

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen  
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
zu München

---

1932. Heft II

Mai-Juli-Sitzung

---

München 1932

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung



# Die Hauptaufgabe der Photogrammetrie.

Von S. Finsterwalder.

Vorgetragen in der Sitzung vom 7. Mai 1932.

Die Hauptaufgabe besteht in der Herstellung eines ähnlichen Raummodelles des dargestellten Gegenstandes aus zwei Lichtbildern mit bekannter innerer Orientierung und setzt das Zusammenpassen der zu den Bildern gehörigen (bilderzeugenden) Strahlenbündel in der Weise voraus, daß entsprechende, zu gleichen Raumpunkten gehörige Strahlen der beiden Bündel sich schneiden. Die Gesamtheit der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zusammen mit den beiden Bündelmittelpunkten liefert dann das gesuchte ähnliche Raummodell mitsamt den photographischen Standpunkten.<sup>1</sup> Durch die Entwicklung der Nadirtriangulation, die in ihrer einfachsten Anwendung nur den Grundriß des Raummodelles liefert und durch die optisch-mechanische Lösung der Hauptaufgabe mittels der neuzeitlichen Kartierungsgeräte<sup>2</sup> ist das Interesse an der rechnerischen Lösung dieser Aufgabe in der letzten Zeit zurückgetreten, obwohl die Hauptaufgabe auch bei der Nadirtriangulation, sobald diese auch die Höhenverhältnisse erfassen soll, eine ausschlaggebende Rolle spielt. Ganz besonders ist die rechnerische Behandlung in den Fällen nicht zu entbehren, wo die Weitwinkligkeit des Aufnahmeapparates die unmittelbare Verwendung eines Kartierungsgerätes nicht erlaubt und die vorausgehende Umbildung der weitwinkligen Aufnahmen für diesen Zweck erfordert. Aber auch die Beurteilung der Sicherheit, mit der die Lösung der Hauptaufgabe unter den jeweils gegebenen Umständen erfolgen kann, läßt die Weiterbildung der rechnerischen Lösung angezeigt erscheinen. Endlich gestattet die Lösung der Haupt-

<sup>1</sup> Eine rechnerische Lösung erfolgte zuerst in den Abhandlungen der K. Bayer. Akad. d. Wiss. II Kl. XXII. Bd. II. Abt. 1903 S. 225—260. S. Finsterwalder: Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen (mit 2 Tafeln).

<sup>2</sup> Hierüber die wichtige Veröffentlichung von O. v. Gruber: Einfache und Doppelpunkteinschaltung im Raum. Jena 1924.

Sitzungsab. d. math.-naturw. Abt. 1932. II

aufgabe auch noch eine Prüfung der Richtigkeit der Perspektive des zur Abbildung verwendeten Linsensystemes. Wenn nämlich die Perspektive nicht richtig ist, also Gerade nicht immer in Gerade abgebildet werden, oder die innere Orientierung der erzeugten Bilder falsch angenommen wurde, so ist das Zusammenpassen der beiden Strahlenbündel und somit die Lösung der Hauptaufgabe nicht möglich. Wenn auch bei Einzelkammern die Prüfung der Perspektive und der inneren Orientierung auf unmittelbare Art leicht und genau erfolgen kann, so ist das bei den weitwinkligen Vielfachkammern keineswegs der Fall und außerdem gewährt eine noch so sorgfältige Untersuchung dieser Kammern in der Werkstätte noch keine Sicherheit für die Richtigkeit der Perspektive bei der Luftaufnahme selbst, da dort die gegenseitige Lage der Einzelkammern und die Gleichzeitigkeit der Momentverschlüsse von der jeweiligen Temperatur und andern Einflüssen abhängig sein kann. Eine Prüfung der Perspektive mittels eines Paares hintereinander gemachter Aufnahmen aus der Luft ist daher sehr erwünscht.

Wir beginnen mit der Ableitung einiger sehr einfacher Formeln, mittels deren wir die Hauptaufgabe behandeln wollen. Zu diesem Ende betrachten wir die beiden bilderzeugenden Strahlenbündel in ihrem natürlichen Zusammenhang mit dem abzubildenden Gegenstand und nehmen zu ihnen die Verbindungslinie beider Standpunkte (Basis oder Kernachse), die in beiden Bündeln die Rolle eines sich selbst entsprechenden Strahles spielt. Wir denken uns beide Bündel durch eine gemeinsame Bildebene im Abstand  $f$  (gleich Bildweite) von der Kernachse und parallel zu ihr geschnitten und die zugehörigen Bildpunkte jeweils auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, das seinen Ursprung im jeweiligen Hauptpunkt der Bildebene hat und dessen  $X$ -Achse der Kernachse parallel ist. Es liegen dann die Schnittpunkte der Kernachse mit (den hier zusammenfallenden) Bildebenen, also die Kernpunkte unendlichfern auf der  $X$ -Achse und die Kernebenen, die durch die Kernachse und einen Gegenstandspunkt bestimmt sind, schneiden die Bildebene nach Kernstrahlen, die zur  $X$ -Achse parallel sind. Das Zusammenpassen der bilderzeugenden Strahlenbündel drückt sich dann in der Gleichheit der  $Y$ -Koordinaten entsprechender Bildpunkte aus

und der Keil  $\alpha$ , den die durch den Gegenstandspunkt gehende Kernebene mit der zur Bildebene senkrechten Kernebene einschließt, wird durch die Beziehung:  $\operatorname{tg} \alpha = y : f$  gegeben.

