Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1930. Heft III

November-Dezembersitzung

München 1930
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Galoissche Theorie bewerteter Körper.

Von **Wolfgang Krull** in Erlangen.

Vorgelegt in der Sitzung am 8. November 1930.

Ist $\mathfrak{K}$ irgend ein Körper und bedeutet $\overline{\mathfrak{K}}$ eine endliche normale Erweiterung von $\mathfrak{K}$, so kann man den Aufbau von $\overline{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}$ immer dann mit Hilfe der Hilbertschen Theorie der Zerlegungs-, Trägheits- und Verzweigungskörper untersuchen, wenn in $\mathfrak{K}$ ein Unterring $\mathfrak{M}$ ausgezeichnet ist, der an Idealen nur ein einziges nichttriviales (d. h. vom Null- und Einheitsideal verschiedenes) Primideal und seine Potenzen enthält. Ein derartiger Unterring $\mathfrak{M}$ entspricht aber eindeutig umkehrbar einer Bewertung von $\mathfrak{K}$ und zwar einer nichtarchimedischen diskreten Bewertung im Sinne von Kürschák und Ostrowski[1]) bzw. einer ganzzahligen Bewertung im Sinne meiner Arbeit „Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern II"[2]). — Im folgenden wird nun untersucht, wie weit man mit den Hilbertschen Methoden kommen kann, wenn man nur eine ganz beliebige (im Ostrowkischen Sinne nichtarchimedische) Bewertung von $\mathfrak{K}$ kennt.

Es zeigt sich, daß man — in der Sprache der Bewertungstheorie — Zerlegungs-, Trägheits- und (ersten) Verzweigungskörper einer aus der gegebenen Bewertung B des Grundkörpers $\mathfrak{K}$ entspringenden Bewertung B des Oberkörpers $\overline{\mathfrak{K}}$ bei allgemeiner Bewertung B genau so definieren kann wie im Falle der Ganzzahligkeit von B. Zerlegungs- und Trägheitskörper haben stets

[1]) Die in Frage kommenden Arbeiten von Kürschák und Ostrowski finden sich: Kürschák, J. f. Math. 142 (1913); Ostrowski, Acta Mathematica 41 (1917); J. f. Math. 147 (1917). Vgl. auch Rychlik, J. f. Math. 153 (1923).

[2]) Math. Zeitschrift 31 (1930). Kurz zitiert mit „K". Im folgenden halte ich mich an die Terminologie von K, die meines Erachtens immer dann bequemer ist, wenn die (im Ostrowkischen Sinn archimedischen) Bewertungen durch den gewöhnlichen absoluten Betrag ausgeschlossen sind.

die gleichen charakteristischen, vom ganzzahligen Spezialfall her bekannten Eigenschaften und es ist der Endkörper $\overline{\mathfrak{K}}$ über dem Trägheitskörper stets auflösbar, trotzdem man bei nichtganzzahligem B die „höheren" Verzweigungskörper nicht mehr ohne weiteres invariant definieren kann. Der (erste) Verzweigungskörper, der bei ganzzahligem B über dem Trägheitskörper stets zyklisch ist, fällt im allgemeinen über dem Trägheitskörper Abelsch aus, und zwar ist seine Galoisgruppe über dem Trägheitskörper stets isomorph zur Quotientengruppe $\overline{A}|A$, falls $\overline{A}$ bzw. A die Additionsgruppe aller der reellen Zahlen bedeutet, die in $\overline{B}$ Werte von Elementen des (ersten) Verzweigungskörpers bzw. des Trägheitskörpers sind.

Das zuletzt angegebene Ergebnis ist wohl das wichtigste der ganzen Note. Es kann z. B., wie im letzten Paragraphen kurz auseinandergesetzt wird, zur Konstruktion von Köpern benützt werden, über denen zwar jede Gleichung Abelsch, aber nicht jede Gleichung zyklisch ist.

§ 1. Hilfssätze aus der Bewertungstheorie.

Von einer Bewertung B des beliebigen Körpers $\mathfrak{K}$ soll gesprochen werden, wenn jedem Element $a \neq 0$ aus $\mathfrak{K}$ eindeutig eine bestimmte reelle Zahl $w(a) = d$ als „Wert" zugeordnet ist, und wenn dabei die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $w(a \cdot b) = w(a) + w(b)$
2. $w(a + b) \geq \min(w(a), w(b))$
3. $w(a^*) \neq 0$ für mindestens ein a^*.

Nennen wir einen Unterring $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{K}$ Maximalring, falls $\mathfrak{M}$ ein echter Unterring von $\mathfrak{K}$ ist, der $\mathfrak{K}$ selbst als Quotientenkörper besitzt, und falls aus $\mathfrak{M} < \mathfrak{L} \leq \mathfrak{K}$ stets $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}$ folgt, so gilt:

Die Gesamtheit der Elemente aus $\mathfrak{K}$, die in einer festen Bewertung B nichtnegative Werte besitzen, bildet einen Maximalring $\mathfrak{M}$. Umgekehrt gibt es zu einem festen Maximalring $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{K}$ eine und bis auf eine triviale Umnormierung der Werte auch nur eine Bewertung B, in der gerade die Elemente von $\mathfrak{M}$ nichtnegative Werte haben[1]).

[1]) Vgl. zu diesen Definitionen und Sätzen K, § 1 und § 2. Zur Möglichkeit der verschiedenen „Normierung" vgl. insbesondere den Schluß v. § 2.

Zu jeder Bewertung B „gehört" also ein bestimmter Maximalring $\mathfrak{M}$. Die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{K}$, die in B positive Werte besitzen, bildet in $\mathfrak{M}$ ein Primideal $\mathfrak{m}$, und zwar das einzige nichttriviale Primideal. Den Restklassenkörper $\mathfrak{M}|\mathfrak{m}$ bezeichnen wir als „den zu B gehörigen Restklassenkörper". Schließlich soll unter der „zu B gehörigen Wertgruppe A" diejenige Additionsuntergruppe der reellen Zahlen verstanden werden, die von der Gesamtheit der in B wirklich vorkommenden Werte A gebildet wird. Ist insbesondere A zyklisch, also zur Gruppe der ganzen Zahlen isomorph, so wollen wir von einer ganzzahligen Bewertung sprechen.

