$

$$\mathfrak{s}(u; g_2, g_3) \equiv \sigma(u; g_2, g_3) = \sigma(u|\omega, \omega'). \tag{39}$$

Schließlich läßt sich das Ergebnis der vorhergehenden Betrachtungen in den folgenden *Hauptsatz* zusammenfassen:

Werden ω, ω' bis auf die Bedingung $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) \neq 0$ willkürlich o d e r *g_2, g_3 bis auf die Bedingung $g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0$ willkürlich vorgeschrieben, so besitzt die Differentialgleichung:*

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3),$$

mit der Anfangsbedingung $x = \infty$ für $u = 0$, die in jedem endlichen Bereich eindeutige und bis auf Pole reguläre Lösung:

$$x = \wp(u|\omega, \omega') = \wp(u; g_2, g_3),$$

wo bei gegebenen ω, ω':

[1]) Hiernach besitzen also die Bezeichnungen $\wp(u|\omega, \omega')$ und $\wp(u; g_2, g_3)$ nunmehr vollständig gleichen *Umfang*. Eine Unterscheidung könnte nur in Betracht kommen, wenn man mit $\wp(u|\omega, \omega')$ die Partialbruchreihe (s. § 1, Gl. (2)), mit $\wp(u; g_2, g_3)$ den Quotienten zweier beständig konvergierender Reihen (s. § 1, Gl. (11) und (13)) bezeichnen wollte.

$$g_2 = \ \ 60 \sum_{\mu\nu}' (2\mu\omega + 2\nu\omega')^{-4},$$
$$g_3 = 140 \sum_{\mu\nu}' (2\mu\omega + 2\nu\omega')^{-6},$$

bei gegebenen g_2, g_3, *also auch gegebenen* e_λ $(\lambda = 1, 2, 3)$ ω, ω' *die Minimalwurzeln von zweien der Gleichungen:* $\wp(u; g_2, g_3) = e_\lambda$.

Zusatz. Bilden bei vorgeschriebenen g_2, g_3 etwa 2Ω, $2\Omega'$ neben den Minimalperioden ω, ω' ein beliebiges *primitives* Periodenpaar, sodaß also:

(40) $\qquad \Omega = \alpha\omega + \beta\omega', \ \Omega' = \gamma\omega + \delta\omega', \ \text{wo:} \ \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$

und daher die Zahlenmengen $2\mu\omega + 2\nu\omega'$ und $2\mu\Omega + 2\nu\Omega'$ $(\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots)$ äquivalent sind, so lassen sich die Beziehungen (37) auch durch die folgenden ersetzen:

(41) $\qquad 60 \sum_{\mu\nu}' (2\mu\Omega + 2\nu\Omega') = g_2, \ \ 140 \sum_{\mu\nu}' (2\mu\Omega + 2\nu\Omega') = g_3.$

Sieht man Ω, Ω' in diesen beiden Gleichungen als *Unbekannte* an, so ergeben sich als *Lösungspaare* alle diejenigen (Ω, Ω'), welche durch die Gleichungen (40) definiert werden — und *nur diese.* Die Annahme der Existenz eines in der Menge der Ω, Ω' nicht enthaltenen Lösungspaares $(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}')$ würde nämlich die *unmögliche* Beziehung nach sich ziehen:

$$\wp(u \,|\, \mathfrak{o}, \mathfrak{o}') = \wp(u; g_2, g_3) = \wp(u \,|\, \omega, \omega').$$

---

§ 5. Die Umkehrungsfunktion $u = W(x)$ von $x = \wp(u)$. — $W(x)$ als elliptisches Integral erster Gattung der Weierstraßschen Normalform mit der eindeutigen Umkehrung $x = \wp(u)$.

1. Nachdem nunmehr die Identität zwischen $\wp(u)$ und der zuvor mit $\mathfrak{p}(u)$ bezeichneten Funktion festgestellt ist, so gelten jetzt für $\wp(u)$ (NB. *bei beliebig vorgeschriebenen* g_2, g_3!) die in § 3 für $\mathfrak{p}(u)$ gemachten Entwicklungen, insbesondere also das Ergebnis, daß zu jedem $x = x_0$ ein die Gleichung $x = \wp(u)$ befriedigender Wert $u = u_0$ berechnet werden kann, während andererseits zu $x = \infty$ der Wert $u = 0$ gehört. Bezeichnet man mit $u = W(x)$ die Umkehrfunktion von $x = \wp(u)$, so zeigen jene Entwicklungen (s. besonders die Formel (B)), daß die Funktion $W(x)$ in der gesamten x-Ebene nicht nur *existiert,* sondern in

der Umgebung jeder Stelle x_0 (abgesehen von den Stellen e_λ und ∞) sich *regulär* verhält. Dagegen geben sie über die etwaige (abgesehen von dem bereits bestehenden doppelten Vorzeichen) bei unbegrenzter Wiederholung des analytischen Fortsetzungsprozesses, zumal bei Umkreisung der Stellen e_λ und ∞ resultierende *Vieldeutigkeit* keinerlei Auskunft. Nun zeigt aber die Formel (vgl. § 2, Gl. (29)):