Dieser Idealfall ist annähernd verwirklicht, wenn bei Luftaufnahmen der Flieger möglichst waagrecht fliegt und seine Aufnahmen möglichst senkrecht nach unten macht. Dann werden die Kernpunkte zweier zusammengehöriger Aufnahmen stets sehr weit draußen liegen und dementsprechend die Kernachsen mit der Bildebene einen kleinen Winkel  $\psi$  einschließen. Die Ent-

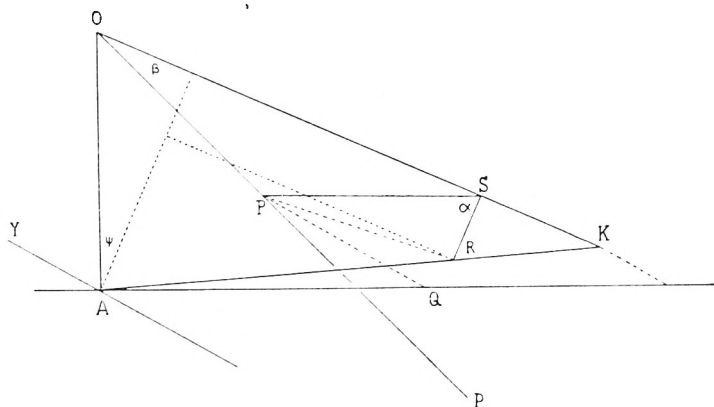


Fig. 1.

fernung des Kernpunktes  $K$  vom Hauptpunkt  $A$  der Aufnahme ist dann:  $KA = f \cot \psi$ . Schließt die Richtung nach dem Kernpunkt mit der auf dem Bild zunächst beliebig festgelegten  $x$ -Achse den Winkel  $\chi$  ein, so sind die Kernpunktskoordinaten:  $x_k = f \cot \psi \cos \chi$  und  $y_k = f \cot \psi \sin \chi$ . Vgl. Fig. 1. Fällt man vom Bildpunkt  $P$  mit den Koordinaten  $AQ = x$  und  $QP = y$  ein Lot  $PR$  auf  $AK$ , so wird  $PR = y \cos \chi - x \sin \chi$  und  $AR = x \cos \chi + y \sin \chi$ . Wird nun in der Ebene  $OAK$  ( $O$  Standp. bzw. Perspektivmittelpunkt gegenüber der Bildebene) von  $R$  aus das Lot  $RS$  auf die Kernachse  $OK$  gefällt, so ist  $RS = f \cos \psi - AR \sin \psi$ . Der Keil  $\alpha$ , den die Kernebene  $OPS$  mit der Lotenebene  $AOK$  einschließt, ist durch die Formel gegeben:

$$(1) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{PR}{RS} = \frac{y \cos \chi - x \sin \chi}{f \cos \psi - (x \cos \chi + y \sin \chi) \sin \psi}.$$

Man kann aber ein für die logarithmische Rechnung geeigneteres Formelsystem ableiten, wenn man den Winkel  $\angle PKA = \varphi + \chi$  einführt, wobei  $\operatorname{tg} \varphi = (y - y_k) : (x_k - x)$  ist. Es wird dann  $\operatorname{tg} \alpha = PR : RS = RK \operatorname{tg} (\varphi + \chi) : RK \sin \psi = \operatorname{tg} (\varphi + \chi) : \sin \psi$ .

$$(2) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y - y_k}{x_k - x}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} (\varphi + \chi)}{\sin \psi}.$$

Das Formelsystem wird nur dann unbequem, wenn bei kleinem  $\psi$  der Punkt  $P$  nahe an  $AK$  liegt, was dann die Kleinheit von  $\varphi + \chi$  nach sich zieht.

Die Formel 1), welche in aller Strenge gültig ist, soll nun für den Fall umgeformt werden, daß die Winkel  $\psi$  und  $\chi$  klein sind. Die Kleinheit von  $\chi$  setzt voraus, daß die  $X$ -Achse genähert nach der Linie  $AK$  gerichtet ist. Handelt es sich um die Bilder eines annähernd ebenen Geländes, so bekommt man eine genäherte Richtung für  $AK$ , wenn man den Bildmittelpunkt  $A$  mit jenem Punkt verbindet, der dem Bildmittelpunkt des gegnerischen Bildes entspricht, vorausgesetzt, daß beide Aufnahmen fast senkrecht nach unten gemacht sind. Hat jedoch der dargestellte Gegenstand ein starkes Relief, so kann man auf dem ersten Bild die Richtung  $AK$  dadurch finden, daß man um  $A$  eine Gerade solange dreht, bis die zu ihren Bildpunkten gehörigen Gegenpunkte auf dem zweiten Bild wieder auf einer Geraden liegen (die aber in der Regel nicht durch den zweiten Bildmittelpunkt geht). In dieser Lage geht dann die Gerade durch den Kernpunkt  $K$  der ersten Aufnahme.<sup>1</sup> Wenn man auf diese Weise die Vorbedingung für die Kleinheit der Winkel  $\psi$  und  $\chi$  (etwa  $< 2^\circ$ ) geschaffen hat, kann man die Formel 1) für den Keil  $\alpha$  dadurch vereinfachen, daß man die Kosinus dieser Winkel gleich der Einheit und die Sinus und Tangenten gleich den Winkeln

---

<sup>1</sup> Dieses Verfahren kann auch noch zur graphischen Bestimmung des Kernpunktes  $K$  erweitert werden. Man dreht um zwei passend gelegene Punkte  $P$  und  $N$  des ersten Bildes je eine Gerade solange, bis die Gegenpunkte der Bildpunkte dieser Geraden im zweiten Bild wieder auf je einer Geraden liegen. Die beiden so bestimmten Geraden durch  $P$  und  $N$  schneiden sich dann im Kernpunkt  $K$  des ersten Bildes, so wie ihre Gegengeraden im zweiten Bild in dem Kernpunkt dieses zweiten Bildes. Bei einem fast ebenen Gegenstand versagt dieses Verfahren zur Auffindung der Kernpunkte, weil dann jeder Geraden des einen Bildes nahezu eine Gerade des andern Bildes entspricht.