Hilfssatz 1. Es seien $B_1, B_2, \ldots B_s$ endlich viele Bewertungen von $\mathfrak{K}$, A_i sei die zu B_i gehörige Wertgruppe, $\mathfrak{M}_i$ der zu B_i gehörige Maximalring, $\mathfrak{m}_i$ bedeute das Primideal aus $\mathfrak{M}_i$. Dann gilt:

a) Ist (für $i = 1, 2 \ldots s$) d_i jeweils eine Zahl aus A_i, so gibt es in $\mathfrak{K}$ stets ein Element a^*, das gleichzeitig in B_1 den Wert d_1, in B_2 den Wert $d_2, \ldots$, in B_s den Wert d_s besitzt.

b) Ist (für $i = 1, 2 \ldots s$) b_i jeweils ein Element aus $\mathfrak{M}_i$, so gibt es im Durchschnitt der $\mathfrak{M}_i$ stets ein Element b^*, das als Element von $\mathfrak{M}_1$ der Kongruenz $b^* \equiv b_1\ (\mathfrak{m}_1)$, als Element von $\mathfrak{M}_2$ der Kongruenz $b^* \equiv b_2\ (\mathfrak{m}_2), \ldots$ als Element von $\mathfrak{M}_s$ der Kongruenz $b^* \equiv b_s\ (\mathfrak{m}_s)$ genügt.

Der Beweis der Behauptung a) findet sich für den Fall ganzzahliger Bewertungen B_i und nichtnegativer d_i bereits in § 1 meiner Arbeit: Ein Satz über primäre Integritätsbereiche. (Math. Annalen 103 (1930).) Da die dort angegebene etwas umständliche Rechnung auch im allgemeinsten Fall zum Ziele führt, braucht sie hier nicht nochmals wiederholt zu werden. Der Beweis von b) kann so geführt werden, daß man von den einzelnen $\mathfrak{M}_i$ zum Durchschnitt $V = \mathfrak{M}_1 \frown \mathfrak{M}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{M}_s$ übergeht, weiter die Durchschnitte $\mathfrak{m}_i' = \mathfrak{m}_i \frown V$ bildet, aus a) auf die Teilerfremdheit der $\mathfrak{m}_i'$ schließt und triviale Sätze über simultane Kongruenzen nach teilerfremden Idealen anwendet.

§ 2. Problemstellung, Zerlegungs- und Trägheitskörper.

Es sei im folgenden $\bar{\mathfrak{K}}$ eine endliche normale Erweiterung erster Art[1]) von $\mathfrak{K}$, $\bar{B}$ bedeute eine Bewertung von $\bar{\mathfrak{K}}$, B eine solche von $\mathfrak{K}$. Dann soll $\bar{B}$ als „Erweiterung von B auf $\bar{\mathfrak{K}}$“, B als „durch $\bar{B}$ induzierte Bewertung von $\mathfrak{K}$“ bezeichnet werden, wenn B aus $\bar{B}$ einfach dadurch entsteht, daß man jedem Element aus $\mathfrak{K}$ als Wert in B diejenige reelle Zahl zuordnet, die es als Element von $\bar{\mathfrak{K}}$ in $\bar{B}$ zum Werte besitzt. Wir bezeichnen ferner mit Θ die Galoisgruppe von $\bar{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}$, mit ϑ ein beliebiges Element aus Θ, die Anwendung der Abbildung ϑ deuten wir durch die Schreibweise „$\vartheta \cdot \ldots$“ an. Sind dann $\bar{B}_1$ und $\bar{B}_2$ irgendwelche Bewertungen von $\bar{\mathfrak{K}}$ mit den zugehörigen Maximalringen $\bar{\mathfrak{M}}_1$ und $\bar{\mathfrak{M}}_2$, so setzen wir $\bar{B}_2 = \vartheta \cdot \bar{B}_1$ und nennen $\bar{B}_1$ und $\bar{B}_2$ (über $\mathfrak{K}$) „konjugiert“, wenn die Gleichung $\bar{\mathfrak{M}}_2 = \vartheta \cdot \bar{\mathfrak{M}}_1$ gilt, und wenn außerdem $\bar{B}_1$ und $\bar{B}_2$ so normiert sind, daß für beliebiges a stets $\vartheta \cdot a$ in $\bar{B}_2$ den gleichen Wert besitzt wie a in $\bar{B}_1$.

Hilfssatz 2. Ist B irgend eine feste Bewertung von $\mathfrak{K}$, so gibt es stets mindestens eine, immer aber nur endlich viel Erweiterungen $\bar{B}$ von B auf $\bar{\mathfrak{K}}$. Sämtliche Erweiterungen von B auf $\bar{\mathfrak{K}}$ sind untereinander konjugiert[2]).

---

[1]) Es entstehe also $\bar{\mathfrak{K}}$ aus $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion der Nullstellen eines Polynoms mit lauter verschiedenen Wurzeln.

[2]) Nach Kürschák (J. f. Math. 143) gilt zunächst: Ist $\bar{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}(\alpha)$, bedeutet $p(x)$ das irreduzible Polynom aus $\mathfrak{K}$, dessen Nullstelle α ist, und zerfällt $p(x)$ in der zu B gehörigen perfekten Hülle $\mathfrak{K}^*$ von $\mathfrak{K}$ in die irreduziblen Faktoren $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\ldots p_{s-1}(x)$, so entspricht jedem der Faktoren $p_i(x)$ genau eine Ausdehnung $\bar{B}_i$ von B auf $\bar{\mathfrak{K}}$. Nach Ostrowski (J. f. Math. 147) sind ferner die so gefundenen Ausdehnungen von B die einzig möglichen. Da ferner, falls $\bar{\mathfrak{K}}$ normal über $\mathfrak{K}$, die Faktoren $p_i(x)$ von $p(x)$ durch die einzelnen ϑ aus Θ nur untereinander vertauscht werden, müssen die $\bar{B}_i$ ersichtlich zueinander konjugiert sein. — Der im Text außerdem erwähnte „elementare“ Beweis von Hilfssatz 2 könnte etwa so geführt werden: Die Existenz mindestens einer Ausdehnung von B auf $\bar{\mathfrak{K}}$ beweist man, indem man durch einfache Wohlordnungsschlüsse die Existenz mindestens eines $\mathfrak{M}$ als Untermenge enthaltenden Maximalrings $\bar{\mathfrak{M}}$ aus $\bar{\mathfrak{K}}$ zeigt. Man betrachtet dann ferner den Ring $\bar{V}$ aller von $\mathfrak{M}$ algebraisch ganz abhängiger Elemente aus $\bar{\mathfrak{K}}$ und beweist durch ganz einfache Bewertungsschlüsse: $\bar{V}$ ist Durchschnitt aller Maximalringe, die zu Ausdehnungen von B auf $\bar{\mathfrak{K}}$ gehören, $\bar{V}$ ist aber auch bereits gleich dem Durchschnitt einer einzigen beliebigen