$$\wp(u) - \wp(u_0) = -\frac{\sigma(u+u_0)\,\sigma(u-u_0)}{\sigma(u)^2\,\sigma(u_0)^2},$$

daß *dann* und *nur* dann $\wp(u) = \wp(u_0)$, wenn $u+u_0$ oder $u-u_0$ *Nullstellen* der σ-Funktion sind, d. h. wenn:

$$\begin{aligned} u \pm u_0 &= 2\mu\omega + 2\nu\omega' \\ \text{also:}\qquad u &= \pm u_0 + 2\mu\omega + 2\nu\omega' \end{aligned} \quad \left(\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots\Big).$$

Aus $x_0 = \wp(\pm u_0 + 2\mu\omega + 2\nu\omega')$ folgt sodann:

$$W(x_0) = \pm u_0 + 2\mu\omega + 2\nu\omega', \tag{42}$$

in Worten: Jeder einzelne Wert $x = x_0$ (auch $x = \infty$) liefert für die Umkehrfunktion $u = W(x)$ außer irgend einem bestimmten Wert u_0 (bzw. 0), der übrigens infolge der Eindeutigkeit von $\wp(u)$ für kein anderes x zum Vorschein kommt, *alle möglichen* Werte von der Form (42) und *nur diese.*

Die hiernach unendlich vieldeutige Funktion $W(x)$ besitzt überdies die folgende bemerkenswerte und für die Gattung, der sie angehört, geradezu charakteristische Eigenschaft: sie wird, da ja zu jedem $x = x_0$ (einschließlich $x = \infty$) eine bestimmte Zahl u_0 (inkl. 0), im übrigen nur die in Gl. (42) zusammengefaßten Werte gehören, an *keiner einzigen* Stelle *unendlich* (also nicht so, wie die gleichfalls unendlich vieldeutigen Funktionen $\operatorname{Log} x$ für $x = 0$, $\operatorname{Arctang} x$ für $x = \pm i$, $\operatorname{Arcsin} x$ für $x = \infty$), ja es wird *nicht* einmal $\lim\limits_{x \to x_0} W(x)$ bei irgend einem *speziellen* Grenzübergange *unendlich groß* (nach Art von $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$, falls $\Re\left(\frac{1}{x}\right) > 0$).

Dagegen befinden sich unter den unendlich vielen Werten, die $W(x)$ an *jeder* einzelnen Stelle x annimmt, infolge der Möglichkeit $|\mu\omega + \nu\omega'|$ durch Wahl von $|\mu|$ und $|\nu|$ unbegrenzt zu vergrößern, stets auch solche, deren Absolutwert jede beliebig vorzuschreibende Schranke übersteigt (eine Eigenschaft, die ja übrigens auch schon bei den oben genannten Umkehrungen der einfach periodischen Funktionen zum Vorschein kommt).

2. Bringen wir (analog wie im § 3) die grundlegende Differentialgleichung (I) auf die Form:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

so folgt mit Berücksichtigung der Anfangsbedingung $u = 0$ für $x = \infty$:

$$u = \int_{\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \tag{43}$$

sodaß also die bisher mit $u = W(x)$ bezeichnete Umkehrfunktion von $x = \wp(u)$ als das *elliptische Integral erster Gattung* in der Weierstraßschen Normalform erscheint. Dabei sind wir in der glücklichen Lage, über die Haupteigenschaften dieses Integrals, auch wenn es uns bisher niemals zu Gesicht gekommen sein sollte, durch die vorhergehenden Betrachtungen vollständig orientiert zu sein: die unendliche Vieldeutigkeit, den gesamten Wertvorrat von der Form: $u = u_0 + 2\mu\omega + 2\nu\omega'$, das Fehlen des Wertes $u = \infty$ und *last not least* die eindeutige Umkehrbarkeit mit Hilfe der Beziehung $x = \wp(u; g_2, g_3)$, die uns als Reminiszenz an die Gleichungen zur Berechnung der *Perioden:* $\wp(\omega_\lambda) = e_\lambda$ jetzt sofort deren explizite Form an die Hand gibt:

$$\omega_\lambda = \int_{\infty}^{e_\lambda} \frac{1}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

mit dem Zusatz, daß die Integrale mit kleinstem Absolutwert uns die *Minimalperioden* liefern. Hiernach bliebe es den Hilfsmitteln der komplexen Integration und der konformen Abbildung lediglich vorbehalten, die obigen bisher aufgefundenen Zusammenhänge zu ergänzen und zu vertiefen. Als bequemer Zugang zu diesen Erkenntnissen dürfte der hier eingeschlagene Weg vor dem historischen (nur durch die Einführung komplexer Veränderlichen erweiterten) gewisse Vorzüge besitzen.