setzt und außerdem die Produkte und höheren Potenzen der Winkel vernachlässigt. Man erhält so:

$$(3) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y - x\chi}{f - x\psi} = \frac{y}{f} + \frac{xy}{f^2} \psi - \frac{x}{f} \chi.$$

Da für  $\psi = \chi = 0$   $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{f}$  ist, sind nach 3:  $\frac{\partial \operatorname{tg} \alpha}{\partial \psi} = \frac{xy}{f^2}$  und  $\frac{\partial \operatorname{tg} \alpha}{\partial \chi} = -\frac{x}{f}$ . Nun ist aber  $\frac{d \operatorname{tg} \alpha}{d \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{f^2 + y^2}{f^2}$  für  $\psi = \chi = 0$ . Daraus folgt:  $\frac{\partial \alpha}{\partial \psi} = \frac{xy}{f^2 + y^2}$ ,  $\frac{\partial \alpha}{\partial \chi} = -\frac{xf}{f^2 + y^2}$  und endlich:

$$(4) \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{f} = \frac{xy}{f^2 + y^2} \psi - \frac{xf}{f^2 + y^2} \chi.$$

Das ist eine sehr nützliche Näherungsformel zur Berechnung der Keile zwischen einer beliebigen und der zur Bildebene senkrechten Kernebene. Mit ihrer Hilfe läßt sich die Hauptaufgabe bequem auf ein System von 5 linearen Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten zurückführen. Sind nämlich auf dem ersten Bild 5 Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_5$  durch ihre Koordinaten  $xy$  und auf dem zweiten Bild die 5 entsprechenden Punkte  $P'_1, P'_2, \dots, P'_5$  durch ihre Koordinaten  $x'y'$  gegeben und werden die zugehörigen Kernebenenkeile mit  $\alpha$  und  $\alpha'$  bezeichnet, so drückt sich die Kongruenz der zu beiden Bildern gehörigen Kernebenenbüschel, die Voraussetzung des Zusammenpassens der entsprechenden Fünfstrahlenbündel beider Aufnahmen ist, durch Gleichungen von folgender Form aus:

$$(5) \quad \alpha_i + \frac{x_i y_i}{f^2 + y_i^2} \psi - \frac{x_i f}{f^2 + y_i^2} \chi = \alpha'_i + \frac{x'_i y'_i}{f^2 + y_i'^2} \psi' - \frac{x'_i f}{f^2 + y_i'^2} \chi' + \lambda$$

$i = 1, 2, \dots, 5.$

Hierin bedeutet:  $\alpha_i = \operatorname{arctg} \frac{y_i}{f}$  und  $\alpha'_i = \operatorname{arctg} \frac{y'_i}{f}$ .  $\lambda$  ist der Keil, den die beiden zu den jeweiligen Bildebenen senkrechten Ausgangsebenen der Zählung der Keile  $\alpha$  und  $\alpha'$  miteinander einschließen. Die Gleichungen 5) gestatten im allgemeinen eine eindeutige Bestimmung der 5 Unbekannten  $\psi, \chi, \psi', \chi', \lambda$ , von

denen die Lösung der Hauptaufgabe der Photogrammetrie abhängt.

Nur wenn die Determinante der Beiwerte der Unbekannten verschwindet, versagt die Lösung. Es liegt dann ein sogenannter „gefährlicher Fall“ vor, der vermieden werden muß und durch geeignete Wahl der zum Zusammenpassen benützten Bildpunktpaare auch meist vermieden werden kann. Liegen mehr als 5 zusammengehörige Bildpunktpaare vor, so wird man eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate in der Art vornehmen, daß die Summe der Quadrate der Unterschiede beider Gleichheitsseiten zu einem Minimum wird. Nach Elimination von  $\lambda$  kommt man mit der Bildung und Lösung von 4 Normalgleichungen für die übrigen Unbekannten aus. Bei der praktischen Durchführung der Ausgleichsrechnung geht man am besten so vor, daß man zuerst für 5 günstig gewählte Punktpaare die Näherungsgleichungen 5) bildet und auflöst. Die dabei gewonnenen Werte setzt man sodann in die strengen Formeln 2) oder 1) ein und rechnet daraus die Keile  $\alpha$  und  $\alpha'$ , die in die Gleichungen 5) eingesetzt fünf von ihnen fast erfüllen, während der Rest noch Abweichungen aufweist. Die Gleichungen für die kleinen Veränderungen der Unbekannten, die noch nötig sind, um alle Gleichungen 5) möglichst zu befriedigen, unterscheiden sich von den Gleichungen 5) nur in den konstanten Gliedern, während die Beiwerte der Unbekannten die gleichen wie in den Gleichungen 5) bleiben können. Nur bei größeren  $\chi$ -Werten kann sich gelegentlich eine Neubestimmung der Beiwerte auf Grund einer Koordinatenumformung in der Bildebene als nötig erweisen.

Wir wenden uns nun zum Sonderfall des fast ebenen Geländes, der für die Anwendung besonders wichtig ist.<sup>1</sup> Hier sind die in nahezu gleicher Flughöhe aufgenommenen Bilder dem Geländegrundriß fast ähnlich und unter sich nahezu gleich groß; sie sind nur gegen den jeweiligen Bildmittelpunkt verschoben. Wählen wir nun die fünf zum Zusammenpassen nötigen

---

<sup>1</sup> Ansätze zur Betrachtung dieses Sonderfalles finden sich in der Anmerkung 21 zu der Akademiefestrede vom 15. Nov. 1916: Alte und neue Hilfsmittel der Landesvermessung. Von S. Finsterwalder. München 1917. S. 28.