Hilfssatz 2 folgt aus allgemeinen Bewertungssätzen von Kürschák und Ostrowski, er kann aber auch verhältnismäßig elementar mit Hilfe der Theorie der Maximalringe abgeleitet werden. Wir gehen darauf nicht näher ein.

Es sei von jetzt ab B eine feste Bewertung von $\mathfrak{K}$, $\overline{B} = \overline{B}_0$, $\overline{B}_1, \ldots \overline{B}_{s-1}$ seien die sämtlichen möglichen Erweiterungen von B auf $\overline{\mathfrak{K}}$. Dann soll als Zerlegungsgruppe Θ_z (von $\overline{B}$ über $\mathfrak{K}$) die Untergruppe aller der der Gleichung $\vartheta \cdot \overline{B} = \overline{B}$ genügenden Abbildungen ϑ aus Θ verstanden werden. Zerlegungskörper (von $\overline{B}$ über $\mathfrak{K}$) heiße der Θ_z im Sinne der Galoisschen Theorie zugeordnete Unterkörper von $\overline{\mathfrak{K}}$. B_z bedeute die durch $\overline{B}$ induzierte Bewertung von $\mathfrak{K}_z$, $\mathfrak{M}_z$ sei der zu B_z gehörige Maximalring. Dann folgt zunächst aus Hilfssatz 2:

Der Index von Θ_z in Θ ist gleich der Anzahl der möglichen Erweiterungen von B auf $\overline{\mathfrak{K}}$. — Ferner gilt:

Satz 1. a) Jede von $\overline{B}$ verschiedene Ausdehnung von B auf $\overline{\mathfrak{K}}$ induziert eine von B_z verschiedene Bewertung von $\mathfrak{K}_z$. b) Die Wertgruppe A_z von B_z ist gleich der Wertgruppe A von B. c) Der Restklassenkörper $\mathfrak{M}_z | \mathfrak{m}_z$ von B_z ist gleich dem Restklassenkörper $\mathfrak{M} | \mathfrak{m}$ von B, d. h. es kann jede Klasse aus $\mathfrak{M}_z | \mathfrak{m}_z$ durch ein Element aus $\mathfrak{M}$ repräsentiert werden.

Wir zeigen zunächst: Ist d_z irgend ein Wert aus A_z, so gibt es in $\mathfrak{K}_z$ ein Element a^*, das in $\overline{B}$ den Wert d_z, in den von $\overline{B}$ verschiedenen konjugierten Bewertungen $\overline{B}_i$ dagegen den Wert 0 besitzt. — In der Tat, nach Hilfssatz 1 a) gibt es jedenfalls in $\overline{\mathfrak{K}}$ zwei Elemente β und γ, derart daß β in $\overline{B}$ den Wert 0, in den $\overline{B}_i$ dagegen positiven Wert besitzt, während der Wert von γ in $\overline{B}$ positiv und in den $\overline{B}_i$ gleich 0 ist. Dann aber müssen nach Definition von Θ_z auch die Relativnormen b und c von β und γ hinsichtlich $\mathfrak{K}_z$ die gleichen Eigenschaften besitzen wie β und γ selbst. Bedeutet daher a irgend ein Element aus $\mathfrak{K}_z$ vom Werte d_z in $\overline{B}$, so wird für hinreichend großes r sicher $a \cdot b^r + c^r$ ein Element a^* der gesuchten Art[1]).

Serie konjugierter Maximalringe der genannten Art. Daraus folgt dann sofort der ganze Hilfssatz 2.

[1]) Vgl. ähnliche Betrachtungen in § 1 der beim Beweise von Hilfssatz 1 zitierten Arbeit!

Aus der Existenz von a^* ergibt sich sofort für $d_z \neq 0$ die Richtigkeit der Behauptung a). Da ferner jede nicht zu Θ_z gehörige Abbildung aus Θ die Bewertung $\overline{B}$ in eine der konjugierten Bewertungen $\overline{B}_i$ überführt, in denen a^* den Wert 0 hat, müssen alle Relativkonjugierten von a^* über $\mathfrak{K}$ in $\overline{B}$ den Wert 0 besitzen; der Wert der Relativnorm von a^* über $\mathfrak{K}$ in $\overline{B}$ ist daher gleich d_z, und daraus ergibt sich wegen der Zugehörigkeit der Relativnorm zu $\mathfrak{K}$ und der Willkürlichkeit von d_z die Behauptung b). Bedeutet schließlich b irgend ein Element aus $\mathfrak{M}_z$, so kann man aus der bereits bewiesenen Behauptung a) und aus Hilfssatz 1b) schließen, daß in $\mathfrak{K}_z$ ein Element b^* existiert, das als Element von $\mathfrak{M}_z$ der Kongruenz $b^* \equiv b\,(\mathfrak{m}_z)$, als Element des zu $\overline{B}_i$ gehörigen Maximalrings $\overline{\mathfrak{M}}_i$ dagegen der Kongruenz $b^* \equiv 1\,(\overline{\mathfrak{m}}_i)$ $(i = 1, 2 \ldots s-1)$ genügt. Dann muß jede Relativkonjugierte b_k^* von b^* über $\mathfrak{K}$ als Element des zu $\overline{B}$ gehörigen Maximalrings $\overline{\mathfrak{M}}$ die Kongruenz $b_k^* \equiv 1\,(\overline{\mathfrak{m}})$ befriedigen, denn es führt ja jedes nicht zu Θ_z gehörige ϑ eine der Bewertungen $\overline{B}_i\,(i = 1, 2 \ldots s-1)$ in $\overline{B}$ über. Es ist daher gleichzeitig mit b^* auch die Relativnorm von b^* modulo $\mathfrak{m}_z$ zu b kongruent, und daraus folgt sofort die Richtigkeit der Behauptung c).

