Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1932. Heft II

Mai-Juli-Sitzung

München 1932
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über die Natur der numerischen Koeffizienten in den expliziten Darstellungen der Potenzsummen durch die elementarsymmetrischen Verbindungen, und vice versa.

Herrn A. v. Brill zum 90. Geburtstage (20. September 1932) gewidmet.

Von **W. Franz Meyer** in Königsberg, Ostpr.

Vorgelegt von W. v. Dyck in der Sitzung vom 4. Juni 1932.

Nr. 1. Aus n unabhängigen Variabeln $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ bilde man als die einfachsten symmetrischen Funktionen einmal die elementarsymmetrischen Verbindungen $e_1 = \Sigma\lambda_i$, $e_2 = \Sigma\lambda_i\lambda_k, \ldots e_n = \lambda_1 \ldots \lambda_n$, andererseits die r^{ten} Potenzsummen $s = \Sigma\lambda_i^r$ $(r = 1, 2, \ldots n)$. Dann bestehen die in den s und e je linearen Newtonschen Rekursionsformeln:

$$(1) \qquad s_r = e_1 s_{r-1} - e_2 s_{r-2} + e_3 s_{r-3} - + \ldots + (-1)^{r-1}\, r e_r.$$

Denkt man sich diese Formeln für $r = 1, 2, \ldots n$ aufgestellt und nach den s resp. e aufgelöst, so erscheinen, wie es die Lehrbücher erwähnen, die s explizite als n-reihige Determinanten durch die e dargestellt, und vice versa die e durch die s.

Nach Entwicklung der Determinanten werden die s resp. e zu Formen der Potenzprodukte der e resp. s, deren Struktur unschwer erkennbar ist. Die Aufgabe kommt daher darauf hinaus, beidemal das Bildungsgesetz der absoluten numerischen Koeffizienten zu ermitteln.

Diese beiden Gesetze werden am übersichtlichsten, wenn man jene Koeffizienten, wie es bei den Polynomialkoeffizienten geschieht, in Form von Brüchen schreibt, deren Zähler und Nenner sich aus Fakultäten und Potenzen als Faktoren zusammensetzen.

Nr. 2. Aus den Rekursionsformeln (1) geht, wie vollständige Induktion ohne weiteres erkennen läßt, eine explizite Darstellung von s_n in den $e_1, e_2, \ldots e_n$ als Form der Potenzprodukte $e_1^{i_1} e_2^{i_2} \ldots e_n^{i_n}$ $(i_k \geqq 0)$ mit der Struktur hervor:

$$(2)\qquad s_n = \Sigma\,(-1)^{i_2+i_4+i_6+\ldots}\, c^{(n)}_{i_1, i_2, \ldots i_n}\, e_1^{i_1} e_2^{i_2} \ldots e_n^{i_n}.$$

Hier ist die rechte Seite eine isobare Form der e, d. h. es besteht für die Exponenten und Indizes die Gewichtsbedingung:

$$(3)\qquad 1 i_1 + 2 i_2 + 3 i_3 + \ldots + n i_n = n,$$

während die c die gesuchten numerischen Koeffizienten sind.

Man greife irgendein Glied rechts von (2) heraus. Da man e-Potenzen mit verschwindendem Exponenten unterdrücken kann, so schreibe man das Potenzprodukt in der Gestalt $e_a^{i_a} e_b^{i_b} e_c^{i_c} \ldots$ $(i_k > 0)$, wo die Indizes in irgendeiner Folge genommen seien. Die Summe der Exponenten i_k werde mit t bezeichnet, und der zu den i_k gehörige Polynomialkoeffizient $\frac{t!}{i_a!\, i_b!\, i_c!} = \frac{t!}{\prod\limits_a i_a!}$, mit $\{i_a, i_b, i_c, \ldots\}$.