Punkte so, wie es in Fig. 2 angedeutet ist, so lassen sich ihre Koordinaten bis auf kleine Reste durch drei Größen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ausdrücken, in welcher Form sie zur Berechnung der Beiwerte der Korrektionsgrößen  $\psi$  und  $\chi$  genügen.

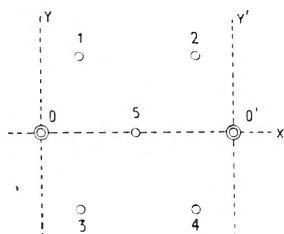


Fig. 2.

|    | $x$     | $y$  | $x'$       | $y'$ |
|----|---------|------|------------|------|
| 1) | $c - a$ | $b$  | $-(c + a)$ | $b$  |
| 2) | $c + a$ | $b$  | $-(c - a)$ | $b$  |
| 5) | $c$     | 0    | $-c$       | 0    |
| 3) | $c - a$ | $-b$ | $-(c + a)$ | $-b$ |
| 4) | $c + a$ | $-b$ | $-(c - a)$ | $-b$ |

Die fünf linearen Gleichungen zur Ermittlung der Unbekannten  $\psi$   $\chi$   $\psi'$   $\chi'$   $\lambda$  lauten jetzt folgendermaßen, wobei  $x^2 = f^2 + b^2$  gesetzt ist.

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \frac{(c-a)b}{x^2} \psi - \frac{(c-a)f}{x^2} \chi = \alpha'_1 - \frac{(c+a)b}{x^2} \psi' + \frac{(c+a)f}{x^2} \chi' + \lambda \\ \alpha_2 + \frac{(c+a)b}{x^2} \psi - \frac{(c+a)f}{x^2} \chi = \alpha'_2 - \frac{(c-a)b}{x^2} \psi' + \frac{(c-a)f}{x^2} \chi' + \lambda \\ \alpha_5 - \frac{c}{f} \chi = \alpha'_5 + \frac{c}{f} \chi' + \lambda \\ \alpha_3 - \frac{(c-a)b}{x^2} \psi - \frac{(c-a)f}{x^2} \chi = \alpha'_3 + \frac{(c+a)b}{x^2} \psi' + \frac{(c+a)f}{x^2} \chi' + \lambda \\ \alpha_4 - \frac{(c+a)b}{x^2} \psi - \frac{(c+a)f}{x^2} \chi = \alpha'_4 + \frac{(c-a)b}{x^2} \psi' + \frac{(c-a)f}{x^2} \chi' + \lambda. \end{array} \right.$$

Dabei sind die  $\alpha$  und  $\alpha'$  aus den genauen  $Y$ -Koordinaten mittels der Formel  $\operatorname{tg} \alpha = y : f$  zu rechnen, während die in der obigen Tafel angegebenen  $Y$ -Werte ( $b$  bzw.  $-b$ ) durch Mittelung der sämtlichen  $Y$ -Werte entstanden sein mögen. In diesem Falle sind sowohl die Differenzen  $\alpha - \alpha'$  wie auch die 5. Unbekannte

$\lambda$  kleine Größen. Die Gleichungen lassen eine einfache Auflösung zu, wobei sich die Unbekannten linear durch die Differenzen  $\alpha - \alpha'$  ausdrücken. Durch Bildung der Gleichungen 1)–3) und 2)–4) eliminiert man  $\chi$ ,  $\chi'$  und  $\lambda$ , worauf sich die Unbekannten  $\psi$  und  $\psi'$  folgendermaßen berechnen lassen:

$$\psi = \frac{\kappa^2}{8abc} \{ (\alpha_1 - \alpha'_1 - \alpha_3 + \alpha'_3) (c - a) - (\alpha_2 - \alpha'_2 - \alpha_4 + \alpha'_4) (c + a) \}$$

$$\psi' = \frac{\kappa^2}{8abc} \{ (\alpha_2 - \alpha'_2 - \alpha_4 + \alpha'_4) (c - a) - (\alpha_1 - \alpha'_1 - \alpha_3 + \alpha'_3) (c + a) \}.$$

Durch Bildung der Gleichungen 1) + 3) – 2  $\times$  5) und 2) + 4) – 2  $\times$  5) werden  $\psi$ ,  $\psi'$  und  $\lambda$  entfernt und man erhält:

$$\chi = \frac{-\kappa^2}{8ab^2cf} \{ (\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha'_1 + \alpha'_3) (af^2 + cb^2) + (\alpha_2 - \alpha_4 - \alpha'_2 + \alpha'_4) (af^2 - cb^2) - 4(\alpha_5 - \alpha'_5) af^2 \}$$

$$\chi' = \frac{\kappa^2}{8ab^2cf} \{ (\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha'_1 + \alpha'_3) (af^2 - cb^2) + (\alpha_2 - \alpha_4 - \alpha'_2 + \alpha'_4) (af^2 + cb^2) - 4(\alpha_5 - \alpha'_5) af^2 \}.$$

Setzt man dann  $\chi$  und  $\chi'$  in die 5. Gleichung ein, so ergibt sich  $\lambda$ .

$$\lambda = -(\alpha_5 - \alpha'_5) \frac{f^2}{b^2} + \frac{\kappa^2}{4b^2} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha'_1 - \alpha'_2 - \alpha'_3 - \alpha'_4).$$