Bedeutet ϑ irgend eine Abbildung aus Θ_z, so besitzt ersichtlich für beliebiges a aus $\overline{\mathfrak{K}}$ das Element $\vartheta \cdot a$ stets den gleichen Wert in $\overline{B}$ wie a selbst, d. h. setzen wir $\vartheta \cdot a = c \cdot a$, so ist c Element des zu $\overline{B}$ gehörigen Maximalrings $\overline{\mathfrak{M}}$ und hat in $\overline{B}$ den Wert 0. Genügt insbesondere c der Kongruenz $c \equiv 1\,(\overline{\mathfrak{m}})$, so wollen wir sagen, es sei a halbinvariant gegenüber ϑ; entsprechend soll a halbinvariant heißen gegenüber der Untergruppe H von Θ_z, wenn a gegenüber jeder einzelnen Abbildung aus H im eben festgelegten Sinne halbinvariant ist. Wir definieren nun:

Die Trägheitsgruppe Θ_t (von $\overline{B}$ über $\mathfrak{K}$) bestehe aus allen und nur den Abbildungen von Θ_z, denen gegenüber die sämtlichen Elemente aus $\overline{\mathfrak{K}}$, die in $\overline{B}$ den Wert 0 besitzen, halbinvariant sind. Der Θ_t zugeordnete Unterkörper $\mathfrak{K}_t$ von $\overline{\mathfrak{K}}$ heiße Trägheitskörper (von $\overline{B}$ über $\mathfrak{K}$). B_t sei die durch $\overline{B}$ induzierte Bewertung von $\mathfrak{K}_t$, $\mathfrak{M}_t$ sei ihr zugehöriger Maximalring. — Der zu $\overline{B}$ gehörige Restklassenkörper $\overline{\mathfrak{M}}\,|\,\overline{\mathfrak{m}}$ kann und soll im folgenden als algebraische Erweiterung der Restklassenkörper $\mathfrak{M}\,|\,\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{M}_t\,|\,\mathfrak{m}_t$ aufgefaßt werden. (Man hat zu diesem Zwecke ja nur diejenigen Klassen aus $\overline{\mathfrak{M}}|\overline{\mathfrak{m}}$, die Elemente aus $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}_t$ enthalten mit den durch diese Elemente definierten Klassen aus $\mathfrak{M}|\mathfrak{m}$ bzw. $\mathfrak{M}_t|\mathfrak{m}_t$ zu identifizieren.) Wir wollen von jetzt ab der Einfachheit halber voraussetzen, daß bei dieser Auffassung $\overline{\mathfrak{M}}|\overline{\mathfrak{m}}$ über $\mathfrak{M}|\mathfrak{m} = \mathfrak{M}_z|\mathfrak{m}_z$ algebraisch von erster Art sei[1]). Dann gilt:

Satz 2. a) Θ_t ist invariante Untergruppe von Θ_z. b) Es ist $\mathfrak{M}_t|\mathfrak{m}_t = \overline{\mathfrak{M}}|\overline{\mathfrak{m}}$ und es ist die Relativgruppe $\Theta_z|\Theta_t$ von $\mathfrak{K}_t$ über $\mathfrak{K}_z$ zur Relativgruppe von $\overline{\mathfrak{M}}|\overline{\mathfrak{m}}$ über $\mathfrak{M}_z|\mathfrak{m}_z$ isomorph. c) Die Wertgruppe Λ_t von B_t ist gleich Λ_z (und damit gleich Λ).

Der Beweis der Behauptungen a) und b) kann genau so geführt werden wie im Spezialfall ganzzahliger Bewertungen[2]). Man hat sich einfach zu überlegen, daß die Abbildungen von Θ_t eindeutig umkehrbar den Abbildungen von $\overline{\mathfrak{M}}|\overline{\mathfrak{m}}$ über $\mathfrak{M}_z|\mathfrak{m}_z$ zugeordnet werden können, und die Tatsache auszunutzen, daß $\overline{\mathfrak{M}}|\overline{\mathfrak{m}}$ über $\mathfrak{M}_z|\mathfrak{m}_z$ algebraisch von erster Art ist. Was die Behauptung c) angeht, so sei, was unter unseren Voraussetzungen möglich ist, das Element α aus $\mathfrak{K}_t$ so gewählt, daß gleichzeitig $\mathfrak{K}_t$ aus $\mathfrak{K}_z$ durch Adjunktion von α und $\overline{\mathfrak{M}}|\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{M}_t|\mathfrak{m}_t$ aus $\mathfrak{M}_z|\mathfrak{m}_z$ durch Adjunktion der durch α erzeugten Restklasse entsteht, f sei der wegen b) gemeinsame Grad von $\mathfrak{K}_t$ über $\mathfrak{K}_z$ und $\mathfrak{M}_t|\mathfrak{m}_t$ über $\mathfrak{M}_z|\mathfrak{m}_z$. Dann kann man jedes Element γ aus $\mathfrak{K}_t$ darstellen in der Form $\gamma = p\,(a_0 + a_1\,\alpha + \cdots + a_{f-1}\,\alpha^{f-1})$, wobei p ein geeignetes Element aus $\mathfrak{K}_z$ ist, während die a_i sämtlich zu $\mathfrak{M}_z$, aber nicht sämtlich zu $\mathfrak{m}_z$ gehören. Wegen der Art der Wahl von α ist nun $a_0 + a_1\,\alpha + \cdots + a_{f-1}\,\alpha^{f-1}$ Element von $\mathfrak{M}_t$, aber nicht Element von $\mathfrak{m}_t$, d. h. es besitzt $a_0 + a_1\,\alpha + \cdots + a_{f-1}\,\alpha^{f-1}$ in B_t den Wert 0 und der Wert von γ in B_t ist gleich dem zu Λ_z gehörigen Werte von p in B_z.