Untersucht man dann den zugehörigen c-Koeffizienten der Reihe nach für Potenzprodukte der Typen $e_a^{i_a}$, $e_a^{i_a} e_b^{i_b}$, $e_a^{i_a} e_b^{i_b} e_c^{i_c}$ usf., und innerhalb eines jeden Typus der Reihe nach für die Einzelfälle $i_a = 1, 2, 3, \ldots$, so gelangt man durch unvollständige Induktion zu der Formel:

$$(\mathrm{I})\qquad c^{(n)}_{i_a, i_b, i_c, \ldots} = \{i_a, i_b, i_c \ldots\}\,\frac{n}{t}.$$

Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt. Das Gesetz (I) sei richtig bis zu irgendeinem Werte von n, so soll gezeigt werden, daß es auch für den nächstfolgenden Wert gilt.

Zunächst überträgt sich die Rekursionsformel (1) für $r = n$ auf die Koeffizienten c in der Gestalt:

$$(4)\qquad c^{(n)}_{i_a, i_b, i_c, \ldots} = c^{(n-a)}_{i_a-1, i_b, i_c \ldots} + c^{(n-b)}_{i_a, i_b-1, i_c, \ldots} + \ldots,$$

wo rechts der obere Index jeweils das zugehörige Gewicht angibt; in der Tat ist z. B.

$$a\,(i_a - 1) + b i_b + c i_c + \ldots = n - a.$$

Auf die rechts stehenden c-Koeffizienten darf das Gesetz (I) als gültig angewendet werden. Dadurch geht (4) über in:

$$(5)\qquad c^{(n)}_{i_a, i_b, i_c, \ldots} = \{i_a - 1, i_b, i_c, \ldots\}\,\frac{n-a}{t-1} + \{i_a, i_b - 1, i_c, \ldots\}\,\frac{n-b}{t-1} + \ldots$$

Setzt man hier für die Polynomialkoeffizienten ihre Werte ein und erweitert die Glieder rechts der Reihe nach mit i_a, i_b, $i_c \ldots$, so erhält man:

$$(5') \qquad c^{(n)}_{i_a, i_b, i_c, \ldots} = \frac{(t-1)!}{(i_a-1)!\, i_b!\, i_c! \ldots} \cdot \frac{n-a}{t-1} \cdot \frac{i_a}{i_a} + \frac{(t-1)!}{i_a!\,(i_b-1)!\, i_c! \ldots}$$

$$\cdot \frac{n-b}{t-1} \cdot \frac{i_b}{i_b} + \ldots = \frac{(t-2)!}{i_a!\, i_b!\, i_c! \ldots} \, [i_a(n-a) + i_b(n-b) + \ldots].$$

Hier formt sich der Ausdruck innerhalb der eckigen Klammer um wie folgt:

$$\begin{aligned} i_a(n-a) + i_b(n-b) + \ldots &= n(i_a + i_b + \ldots) - (a\, i_a + b\, i_b + \ldots) \\ &= nt - n = n(t-1). \end{aligned}$$

Damit geht (5') über in:

$$(5'') \qquad c^{(n)}_{i_a, i_b, i_c, \ldots} = \frac{(t-1)!}{i_a!\, i_b!\, i_c! \ldots} \cdot n = \frac{t!}{i_a!\, i_b!\, i_c! \ldots} \cdot \frac{n}{t} = \{i_a, i_b, i_c, \ldots\} \cdot \frac{n}{t},$$

das ist aber das Gesetz (I) für das Gewicht n, das größer ist als alle Teilgewichte $n-a$, $n-b, \ldots$ Für die niedrigsten Fälle $n = 1, 2, 3$ bestätigt sich das Gesetz ohne weiteres: $s_1 = e_1$, $s_2 = e_1^2 - 2e_2$, $s_3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3$.

Setzt man (I) in (2) ein und läßt der Gleichförmigkeit halber wieder die e-Potenzen mit dem Exponenten Null zu, so hat man als definitives Ergebnis (sog. Wringsche Formel):

Die n^{te} Potenzsumme s_n stellt sich als isobare Form der e_1, $e_2, \ldots e_n$ vom Gewichte n dar in der Gestalt:

$$(\mathrm{I}') \qquad s_n = \Sigma\, (-1)^{i_2 + i_4 + i_6 + \ldots} \{i_1, i_2, i_3, \ldots i_n\} \frac{n}{t} \cdot e_1^{i_1} e_2^{i_2} \ldots e_n^{i_n},$$

wo $t = \Sigma\, i_h$.