Aus den so ermittelten Werten der Unbekannten lassen sich nun auf einfache Weise deren mittlere Fehler gewinnen. Die Unbekannten sind linear durch die 10 Keile  $\alpha$  und  $\alpha'$  ausgedrückt, die wiederum von den gemessenen Bildkoordinaten abhängen und zwar in erster Annäherung nur von den  $y$ -Koordinaten. Statt diese Abhängigkeit bei der Fehlerrechnung zu berücksichtigen, was an sich nicht schwer fiele, kann man auch die  $\alpha$  und  $\alpha'$  als direkt gemessene Größen behandeln. Da  $d\alpha = \frac{f dy}{f^2 + y^2}$  ist, werden, wenn man  $d\alpha$  proportional den  $dy$  setzt, die Messungen in der Bildmitte ( $y=0$ ) bevorzugt, was sie auch wegen der größeren Bildschärfe verdienen. Bezeichnet man demnach den mittleren Fehler eines  $\alpha$  oder  $\alpha'$  mit  $m$ , so berechnet sich der mittlere Fehler  $m_{\psi}$  von  $\psi$  oder  $\psi'$  aus der Beziehung:

$$m_{\psi}^2 = m_{\psi'}^2 = \left( \frac{\kappa^2}{8abc} \right)^2 \{ 4m^2(c-a)^2 + 4m^2(c+a)^2 \}$$

woraus

$$(7a) \quad m_{\psi} = m_{\psi'} = \frac{mk^2}{4abc} \sqrt{2(a^2+c^2)} \text{ folgt.}$$

Ähnlich wird:

$$\begin{aligned} m_{\kappa}^2 = m_{\kappa'}^2 &= \left( \frac{\kappa^2}{8ae^2bf} \right)^2 \{ 4m^2(af^2+cb^2)^2 + 4m^2(af^2-cb^2)^2 \\ &\quad + 2m^2(4af^2)^2 \} = \left( \frac{m\kappa^2}{4ab^2cf} \right)^2 2(c^2b^4+5a^2f^4) \end{aligned}$$

und

$$(7b) \quad m_{\kappa} = m_{\kappa'} = \frac{mb^2}{4ab^2cf} \sqrt{2(c^2c^4+5a^2f^4)}$$

Endlich:

$$m_{\lambda}^2 = 2m^2 \frac{f^4}{b^4} + 8m^2 \frac{\kappa^4}{16b^4} = \frac{m^2}{4b^4} (8f^4 + 2\kappa^4)$$

und

$$(7c) \quad m_{\lambda} = \frac{m}{2b^2} \sqrt{2(4f^4 + \kappa^4)}$$

Als Beispiel sei der Fall  $c=a$ ,  $b=2a$  gewählt, der bei Nadirtrian-  
gulation auftritt, wenn quadratisches Bildformat und 50% Über-  
deckung vorausgesetzt wird.  $\kappa^2=f^2+4a^2$

$$\begin{aligned} m_{\psi} = m_{\psi'} &= \frac{f^2+4a^2}{4a^2}, \quad m_{\kappa} = m_{\kappa'} = \frac{m(f^2+4a^2)}{16a^3f} \sqrt{2(16a^4+5f^4)}, \\ m_{\lambda} &= \frac{m}{8a^2} \sqrt{2(4f^4+(f^2+4a^2)^2)}. \end{aligned}$$

Während  $m_{\psi}$ ,  $m_{\psi'}$  und  $m_{\lambda}$  mit  $f$  abnehmen, werden  $m_{\kappa}$  und  $m_{\kappa'}$  für  $f=0$  unendlich groß, was dem Umstand entspricht, daß zwei ebene Strahlenbündel in einer gemeinsamen Ebene beliebig verschoben und gedreht werden können, ohne daß die entsprechenden Strahlen aufhören sich zu schneiden. Das Minimum von  $m_{\kappa}$  liegt nahe bei  $f=a$ , wozu ein Bildfeldwinkel von  $90^\circ$  gehört. Ein noch größerer Bildfeldwinkel ist also für die Sicherheit des Zusammenpassens ungünstig.

Auch bei dem Sonderfall des fast ebenen Geländes sind „gefährliche Unterfälle“ wohl zu beachten, bei deren Eintreffen

die Lösung versagt. Die wichtigsten sind die in Fig. 3 angedeuteten, wenn vier Paßpunkte einen zur Kernachse symmetrischen Rhombus bilden, dessen Mittelpunkt der 5. Paßpunkt ist, oder wenn drei von den 5 Paßpunkten auf der einen und die beiden andern auf einer zweiten Parallelen zur Kernachse liegen. In diesem Falle hebt auch ein sechster Paßpunkt auf einer der beiden Parallelen die Unbestimmtheit der Lösung nicht auf. Diese ungünstigen Fälle verraten sich wieder bei Bildung der Determinante der Beiwerte der Unbekannten, welche verschwindet.

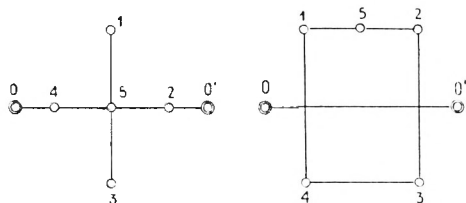


Fig. 3.