---

[1]) Ist $\overline{\mathfrak{M}}|\overline{\mathfrak{m}}$ über $\mathfrak{M}|\mathfrak{m}$ nicht von erster Art, so ist $\mathfrak{M}|\mathfrak{m}$ jedenfalls von Primzahlcharakteristik p, und es gibt zwischen $\overline{\mathfrak{M}}|\overline{\mathfrak{m}}$ und $\mathfrak{M}|\mathfrak{m}$ eine größte Erweiterung erster Art, $\mathfrak{M}_c|\mathfrak{m}_c$, aus der $\overline{\mathfrak{M}}|\overline{\mathfrak{m}}$ ausschließlich durch Adjunktion von p^f-ten Wurzeln entsteht. In diesem Falle wird, wie leicht mit unseren Methoden zu zeigen, $\mathfrak{M}_t|\mathfrak{m}_t = \mathfrak{M}_v|\mathfrak{m}_v = \mathfrak{M}_c|\mathfrak{m}_c$, der Übergang von $\mathfrak{M}_c|\mathfrak{m}_c$ zu $\overline{\mathfrak{M}}|\overline{\mathfrak{m}}$ vollzieht sich also erst über dem Verzweigungskörper $\mathfrak{K}_v$. (Definition von $\mathfrak{K}_v$ und $\mathfrak{M}_v$ in § 3!)

[2]) Natürlich sind zuerst die üblichen idealtheoretischen Formulierungen in die Sprache der Bewertungstheorie zu übersetzen!

§ 3. Verzweigungsgruppe und Verzweigungskörper.

Unter der Verzweigungsgruppe Θ_v von $\overline{B}$ verstehen wir die Gesamtheit derjenigen Abbildungen aus Θ, denen gegenüber sämtliche Elemente aus $\overline{\mathfrak{K}}$ halbinvariant sind. Der Θ_v zugeordnete Körper $\mathfrak{K}_v$ heißt Verzweigungskörper, B_v bedeutet die durch $\overline{B}$ induzierte Bewertung von $\mathfrak{K}_v$, $\mathfrak{M}_v$ ihren Maximalring usw.

Satz 3. Θ_v ist invariante Untergruppe von Θ_t und Θ_z. Die Galoisgruppe $\Theta_t | \Theta_v$ von $\mathfrak{K}_v$ über $\mathfrak{K}_t$ ist isomorph zur Quotientengruppe der Wertgruppen von B_v und B_t, also zu $A_v | A_t = A_v | A$. Die Zwischengruppen A' zwischen A und A_v entsprechen in folgender Weise eindeutig umkehrbar den Zwischenkörpern $\mathfrak{K}'$ zwischen $\mathfrak{K}_t$ und $\mathfrak{K}_v$:

Die Wertgruppe der durch $\overline{B}$ induzierten Bewertung B' von $\mathfrak{K}'$ ist gerade gleich A' und die $\mathfrak{K}'$ im Sinne der Galoisschen Theorie zugeordnete Untergruppe von $\Theta_t | \Theta_v$ besteht aus allen und nur den Abbildungen von $\mathfrak{K}_v$ über $\mathfrak{K}_t$, denen gegenüber die sämtlichen Elemente von $\mathfrak{K}_v$, deren Werte in A' liegen, halbinvariant sind.

Ist die Charakteristik von $\mathfrak{M} | \mathfrak{m}$ gleich $p \neq 0$, so ist der Grad von $\mathfrak{K}_v$ über $\mathfrak{K}_t$ zu p teilerfremd.

Die Invarianz von Θ_v ist trivial. Im übrigen erfordert der Beweis von Satz 5 eine Reihe von Hilfssätzen, bei deren Ableitung wir der Bequemlichkeit halber $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_t$, $\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}_v$ annehmen wollen, sodaß $\Theta_t = \Theta_t | \Theta_v = \Theta$, $B_t = B$, $\overline{B} = B_v$ wird usw. Unter dem Wert eines Elements α aus $\overline{\mathfrak{K}}$ schlechtweg verstehen wir von jetzt ab den Wert von α in $\overline{B}$.

Gleichzeitig mit α und β ist stets auch $\alpha \cdot \beta$ halbinvariant gegenüber der Abbildung ϑ, ferner sind nach Vor. alle Elemente des Wertes 0 bestimmt halbinvariant gegenüber ϑ. Daraus folgt sofort:

Hilfssatz 3. Ist α halbinvariant gegenüber ϑ, so sind auch alle Elemente, die den gleichen Wert wie α besitzen, halbinvariant gegenüber ϑ.

Hilfssatz 4. Es sei α ein beliebiges Element aus $\overline{\mathfrak{K}}$ vom Werte λ, und es sei n die kleinste positive Zahl, für die $n \cdot \lambda$ zu A gehört, es sei also n gleich der Ordnung der durch λ in $\bar{A}|A$ erzeugten Restklasse[1]). Bedeutet dann Θ_a die Gruppe aller derjenigen Abbildungen, denen gegenüber a halbinvariant ist, so ist Θ_a invariante Untergruppe von Θ, und es stellt $\Theta|\Theta_a$ eine zyklische Gruppe dar, deren Ordnung gleich einem Teiler von n ist.

Daß Θ_a in Θ invariant ist, und daß $\Theta|\Theta_a$ zyklisch wird, beweist man mit eben den Methoden, mit denen man im Spezialfall ganzzahliger Bewertungen zeigt, daß Θ_v invariant in Θ_t und $\Theta_t|\Theta_v$ zyklisch ist. Es sei ferner ϑ eine Abbildung aus Θ, die eine erzeugende Restklasse von $\Theta|\Theta_a$ definiert, und es sei $\vartheta\cdot a = c\cdot a$. Dann ist $\vartheta\cdot a^n = c^n\cdot a^n$ und daraus folgt $c^n \equiv 1\ (\bar{\mathfrak{m}})$, weil ja a^n den zu A gehörigen Wert $n\cdot\lambda$ besitzt und somit nach Hilfssatz 3 gegenüber jeder Abbildung von Θ halbinvariant sein muß. Bilden wir daher $\vartheta^n\cdot a$ und beachten wir, daß c als Element des Wertes 0 sicher gegenüber ϑ halbinvariant ist, so erhalten wir $\vartheta^n\cdot a = c^n\cdot a + \pi\cdot a = a + \pi'\cdot a$ $(\pi \equiv 0\ (\mathfrak{m}),\ \pi' \equiv 0\ (\bar{\mathfrak{m}}))$, es gehört also ϑ^n zu Θ_a, und damit ist alles bewiesen.