Ist im besondern n eine Primzahl p, so tritt p in allen Koeffizienten c als Faktor hervor — mit Ausnahme des ersten, von e_1^n, wo c den Wert 1 hat —, da p im Nenner nicht auftritt. So haben die c für $p = 3$ den Wert 3, für $p = 5$ den Wert 5, für $p = 7$ bei $e_1^3 e_2^2$ und $e_1 e_2 e_4$ den Wert 7.2, bei $e_1^2 e_2 e_3$ den Wert 7.3, im übrigen aber den Wert 7 selbst, usf.

Eine einzelne Folgerung aus dieser Teilbarkeit der c durch p ist die, daß auch $s_p - e_1^p = s_p - s_1^p$ durch p teilbar ist; dies kommt aber auf den bekannten Satz zurück, daß die zu p gehörigen Polynomialkoeffizienten, ausgenommen die der p^{ten} Potenzen, durch p teilbar sind.

Nr. 3. An das Gesetz (I) knüpft sich noch eine Reihe von Bemerkungen.

Zunächst ist ersichtlich, daß keiner der c-Koeffizienten verschwindet. Somit tritt in (I') jedes Potenzprodukt der e vom Gewichte n auch wirklich auf.

Gibt man ferner in (I') irgendeiner der Urvariabeln, etwa λ_n, den Wert Null, so daß nur $n-1$ unabhängige Variable $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$ verbleiben, so verschwindet e_n, während s_n und die $e_1, e_2, \ldots e_{n-1}$ in die entsprechenden Bildungen für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$ übergehen. Gibt man weiter in der vorangehenden Entwicklung (I') für s_{n-1} wiederum einem der λ, etwa λ_{n-1}, den Wert Null, so verschwindet e_{n-1}, während s_{n-1} und die $e_1, e_2, \ldots e_{n-2}$ ihre Bedeutung für $n-2$ Variable $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-2}$ behalten. Fährt man so fort, so ergibt sich die bekannte Regel: „Setzt man in den Entwicklungen (I') der Reihe nach für $s_n, s_{n-1}, \ldots s_r$ $(r \geqq 2)$, die $e_n, e_{n-1}, \ldots e_r$ gleich Null, so ergeben sich die entsprechenden Darstellungen für s_r in den $e_1, e_2, \ldots e_{r-1}$ für $r-1$ Urvariable $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{r-1}$."

Endlich beachte man noch, daß man die in (I') auftretenden negativen Vorzeichen formal entfernen kann, indem man statt der e die „alternierenden elementarsymmetrischen Verbindungen ε'', wo $\varepsilon_r = (-1)^{r-1} e_r$, $(r = 1, 2, \ldots n)$ ist, einführt. Dann werden von selbst sämtliche Vorzeichen positiv.

Nr. 4. Verwickelter gestaltet sich die umgekehrte Aufgabe, die e explizite durch die s auszudrücken.

Da sich zeigt, daß erst die Entwicklung von $n!\, e_n$ zu ganzzahligen Koeffizienten der Potenzprodukte der s führt, bringe man in (1) das Glied mit ne_n auf die eine Seite und multipliziere dann beide Seiten mit $(n-1)!$ Damit nimmt die Rekursionsformel (1), für $r = n$, die Gestalt an:

$$(1') \qquad n!\, e_n = s_1 \{(n-1)!\, e_{n-1}\} - (n-1)\, s_2 \{(n-2)!\, e_{n-2}\} + (n-1)(n-2)\, s_3 \{(n-3)!\, e_{n-3}\} - + \ldots$$

Hieraus ergibt sich, ähnlich wie in Nr. 2, durch vollständige Induktion $n!\,e_n$ als eine isobare Form der s, mit dem Gewichte n, von der Struktur:

$$(6) \qquad n!\,e_n = \Sigma(-1)^{k_2+k_4+\cdots}\, d^{(n)}_{k_1,k_2,\ldots k_n}\, s_1^{k_1} s_2^{k_2} \ldots s_n^{k_n}\ (k_i \geqq 0),$$

wo die Exponenten k der Gewichtsbedingung genügen:

$$(7) \qquad 1\,k_1 + 2\,k_2 + \ldots + nk_n = n,$$

und die d-Koeffizienten ganze, positive Zahlen sind, deren Bildungsgesetz zu ermitteln ist.