Wir wenden uns nun wieder dem allgemeinen Fall zu und beschäftigen uns mit der Aufgabe der Wiederherstellung des dargestellten Gegenstandes, nachdem die zum Zusammenpassen der Strahlenbündel erforderlichen fünf Unbekannten bereits gefunden sind. Wir führen dazu ein rechtwinkliges Raumkoordinatensystem ein, dessen Ursprung in die Mitte der beiden Standpunkte  $OO'$  fällt und dessen  $\Xi$ -Achse die Richtung  $OO'$  hat. Die  $\Xi Z$ -Ebene wählen wir so, daß sie mit den Blickrichtungen (= Kammerachsen) gleiche spitze Winkel  $\lambda$  einschließt. Die Kernebene eines Raumpunktes  $P$  schließt dann mit der  $\Xi Z$ -Ebene einen Keil  $\gamma = \alpha - \frac{\lambda}{2} = \alpha' + \frac{\lambda}{2}$  ein. In der Kernebene liegt das Dreieck  $\overline{OPO'}$ . Die Winkel der Dreiecksseiten mit der  $\Xi$ -Achse sind  $\beta$  und  $\beta'$  (vgl. Fig. 1), welche den bilderzeugenden Strahlenbündeln zu entnehmen sind. Aus ihnen rechnet sich die Höhe  $\rho$  des Dreiecks  $\overline{OPO'}$  zu  $\rho = g \sin \beta \sin \beta' : \sin (\beta' - \beta)$  und die Entfernung  $\xi$  des Höhenfußpunktes von der Basismitte zu  $\xi = g \sin (\beta + \beta') : 2 \sin (\beta' - \beta)$  wobei  $g = OO'$  die Basislänge bedeutet. Die weiteren Koordinaten ergeben sich dann zu  $\eta = \rho \sin \gamma$  und  $\xi = \rho \cos \gamma$ . Zur Berechnung der Winkel  $\beta$  und  $\beta'$  dienen die Formeln (vgl. Fig. 1):

$$(8) \quad \begin{cases} \sin \beta = \frac{PS}{OP} = \frac{SR}{OP \cos \alpha} = \frac{f \cos \psi - (x \cos \chi + y \sin \chi) \sin \psi}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2} \cos \alpha} \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{y \cos \chi - x \sin \chi}{f \cos \psi - (x \cos \chi + y \sin \chi) \sin \psi} \\ \cos \beta = \frac{OS}{OP} = \frac{f \sin \psi + (x \cos \chi + y \sin \chi) \cos \psi}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}} \end{cases}$$

Wir setzen wie früher wieder die Kleinheit von  $\psi$  und  $\chi$  voraus und erhalten mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + f^2}$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y - x\chi}{f - x\psi} = \frac{y}{f} \left( 1 + \frac{x}{f} \psi - \frac{x}{y} \chi \right),$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{r}{f} \left( 1 + \frac{xy^2}{f^2} \psi - \frac{xy}{\chi^2} \chi \right) \quad \text{mit } \chi^2 = f^2 + y^2$$

$$\sin \beta = \frac{f - x\psi}{r \cos \alpha} = \frac{f}{r} \left( 1 - \frac{x}{f} \psi \right) \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{r}{r} \left( 1 - \frac{xf}{\chi^2} \psi - \frac{xy}{\chi^2} \chi \right),$$

$$\cos \beta = \frac{x + f\psi + y\chi}{r} = \frac{x}{r} \left( 1 + \frac{f}{x} \psi + \frac{y}{\chi} \chi \right)$$

$$\sin (\beta + \beta') = \frac{\chi \chi' + x \chi'}{r r'} \left( 1 + \frac{\chi \chi' - x \chi'}{\chi \chi' + x \chi'} \left\{ \frac{f\psi + y\chi}{\chi} + \frac{f\psi' + y'\chi'}{\chi'} \right\} \right)$$

$$\sin (\beta' - \beta) = \frac{x \chi' - x' \chi}{r r'} \left( 1 + \frac{\chi \chi' + x \chi'}{\chi \chi' - x' \chi} \left\{ \frac{f\psi + y\chi}{\chi} - \frac{f\psi' + y'\chi'}{\chi'} \right\} \right)$$

Hieraus folgt:

$$(9) \quad \begin{cases} \xi = \frac{9x\chi' + x'\chi}{2x\chi' - x'\chi} - \frac{g}{(x\chi' - x'\chi)^2} \left\{ \frac{x'\chi' r^2 f\psi + y\chi}{\chi} - \frac{x\chi r'^2 f\psi' + y'\chi'}{\chi'} \right\} \\ \rho = \frac{g\chi\chi'}{x\chi' - x'\chi} - \frac{g}{(x\chi' - x'\chi)^2} \left\{ \frac{\chi'^2 r^2 f\psi + y\chi}{\chi} - \frac{\chi^2 r'^2 f\psi' + y'\chi'}{\chi'} \right\} \end{cases}$$

Hierzu treten  $\eta = \rho \sin \gamma$ ,  $\xi = \rho \cos \gamma$ , wo  $\gamma = \alpha - \frac{\lambda}{2} = \alpha' + \frac{\lambda}{2}$  und

$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{f} + \frac{xy}{\chi^2} \psi - \frac{xf}{\chi^2} \chi$  ist. Diese Formeln sind zwar weder sehr

genau, noch auch in der Anwendung besonders bequem, aber sie lassen den Einfluß veränderter Paßgrößen  $\psi$ ,  $\chi$  usw. auf einfache Weise ermitteln, wobei allerdings nicht zu übersehen ist, daß diese Größen als Lösungen der Gleichungen 5) untereinander verkoppelt sind.