Zunächst folgt aus Hilfssatz 4, daß $\bar{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}$ auflösbar ist, daß also mindestens eine Körperkette $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots \mathfrak{K}_{s-1}, \mathfrak{K}_s = \bar{\mathfrak{K}}$ existiert, bei der $\mathfrak{K}_i$ jeweils über $\mathfrak{K}_{i-1}$ Normalkörper ist, und einen Primzahlgrad p_i besitzt. Allein auf Grund dieser Tatsache beweisen wir weiter:

Hilfssatz 5. Die Ordnung von $\bar{A}|A$ ist ein Teiler des Grades von $\bar{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}$.

Bezeichnen wir allgemein mit A_i die Wertgruppe der durch $\bar{B}$ induzierten Bewertung von $\mathfrak{K}_i$ $(A_0 = A,\ A_s = \bar{A})$, so ist A_i jeweils Obergruppe von A_{i-1} und es ist die Ordnung von $\bar{A}|A$ gleich dem Produkt der Ordnungen von $A_i|A_{i-1}$ $(i = 1, 2 \ldots s)$. Zum Beweise von Hilfssatz 5 haben wir daher nur zu zeigen: Die Ordnung von $A_i|A_{i-1}$ ist stets entweder gleich 1 oder gleich p_i. Ist nun $A_i \neq A_{i-1}$, so können wir ein erzeugendes Element a von $\mathfrak{K}_i$ über $\mathfrak{K}_{i-1}$ so wählen, daß der Wert λ_i von a nicht zu A_{i-1} gehört. Dann muß p_i die kleinste positive ganze Zahl sein, deren Produkt mit λ_i zu A_{i-1} gehört, denn es besitzt ja die in $\mathfrak{K}_{i-1}$ liegende Relativnorm von a über $\mathfrak{K}_i$ den Wert $p_i\cdot\lambda_i$. Ist ferner γ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{K}_i$, so können wir γ in der

[1]) „Restklasse" soviel wie Nebengruppe, Nebenschar von A in $\bar{A}$.

Form $\gamma = a_0 + a_1 a + \cdots a_{p_i-1} a^{p_i-1}$ darstellen, und aus dem eben über λ_i Festgestellten folgt, daß für $\lambda \neq \varkappa$ die Glieder $a_\lambda \cdot a^\lambda$ und $a_\varkappa \cdot a^\varkappa$ stets verschiedene Werte haben; es muß daher der Wert von γ gleich dem Worte eines der Produkte $a_g a^g$ sein, d. h. der Wert λ eines beliebigen Elements aus $\mathfrak{K}_i$ besitzt stets die Gestalt $\lambda = \lambda_{i-1} + g \cdot \lambda_i$, wobei λ_{i-1} eine Zahl aus Λ_{i-1}, g_i eine der Zahlen $0, 1, \ldots p_i - 1$ bedeutet. Damit ist alles bewiesen. — Wir können jetzt bereits zeigen:

Θ ist zu $\bar{\Lambda}|\Lambda$ isomorph. Ist die Charakteristik von $\overline{\mathfrak{M}}|\overline{\mathfrak{m}}$ gleich $p \neq 0$, so ist der Grad von $\bar{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}$ zu p teilerfremd.

Nach Hilfssatz 5 ist $\bar{\Lambda}|\Lambda$ jedenfalls eine endliche Abelsche Gruppe. Es seien nun die Elemente $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots \bar{\lambda}_t$ aus $\bar{\Lambda}$ so gewählt, daß die durch sie erzeugten Restklassen eine Basis von $\bar{\Lambda}|\Lambda$ bilden, $p_i^{r_i}$ sei die Ordnung der durch $\bar{\lambda}$ erzeugten Restklasse, so daß also die Gesamtordnung von $\bar{\Lambda}|\Lambda$ gerade gleich $p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{r_s}$ ist. Bedeutet dann a_i ein Element aus $\bar{\mathfrak{K}}$ vom Werte $\bar{\lambda}_i$, so gehört nach Hilfssatz 4 zu der dort eingeführten Gruppe Θ_{a_i} ein zyklischer Oberkörper $\mathfrak{Z}_i$ von $\mathfrak{K}$ vom Relativgrad $p_i^{s_i}$ $(s_i \leq r_i)$ und es wird $\bar{\mathfrak{K}}$ gleich dem Vereinigungskörper der $\mathfrak{Z}_i$; denn eine Abbildung ϑ, die dem Durchschnitt der Gruppen Θ_{a_i} angehört, muß sämtliche a_i und damit angesichts der Auswahl dieser Elemente nach Hilfssatz 3 überhaupt alle Elemente von $\bar{\mathfrak{K}}$ halbinvariant lassen, folglich wegen $\bar{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}_v$ gleich der Identität sein. Der Grad von $\bar{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}$ ist nach dem eben Bewiesenen ein Teiler von $p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{s_t}$; andererseits muß er nach Hilfssatz 5 ein Vielfaches von $p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{r_t}$ darstellen. Daraus folgt, daß jeder der $\mathfrak{Z}_i$ den genauen Grad r_i besitzt und daß $\bar{\mathfrak{K}}$ das direkte Produkt der $\mathfrak{Z}_i$ darstellt.

Die Behauptung über das Verhältnis des Grades von $\bar{\mathfrak{K}}$ zur Charakteristik von $\overline{\mathfrak{M}}|\overline{\mathfrak{m}}$ ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß die Galoisgruppen der $\mathfrak{Z}_i$ zu multiplikativen Gruppen aus $\overline{\mathfrak{M}}|\overline{\mathfrak{m}}$ isomorph sind.