Indem wir wiederum, wie in Nr. 2, Potenzen mit dem Exponenten Null vorerst beiseite lassen, uns also auf Potenzprodukte $s_a^{k_a} s_b^{k_b} s_c^{k_c} \ldots (k_r > 0)$ beschränken, untersuchen wir die d-Koeffizienten der Reihe nach für die Potenzprodukte der Typen $s_a^{k_a}$, $s_a^{k_a} s_b^{k_b}$, $s_a^{k_a} s_b^{k_b} s_c^{k_c}$, usf. und innerhalb eines jeden Typus wiederum für die Einzelfälle $k_a = 1, 2, 3, \ldots$ Damit entsteht durch unvollständige Induktion die Formel:

$$(\mathrm{II}) \qquad d^{(n)}_{k_a,k_b,k_c,\ldots} = \frac{n!}{k_a!\,k_b!\,k_c!\ldots} \cdot \frac{1}{a^{k_a}\, b^{k_b}\, c^{k_c}\ldots}$$

Der Beweis wird, wie in Nr. 2, durch vollständige Induktion geführt; das Gesetz (II) sei richtig für die Gewichte $1, 2, \ldots n-1$, so soll gezeigt werden, daß es auch für das nächsthöhere Gewicht n gilt.

Zunächst überträgt sich die Rekursionsformel (1′) auf die d-Koeffizienten wie folgt:

$$(8) \qquad d^{(n)}_{k_a,k_b,k_c,\ldots} = \sum_a (n-1)(n-2)\ldots(n-a+1)\, d^{(n-a)}_{k_a-1,k_b,k_c,\ldots}$$

Auf die rechts stehenden d-Koeffizienten darf, da alle Gewichte $< n$ sind, das Gesetz (II) angewendet werden. Damit erhält man zunächst für irgendeinen der d-Koeffizienten rechts von (8):

$$(9) \qquad d^{(n-a)}_{k_a-1,k_b,k_c,\ldots} = \frac{(n-a)!}{(k_a-1)!\,k_b!\,k_c!\ldots} \cdot \frac{1}{a^{k_a-1}\, b^{k_b}\, c^{k_c}\ldots}.$$

Multipliziert man hier gemäß (8) jeweils mit dem Faktor $(n-1)(n-2)\ldots(n-a+1)$ und erweitert den Bruch noch mit ak_a und addiert, so geht (8) über in:

$$(10)\quad d^{(n)}_{k_a, k_b, k_c\ldots} = \frac{(n-1)!}{k_a!\,k_b!\,k_c!\ldots}\cdot\frac{1}{a^{k_a}b^{k_b}c^{k_c}\ldots}(ak_a+bk_b+ck_c+\ldots)$$
$$= \frac{n!}{k_a!\,k_b!\,k_c!\ldots}\cdot\frac{1}{a^{k_a}\,b^{k_b}\,c^{k_c}\ldots}.$$

Das ist aber das Gesetz (II) für das Gewicht n. In den niedrigsten Fällen $n = 1, 2, 3$: $e_1 = s_1$, $2!\,e_2 = s_1^2 - s_2$, $3!\,e_3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3$ bestätigt sich das Gesetz (II) direkt.

Der Faktor $\frac{n!}{k_a!\,k_b!\,k_c!\ldots}$ möge, in Analogie zum Polynomialkoeffizienten, als „Ponderalkoeffizient $[k_a, k_b, k_c, \ldots]$" bezeichnet werden.