Es folgen zum Schlusse noch Angaben über zwei Rechenbeispiele, die zu dem Zwecke durchgeführt wurden, die

Richtigkeit der Perspektive einer neunlinsigen Panoramakammer auf unmittelbare Weise zu prüfen. Dazu sind zwei Paare von umgebildeten Aufnahmen benützt und auf ihnen die Koordination von je neun zusammengehörigen Punkten ausgemessen worden, nachdem vorher die jeweilige X-Achse des Systems nach der Richtung gegen den Kernpunkt eingestellt war. Die Bildweite ist in beiden Beispielen  $f = 53,18\text{ mm}$ . Das erste Paar stellt wildes Hochgebirge aus dem Ostkarwendel dar und ist mit „Inntal und Vomperloch“ (II 2c und II 3l) be-

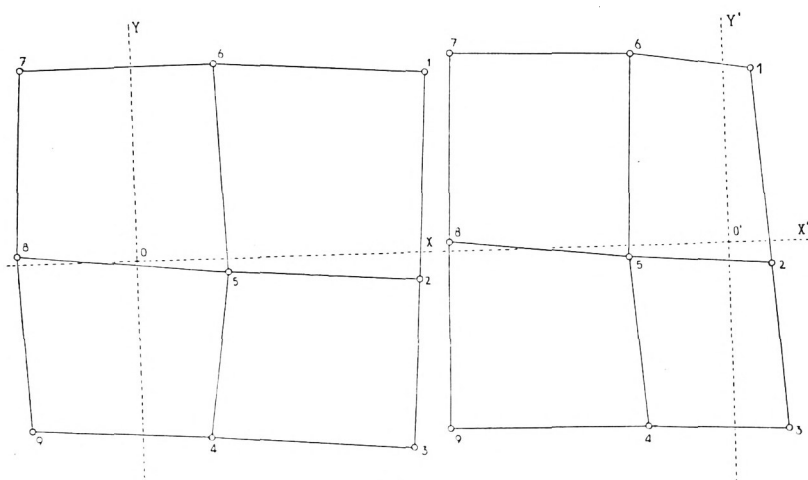


Fig. 4.

zeichnet. Die Aufnahme erfolgte aus etwa 4300m Seehöhe, das Gelände hat über 2000m Höhenunterschiede und die Basislänge  $OO'$  ist mit 4000m so groß, daß bei den meisten Punkten ein Stereoeffekt zur Erfassung der Zusammengehörigkeit kaum mehr gegeben war. Das zweite Paar mit „München Süd“ (W-O 4 u. W-O 6) bezeichnet betrifft ein fast ebenes Gelände, das aus 2450m Seehöhe von den Enden einer 4700 langen Basis aufgenommen wurde. Obwohl bei dem ungewöhnlich großen Basisverhältnis der parallaktische Winkel an den Geländepunkten bis zu  $100^\circ$  ansteigt, ist bei den geringen Höhenunterschieden allenthalben Stereoeffekt vorhanden. Die Aufnahmen sowie die Ausmessung auf den umgebildeten Originalnegativen verdanke ich den Herren Dr. Gürtler und Dr. Aschenbrenner der GmbH.

Photogrammetrie in München,<sup>1</sup> die sie mir bereitwilligst zur Verfügung gestellt haben. Die Ausmessungsergebnisse sind in nachstehenden Tabellen niedergelegt. Bei der Berechnung der 5 Unbekannten wurden zuerst die Gleichungen 5) für die fünf Punkte, die mit ungeraden Ziffern bezeichnet sind, aufgestellt und aufgelöst. Sie ergaben bei „Inntal und Vomperloch“ die Ausgangswerte:  $\psi = 54,3'$ ,  $\chi = -91,3'$ ,  $\psi' = -69,3'$ ,  $\chi' = -93,8'$  bei „München Süd“:  $\psi = 65,3'$ ,  $\chi = -31,0'$ ,  $\psi' = 38,9'$ ,  $\chi' = -21,2'$ . In der Fig. 4 sind die Messungsergebnisse von „Inntal und

Inntal und Vomperloch.  
Koordinaten in mm;  $f = 53,18$  mm

|    | $y$    | $x$    | $y'$   | $x'$    |
|----|--------|--------|--------|---------|
| 1. | 70,85  | 115,23 | 67,95  | 11,35   |
| 2. | -10,75 | 110,32 | -8,65  | 16,99   |
| 3. | -76,65 | 106,28 | -73,58 | 21,53   |
| 4. | -69,75 | 26,52  | -71,00 | -34,00  |
| 5. | -55,22 | 35,90  | -4,09  | -38,80  |
| 6. | 76,60  | 32,71  | 75,62  | -36,11  |
| 7. | 75,80  | -43,32 | 78,55  | -106,87 |
| 8. | 3,00   | -46,46 | 3,70   | -109,36 |
| 9. | -65,40 | -42,69 | -69,45 | -111,31 |

München-Süd.

|    | $y$    | $x$    | $y'$   | $x'$    |
|----|--------|--------|--------|---------|
| 1. | 70,86  | 109,32 | 73,99  | -13,93  |
| 2. | -6,55  | 115,84 | -5,76  | -8,51   |
| 3. | -57,29 | 124,83 | -57,83 | 0,37    |
| 4. | -66,39 | 65,33  | -67,33 | -62,80  |
| 5. | 2,30   | 68,54  | 3,45   | -58,47  |
| 6. | 71,14  | 65,69  | 74,57  | -58,80  |
| 7. | 86,44  | 17,53  | 91,66  | -110,69 |
| 8. | 0,98   | 12,90  | 2,13   | -115,93 |
| 9. | -70,93 | 21,36  | -72,67 | -109,94 |

<sup>1</sup> Von Herrn Dr. Aschenbrenner stammt der Entwurf der Panoramenkammer, deren Ausführung durch die Firma C. A. Steinheil Söhne von der GmbH. Photogrammetrie in München unter der Leitung von Herrn Dr. Gürtler veranlaßt wurde. Vgl. Cl. Aschenbrenner: Neue Geräte und Methoden usw. Bildmessung und Luftbildwesen, 4. Jahrg. 1929 S. 30.