Um Satz 3 in vollem Umfange zu beweisen, brauchen wir jetzt nur noch zu zeigen: Ist $\mathfrak{K}'$ irgend ein Unterkörper von $\bar{\mathfrak{K}}$ mit der zugehörigen Bewertung B' und der zugehörigen Wertgruppe Λ', und bedeutet Θ' die $\mathfrak{K}'$ im Sinne der Galoisschen Theorie zugeordnete Untergruppe von Θ, $\Theta_{\Lambda'}$

dagegen die Gruppe aller derjenigen Abbildungen, denen gegenüber die sämtlichen Elemente aus $\overline{\mathfrak{K}}$ mit zu Λ' gehörigen Werten halbinvariant sind, so ist $\Theta' = \Theta_{\Lambda'}$.

Es ist sicher $\Theta_{\Lambda'} \geqq \Theta'$. Wir nehmen an, es sei $\Theta_{\Lambda'}$ echte Obergruppe von Θ' und es bedeute $\mathfrak{K}''$ den zu $\Theta_{\Lambda'}$ im Sinne der Galoisschen Theorie gehörigen Körper. Dann ist $\mathfrak{K}'$ echter Oberkörper von $\mathfrak{K}''$ und es spielt $\mathfrak{K}''$ unter $\mathfrak{K}'$ die Rolle des Verzweigungskörpers $\mathfrak{K}_v$, und daraus folgt nach dem weiter unten abzuleitenden Satz 4, daß $\overline{\mathfrak{M}}|\overline{\mathfrak{m}}$ eine Primzahlcharakteristik p besitzen, und daß der Grad von $\mathfrak{K}'$ über $\mathfrak{K}''$ eine Potenz von p darstellen muß. Das ist aber nach dem, was wir bereits über den Grad von $\overline{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}$ wissen, ausgeschlossen. Es ist daher sicher $\Theta' = \Theta_{\Lambda'}$.

Satz 4. Ist $\overline{\mathfrak{K}}$ echter Oberkörper von $\mathfrak{K}_v$, so ist $\overline{\mathfrak{M}}|\overline{\mathfrak{m}}$ jedenfalls von Primzahlcharakteristik p, es ist $\overline{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}_v$ auflösbar, und es stellt der Grad von $\overline{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}_v$ eine Potenz von p und ein Vielfaches der Ordnung von $\overline{\Lambda}|\Lambda_v$ dar[1]).

Der Kürze halber setzen wir $\mathfrak{K}_v = \mathfrak{K}$, $\Theta|\Theta_v = \Theta$. Es sei a ein beliebiges nicht zu $\mathfrak{K}$ gehöriges Element aus $\overline{\mathfrak{M}}$; dann können wir ein Element π aus $\overline{\mathfrak{m}}$ so bestimmen, daß jede Abbildung ϑ aus Θ einer Gleichung $\vartheta \cdot a = a + \pi \cdot c_\vartheta$ mit zu $\overline{\mathfrak{M}}$ gehörigem c_ϑ genügt, und daß für mindestens ein ϑ^* das Element c_{ϑ^*} den Wert 0 besitzt. Bezeichnen wir nun mit Θ_a die Gruppe aller derjenigen Abbildungen ϑ, deren zugehöriges c_ϑ durch $\overline{\mathfrak{m}}$ teilbar ist, so stellt Θ_a eine echte Untergruppe von Θ dar, und man rechnet nach dem Vorbild der üblichen Theorie der höheren Verzweigungskörper sofort nach, daß Θ_a in Θ invariant und daß die Quotientengruppe $\Theta|\Theta_a$ zu einer Additionsuntergruppe von $\overline{\mathfrak{M}}|\overline{\mathfrak{m}}$ isomorph ist. Daraus und aus Hilfssatz 5 folgt aber die Richtigkeit von Satz 4 in vollem Umfange.

§ 4. Eine Anwendung.

Die Ergebnisse von § 3 können unter Umständen dazu benutzt werden, um mit Hilfe einer einzigen Bewertung des Körpers

[1]) Allgemeine Überlegungen zeigen, daß der Grad von $\overline{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}_v$ tatsächlich ein echtes Vielfaches der Ordnung von $\overline{\Lambda}|\Lambda$ sein kann. Hier liegt im allgemeinen Fall eine Schwierigkeit, die bei ganzzahliger Bewertung B nicht auftritt.

$\mathfrak{K}$ algebraische Erweiterungskörper zu konstruieren, die über $\mathfrak{K}$ Abelsch, aber nicht zyklisch sind. Z. B. ermöglichen sie den Beweis von:

Satz 5. Es gibt Körper, über denen jede Gleichung Abelsch, aber nicht jede Gleichung zyklisch ist.

Es sei nämlich $\mathfrak{K}_0$ irgend ein algebraisch abgeschlossener Körper, A eine beliebige Additionsuntergruppe der reellen Zahlen, $\mathfrak{K}^*$ bedeute das System aller formalen Reihen $c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} + c_3 x^{r_3} + \cdots$ einer Variabeln x, bei denen die c_i dem Körper $\mathfrak{K}_0$ entnommen sind, während die r_i eine echt monotone mit i ins unendliche wachsende Folge aus A bedeuten. Dann ist zunächst $\mathfrak{K}^*$ ein Körper, wenn man für seine Elemente Addition und Multiplikation in der bei Reihen üblichen Weise definiert; wählt man ferner als Wert von $c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} + \cdots$ stets die Zahl r_1 $(c_1 \neq 0)$, so erhält man eine Bewertung B von $\mathfrak{K}$ mit der Wertgruppe A. Wir behaupten nun:

Hilfssatz 6: Bei geeigneter Wahl von A ist $\mathfrak{K}^*$ ein Körper der in Satz 5 gesuchten Art.