Führt man hinterher, der Gleichförmigkeit halber, wieder sämtliche Exponenten k_i ($k_i \geqq 0$) ein, so schreibt sich (II) in der Gestalt:

$$(\mathrm{IIa})\qquad d^{(n)}_{k_1, k_2, k_3, \ldots k_n} = [k_1, k_2, \ldots k_n]\cdot\frac{1}{1^{k_1}\,2^{k_2}\ldots n^{k_n}},$$

und die Entwicklung wird definitiv zu:

$$(\mathrm{II}')\quad n!\,e_n = \Sigma(-1)^{k_2+k_4+\cdots}[k_1, k_2, \ldots k_n]\cdot\frac{1}{1^{k_1}\,2^{k_2}\ldots n^{k_n}}\cdot s_1^{k_1}s_2^{k_2}\ldots s_n^{k_n},$$

mit der Bedingung (7).

Nr. 5. An das Gesetz (II) knüpfen sich einige formentheoretische Bemerkungen.

Zunächst ist ersichtlich, daß alle d-Koeffizienten natürliche Zahlen (>0) sind, daß also in der Entwicklung (II′) sämtliche Potenzprodukte $s_1^{k_1}\,s_2^{k_2}\ldots s_n^{k_n}$, die die Gewichtsbedingung (7) befolgen, auch wirklich auftreten.

Sodann läßt sich auf beiden Seiten von (II′) formal der Faktor $n!$ unterdrücken, so daß die modifizierte Entwicklung entsteht:

$$(\mathrm{II}'\mathrm{b})\quad e_n = \Sigma(-1)^{k_2+k_4+\cdots}\frac{1}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!\,1^{k_1}\,2^{k_2}\ldots n^{k_n}}\cdot s_1^{k_1}s_2^{k_2}\ldots s_n^{k_n}.$$

Diese scheinbar einfachere Schreibweise wird aber damit erkauft, daß jetzt die numerischen Koeffizienten rechterhand keine ganzen Zahlen mehr sind, sondern echte Stammbrüche.

Will man weiter, ähnlich wie in Nr. 2, in (II′) die auftretenden negativen Vorzeichen formal entfernen, so führe man statt der s die „alternierenden Potenzsummen σ“ ein, wo $\sigma_r = (-1)^{r-1} s_r$ $(r = 1, 2 \ldots n)$ ist; alsdann treten nur positive Vorzeichen auf:

$$(\mathrm{II'c}) \qquad n!\, e_n = \Sigma\, [k_1, k_2, \ldots k_n] \cdot \frac{1}{1^{k_1}\, 2^{k_2} \ldots n^{k_n}} \cdot \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{k_2} \ldots \sigma_n^{k_n}.$$

Gibt man ferner, wie in Nr. 2, irgendeinem der λ, etwa λ_n, den Wert Null, so verschwindet links von (II′) e_n, während rechts die $s_1, s_2, \ldots s_n$ ihre Bedeutung für die verbleibenden Variabeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$ behalten. Setzt man dann in der vorangehenden Entwicklung wiederum eines der λ, etwa λ_{n-1} gleich Null, so verschwindet links e_{n-1}, während rechts die $s_1, s_2, \ldots s_n$ die Potenzsummen der verbleibenden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-2}$ werden. Fährt man so fort bis zur Entwicklung für e_{k+1} $(k < n)$, so ergibt sich ein System von $n-k$ Relationen zwischen den $s_1, s_2, \ldots s_n$ für k Variable $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$:

$$(11) \quad 0 = \Sigma (-1)^{k_2 + k_4 + \cdots} [k_1, k_2 \ldots k_r] \cdot \frac{1}{1^{k_1} 2^{k_2} \ldots r^{k_r}} \cdot s_1^{k_1} s_2^{k_2} \ldots s_r^{k_r}$$
$$(r = k + 1, k + 2, \ldots n).$$

Diese $n-k$ Relationen sind ersichtlich voneinander unabhängig, da, von unten herauf betrachtet, bei jedem Wachsen des Gewichtsindex um eine Einheit ein neues s hinzutritt.

Diese $n-k$ Relationen lassen sich noch auf eine andere Art gewinnen.

Man gehe aus von den k Definitionsgleichungen der $s_1, s_2, \ldots s_n$ in k Variabeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$:

$$(12) \qquad s_1 = \Sigma\lambda_i,\ s_2 = \Sigma\lambda_i^2, \ldots s_n = \Sigma\lambda_i^n \ (i = 1, 2, \ldots k),$$

und denke sich aus ihnen die λ eliminiert.