In der Tat, zunächst ist $\mathfrak{K}^*$ hinsichtlich der Bewertung B perfekt[1]), d. h. ist $a_1, a_2, \ldots$ eine unendliche Folge von Elementen aus $\mathfrak{K}^*$ mit der Eigenschaft, daß der Wert von $a_i - a_\varkappa$ für hinreichend großes i und $\varkappa$ größer wird als eine beliebig vorgegebene Zahl n, so besitzt die Folge der a_i in $\mathfrak{K}^*$ stets einen „Grenzwert" a, für den die Werte von $a - a_i$ mit wachsendem i ins Unendliche wachsen. Aus der Perfektheit von $\mathfrak{K}^*$ hinsichtlich B folgt aber nach bekannten Sätzen[2]), daß zu einer beliebigen endlichen normalen Erweiterung $\overline{\mathfrak{K}}^*$ von $\mathfrak{K}^*$ stets nur eine einzige Ausdehnung $\overline{B}$ von B existiert, sodaß also $\mathfrak{K}^*$ hinsichtlich $\overline{B}$ stets die Rolle des Zerlegungskörpers $\mathfrak{K}_z$ spielt. Da ferner der zu B gehörige Restklassenkörper $\mathfrak{M}|\mathfrak{m}$ offenbar zu $\mathfrak{K}_0$ isomorph, und somit algebraisch abgeschlossen ist, muß $\mathfrak{K}^*$ sogar gleich dem Trägheitskörper von $\overline{B}$ sein, und weil $\mathfrak{K}_0$ und somit auch $\mathfrak{M}|\mathfrak{m}$

[1]) Die im Texte gegebene Perfektheitsdefinition weicht, da wir eine andere Bewertungsdefinition zugrunde gelegt haben, formell von der Kürschákschen ab. Inhaltlich ist sie (bei im Ostrowskischen Sinne nichtarchimedischen Bewertungen) der Kürschákschen gleichwertig.

[2]) Vgl. den in Anm. [2]) S. 228 angegebenen Satz von Kürschák.

die Charakteristik 0 besitzt, muß $\bar{\mathfrak{K}}^*$ den Verzweigungskörper $\mathfrak{K}_v$ von $\bar{B}$ darstellen. Daraus folgt aber nach § 3:

Jede endliche algebraische Erweiterung $\bar{\mathfrak{K}}^*$ von $\mathfrak{K}^*$ ist über $\mathfrak{K}^*$ Abelsch und zwar ist $\bar{\mathfrak{K}}^*$ eindeutig bestimmt durch die Wertgruppe $\bar{\Lambda}$ der zugehörigen Ausdehnung $\bar{B}$ von B. — Bezeichnen wir mit M die Gruppe aller der reellen Zahlen, von denen ein ganzzahliges Vielfaches zu Λ gehört, so ist die Wertgruppe $\bar{\Lambda}$ stets eine Untergruppe von M, in der Λ endlichen Index besitzt. Es gilt aber auch:

Ist $\bar{\Lambda}$ keine beliebige Untergruppe von M, in der Λ endlichen Index besitzt, so gibt es stets eine endliche algebraische Erweiterung $\bar{\mathfrak{K}}^*$ von $\mathfrak{K}^*$ mit der zugehörigen Wertgruppe $\bar{\Lambda}$.

Es seien nämlich die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s$ so gewählt, daß ihre Restklassen eine Basis von $\bar{\Lambda}|\Lambda$ bilden, $p_i^{f_i} = q_i$ $(i = 1, 2, \ldots s)$ bedeute die Ordnung der durch λ_i erzeugten Restklasse. Ist dann α_i jeweils ein Element aus $\mathfrak{K}^*$ vom Werte $q_i \cdot \lambda_i$ in Λ, und setzen wir $\bar{\alpha}_i = \alpha_i^{\frac{1}{q_i}}$, so wird $\bar{\mathfrak{K}}^* = \mathfrak{K}^*(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots \bar{\alpha}_s)$ gerade ein Körper der gesuchten Art. — Da nun M mühelos so gewählt werden kann, daß Gruppen $\bar{\Lambda}$ existieren[1]), für die $\bar{\Lambda}|\Lambda$ nicht zyklisch wird, so ergibt sich aus dem zuletzt gewonnenen Resultat sofort die Richtigkeit von Hilfssatz 6 und damit die von Satz 5.

Als Nebenergebnis haben wir bei unseren letzten Untersuchungen den folgenden, wohl auch an und für sich bemerkenswerten Satz gewonnen, der offenbar ganz allgemein gilt, obwohl er nur am Beispiel des Körpers $\mathfrak{K}^*$ abgeleitet wurde:

Satz 6. Es sei der Körper $\mathfrak{K}$ hinsichtlich der Bewertung B perfekt und es sei außerdem der zu B gehörige Restklassenkörper algebraisch abgeschlossen und von der Charakteristik 0. Ferner bedeute Λ die Wertgruppe von B, M die Gruppe aller der Zahlen, von denen ein ganzzahliges Vielfaches in Λ liegt. Dann entsprechen die sämtlichen endlichen algebraischen Erweiterungen von $\mathfrak{K}$ eindeutig umkehrbar denjenigen Untergruppen $\bar{\Lambda}$ von M, in denen Λ endlichen Index besitzt. — Der $\bar{\Lambda}$ zu-

[1]) Man braucht z. B. für Λ nur eine Gruppe mit $m \geq 2$ unabhängigen Erzeugenden zu wählen.

geordnete Körper $\bar{\mathfrak{K}}$ ist normal über $\mathfrak{K}$, seine Galoisgruppe ist zu $\bar{A}|A$ isomorph, und es ist $\bar{A}$ die Wertgruppe der zu $\bar{\mathfrak{K}}$ gehörigen Ausdehnung $\bar{B}$ von B.

Satz 6 erscheint mir besonders deshalb beachtenswert, weil er leicht so verallgemeinert werden kann, daß er eine Charakterisierung der sämtlichen endlichen oder unendlichen algebraischen Erweiterungen von $\mathfrak{K}$ durch Untergruppen von M bzw. $M|A$ liefert. Zieht man dann noch die bekannte Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen[1]) heran, so ergeben sich interessante Beziehungen zwischen verschiedenen Typen von unendlichen Abelschen Gruppen, auf die ich vielleicht später zurückkommen werde.

12. XII. 30. Zusatz bei der Korrektur. Wie ich höre, wird Herr M. Deuring über die in § 1 bis § 3 behandelten Probleme eine ausführliche, wesentlich idealtheoretisch orientierte Untersuchung in den Mathematischen Annalen veröffentlichen. Unsere Arbeiten sind unabhängig voneinander entstanden.

[1]) Vgl. Krull, Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen, Math. Annalen 100 (1929).