Dadurch gelangt man zu einem System von $n-k$ unabhängigen Resultantengleichungen in den $s_1, s_2, \ldots s_n$. Dann ist klar, daß dieses System mit dem in (11) erhaltenen gleichwertig ist. Damit ergibt sich der Satz:

„Erteilt man in den Entwicklungen (II′) für die Gewichte $k+1, k+2, \ldots n$ irgend $n-k$ der Urvariabeln λ und damit auch den $e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots e_n$ die Werte Null, so ergibt sich zwischen den Potenzsummen $s_1, s_2, \ldots s_n$ der verbleibenden k Variabeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ ein System von $n-k$ unabhängigen Relationen (11). Dieses System ist gleichwertig mit dem aus den Gleichungen $s_r = \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i^r$ $(r = 1, 2, \ldots n)$ durch Elimination der λ hervorgehenden."

Nr. 6. Nunmehr mögen aus dem Gesetze (II) noch einige zahlentheoretische Folgerungen gezogen werden.

Daß der Zähler $n!$ des Ponderalkoeffizienten $[k_1, k_2, \ldots k_n] = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}$ $(n = k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n)$ durch den Nenner teilbar ist, geht direkt daraus hervor, daß $t = \Sigma k_i \leq n$, und der Zähler $t!$ des Polynomialkoeffizienten $\{k_1, k_2, \ldots k_n\} = \frac{t!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}$ durch den Nenner teilbar ist.

Aus (II) ersieht man aber weiter, da gemäß (1') die d natürliche Zahlen sind, daß der Ponderalkoeffizient durch den Restfaktor $\prod_r r^{k_r}$ des Nenners teilbar sein muß.

Es gilt also der Satz:

„Der Ponderalkoeffizient $[k_1, k_2, \ldots k_n]$ ist durch das Potenzprodukt $\prod_{r=1}^{r=n} r^{k_r}$ teilbar." Dieser Satz läßt sich auch so formulieren, daß er vom Begriffe des Potenzproduktes $s_1^{k_1} s_2^{k_2} \ldots s_n^{k_n}$ frei wird. Er lautet dann:

„Liegen zwei Reihen von gleichvielen, einander zugeordneten positiven Zahlen b_i und a_i vor, wo die a alle voneinander verschieden seien, so ist die ganze Zahl $\frac{(\Sigma a_i\, b_i)!}{\prod_r a_r!}$ durch das Produkt $\prod_r a_r^{b_r}$ teilbar."

Endlich ist, ähnlich wie in Nr. 2, für die Entwickelung (II') der Sonderfall zu beachten, wo n eine Primzahl p ist. Dann ist, mit Ausnahme des ersten d-Koeffizienten, von s_1^p, wo $d = 1$, und des letzten, von s_p, wo $d = (p-1)!$, jeder d-Koeffizient durch p teilbar, da p im Zähler, nicht aber im Nenner als Faktor vorkommt.

Es gilt also der Satz:

„Im Falle eines Primzahlgewichtes $n = p$ ist, mit Ausnahme des ersten Koeffizienten, von s_1^p, und des letzten, von s_p, jeder d-Koeffizient in (II′) durch p teilbar."

Hieraus läßt sich als einzelne Folgerung entnehmen, daß die Zahl $p!\,e_p - s_1^p - (p-1)!\,s_p$, und damit auch die Zahl $s_1^p + (p-1)!\,s_p$ durch p teilbar wird. Dies kommt aber auf den Wilsonschen Satz: $(p-1)! \equiv -1 \mod p$ hinaus.

Nr. 7. Die bisherigen Betrachtungen mögen eine weitere Anwendung finden auf die häufig vorkommende symmetrische Funktion $q_n = \Sigma\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\lambda_n^{i_n}$ der Dimension n ($\Sigma i_l = n$). Es sollen sowohl die Rekursionsformeln aufgestellt werden, die irgendein q mit den e resp. s verknüpfen, wie die expliziten Darstellungen des q durch die e resp. s.

Nach sukzessiver Untersuchung der Einzelfälle $r = 1, 2, 3 \ldots$ findet man durch unvollständige Induktion die Formel, für r Variable $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$:

$$(13e)\quad q_r = e_1 q_{r-1} - e_2 q_{r-2} + e_3 q_{r-3} - + \ldots + (-1)^{r-1} e_r q_0 \;(q_0 = 1).$$

Der Beweis wird durch vollständige Induktion erbracht: (13e) gelte für $r = 1, 2, \ldots n-1$, so ist die Richtigkeit für $r = n$ zu zeigen.

Zu dem Behuf greife man irgendein Potenzprodukt $\lambda_a^{i_a}\lambda_b^{i_b}\lambda_c^{i_c}\ldots$ ($i_l > 0$), mit $\Sigma i_l = n$, aus q_n heraus und frage wie oft es in der rechten Seite von (13e) für $r = n$:

$$(14)\qquad e_1 q_{n-1} - e_2 q_{n-2} + e_3 q_{n-3} - + \ldots + (-1)^{n-1} e_n q_0$$

vorkommt. Die Anzahl der $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c \ldots$ sei u. Entsprechend der Struktur der e und von (14) spalte man aus $\lambda_a^{i_a}\lambda_b^{i_b}\lambda_c^{i_c}\ldots$ der Reihe nach zunächst einzelne λ-Faktoren λ_1 ab, sodann Produkte $\lambda_1\lambda_2$ zu je zweien usf. bis zum Produkte $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_u$. Man bestimme die Anzahl dieser Abspaltungsmöglichkeiten, nehme sie mit alternierenden Vorzeichen und addiere.

Ein Produkt vom Typus $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m$ ($1 \leqq m \leqq u$) läßt sich $\binom{u}{m}$-mal abspalten. Somit erhält die gewünschte alternierende Summe den Wert:

$$\binom{u}{1}-\binom{u}{2}+\binom{u}{3}-\ldots+(-1)^{u-1}\binom{u}{u},$$

der bekanntlich gleich Eins ist (wie aus der Entwicklung von $(1-1)^u=0$ hervorgeht).

Somit tritt ein jedes Potenzprodukt $\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}$ $(i_l\geqq 0)$ der Dimension n in q_n genau so oft, nämlich einmal, auf, wie in (14); dies liefert aber gerade die Rekursionsformel (13e) für $r=n$.

Aus (13e) läßt sich die explizite Entwicklung der q durch die e ableiten. Verfährt man wie in Nr. 2, so gelangt man durch unvollständige Induktion zu der Formel:

$$\text{(IIIe)}\qquad q_n=\Sigma(-1)^{i_2+i_4\cdots}\{i_1,i_2,\ldots i_n\}\cdot e_1^{i_1}e_2^{i_2},\ldots e_n^{i_n}\ (i_l\geqq 0)$$

mit der Gewichtsbedingung (3):

$$1i_1+2i_2+\ldots+ni_n=n.$$

Der Beweis folgt sofort, gemäß (13e), aus der bekannten Formel für Polynomialkoeffizienten:

$$\text{(15)}\qquad \{i_1-1,i_2,\ldots\}+\{i_1,i_2-1,i_3,\ldots\}+\ldots+\{i_1,i_2,\ldots i_{n-1},i_n-1\}$$
$$=\{i_1,i_2,\ldots i_n\},$$

unter Berücksichtigung des Anfangswertes $q_0=1$.

Die Ähnlichkeit der Entwicklungen (IIIe) und (I′) fällt ins Auge. In (I′) war der absolute numerische Koeffizient von $e_1^{i_1}e_2^{i_2}\ldots e_n^{i_n}$ der mit $\frac{n}{t}$ (wo $t=\Sigma i$) multiplizierte Polynomialkoeffizient $\{i_1, i_2,\ldots i_n\}$, während bei (IIIe) der Faktor $\frac{n}{t}$ fehlt. Der innere Grund dieser Erscheinung ist der, daß die Rekursionsformeln zwischen den s und e einerseits, den q und e andererseits in der Struktur übereinstimmen, mit Ausnahme des letzten Gliedes, wo bei s_r das Produkt re_r auftritt, bei q_r aber nur e_r selbst.

Dies kommt darauf hinaus, daß — für r Variable λ — der Anfangswert $s_0=r$ ist, dagegen der Anfangswert $q_0=1$.

Im übrigen knüpfen sich an die Gesetze (13e) und (IIIe) analoge Bemerkungen an, wie in Nr. 2 und Nr. 3 an (1) und (I′), nur mit dem einen Unterschiede, daß jetzt, in (IIIe), im Falle einer Primzahl $n=p$ keiner der Polynomialkoeffizienten $\{i_1, i_2,\ldots i_p\}$ durch p teilbar ist. Ist hingegen n keine Primzahl, so kann eine solche Teilbarkeit durch n vereinzelt wohl vorkommen. So hat man z. B. für $n = 6$: $\{2, 2\} = 6$.

Nr. 8. Wir gehen über zum Zusammenhange zwischen den q und s.

Durch unvollständige Induktion gelangt man zu der Rekursionsformel für r Variable $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$:

$$(13s) \qquad r q_r = s_1 q_{r-1} + s_2 q_{r-2} + \ldots + s_r q_o \; (q_o = 1).$$

Der Beweis wird wiederum durch vollständige Induktion geführt: (13s) gelte für $r = 1, 2, \ldots n - 1$, es wird gezeigt, daß es auch für $r = n$ richtig ist. Sei $\lambda_a^{k_a} \lambda_b^{k_b} \lambda_c^{k_c} \ldots (k_l > 0, \; \Sigma k_l = n)$ irgendein Potenzprodukt der λ in q_n; man frage, wie oft es in der rechten Seite von (13s) für $r = n$:

$$(16) \qquad s_1 q_{n-1} - s_2 q_{n-2} + \ldots + s_r q_o \; (q_o = 1)$$

auftritt.

Gemäß der Struktur der e und von (16) in den λ spalte man aus dem Potenzprodukte, soweit jeweils möglich, der Reihe nach die ersten, zweiten usf. Potenzen von λ'_s ab und summiere sodann die Anzahlen dieser Abspaltungsmöglichkeiten.

Dieser Prozeß läßt sich aber auch in anderer Anordnung vornehmen. Man spalte vorerst aus der ersten Potenz $\lambda_a^{k_a}$ die Faktoren $\lambda_a, \lambda_a^2, \ldots \lambda_a^{k_a}$ ab, sodann aus der zweiten Potenz $\lambda_b^{k_b}$ die Faktoren $\lambda_b, \lambda_b^2, \ldots \lambda_b^{k_b}$ usf. bis zur letzten Potenz.

Die Anzahlen dieser Absonderungen sind ersichtlich k_a, k_b, $k_c, \ldots$, mithin ist deren Summe gleich n. Hieraus geht hervor, daß jedes dieser Potenzprodukte n-mal so oft vorkommt wie in q_n, d. i. aber die Rekursionsformel (13s) für $r = n$.

Aus (13s) geht die explizite Entwicklung hervor:

$$(\text{IIs}) \quad n!\, q_n = \Sigma\, [k_1, k_2, \ldots k_n] \cdot \frac{1}{1^{k_1} 2^{k_2} \ldots n^{k_n}} \cdot s_1^{k_1} s_2^{k_2} \ldots s_n^{k_n} \, (k_l \geqq 0),$$

mit der Gewichtsbedingung (7) $1 k_1 + 2 k_2 + \ldots + n k_n = n$. Der Beweis ergibt sich sofort aus der Vergleichung von (13s) mit (1'), und von (IIs) mit (II'b).

Denn nach Einführung der $\sigma_r = (-1)^{r-1} s_r \; (r = 1, 2, \ldots n)$ in (1') weisen beide Rekursionsformeln (1') und (13s) dieselbe Struktur auf und gehen ineinander über durch Vertauschung der e_r mit den q_r; überdies besitzen e_r und q_r denselben Anfangswert $e_0 = q_0 = 1$.

Im übrigen lassen sich analoge Folgerungen ziehen wie in Nr. 5 und Nr. 6.

Mai 1932.

A.v. Brill zum 90. Geburtstage (20. Sept.1932) gewidmet 87-98