Vomperloch“ graphisch dargestellt. Die gemessenen Punkte sind durch Linien verbunden und die starke Verschiedenheit der dabei entstehenden Bilder auf beiderlei Aufnahmen zeigt bereits deutlich die großen Höhenunterschiede des zugehörigen Geländes. Bei den Aufnahmen von „München Süd“ sind solche Verschiedenheiten mit bloßem Auge kaum zu erkennen entsprechend der Ebenheit des Geländes. Die Punktverteilung ist aus Fig. 6 zu ersehen. Mit den vorhin mitgeteilten Ausgangswerten wurden alsdann die Keile  $\alpha$  und  $\alpha'$  aus den Formeln 2) neuerdings vierstellig auf Minuten genau gerechnet und die Gleichungen 5) für alle neun Punktpaare neu gebildet. Die Quadratsumme der Abweichungen, die zu einem Minimum zu machen war, betrug bei Inntal und Vomperloch 142, bei München-Süd 116. Die Auflösung der Normalgleichungen brachte diese Beträge auf 64 bzw. 65 zurück. Mit Rücksicht auf die jeweils vier überschüssigen Fehlergleichungen rechnet sich der mittlere Fehler zu  $\sqrt{64:4} = \pm 4'$ . Das ist also die mittlere Differenz der Keile der aus beiden Aufnahmen gerechneten Kernebenbüschel. Die extremen Werte waren beim ersten Paar  $5'$ , beim zweiten  $4,5'$ . Auf den einzelnen Keil trifft daher ein mittlerer Fehler von  $\pm 4':\sqrt{2} = 2,8'$ . Dem entspricht bei  $f = 53,18 \text{ mm}$  eine lineare Meßgenauigkeit von  $0,044 \text{ mm}$  in der Mitte des Bildfeldes. Man sieht hieraus, bis zu welchem Grade von Genauigkeit die Instrierung der neunlinsigen Panoramenkammer bereits gediehen ist. Diese  $0,044 \text{ mm}$  entsprechen der Meßgenauigkeit der Koordinaten auf dem noch nicht umgebildeten Negativ der Originalaufnahme und in ihnen sind die Identifikationsfehler und sonstige Fehler noch enthalten. Die entsprechenden Fehler auf dem umgebildeten Negativ, auf dem die Messungen wirklich vorgenommen wurden, wachsen in der Richtung quer zum Radius vom Mittelpunkt aus linear mit dem Verhältnis  $f':f$ , in der radialen Richtung selbst im quadratischen Verhältnis also mit  $f'^2:f^2$ , wobei  $f'$  die sogenannte schiefe Bildweite bedeutet. Am Rande des umgebildeten Negativs ist  $f':f = 2,64$  und  $f'^2:f^2 = 7$ . Die zugehörigen Fehler sind dann  $0,12$  und  $0,31 \text{ mm}$ . Die gefundenen Werte stellen den optischen Werken C. A. Steinheil Söhne und deren Leiter Herrn Dipl.-Ing. Ludwig Franz, den Erbauern der Panoramenkammer und des Umbildgerätes, ein ehrendes Zeugnis aus.

Als Schlußergebnis der Ausgleichung finden sich folgende Größen:

für Inntal und Vomperloch:

$$\psi = 56,03', \chi = -92,52', \psi' = -69,05', \chi' = -98,20', \lambda = -59,40'$$

für München Süd:

$$\psi = 63,14', \chi = -27,80', \psi' = 37,18', \chi' = -22,64', \lambda = 5,95'.^1$$

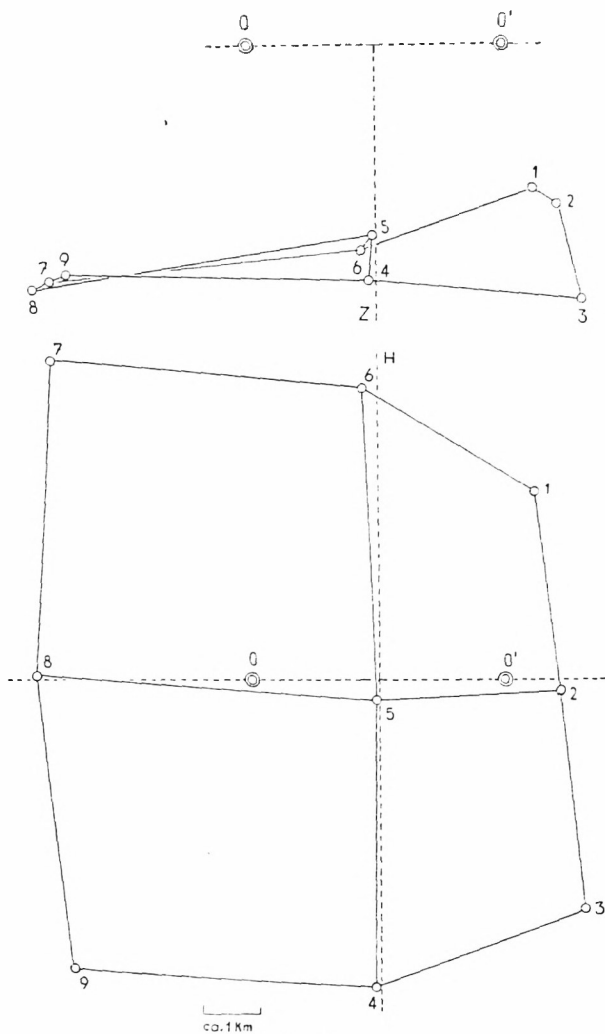


Fig. 5.

<sup>1</sup> Die mittleren Fehler der Unbekannten bewegen sich zwischen  $z'$  und  $3'$ .

Als Abschluß der Ausgleichungsrechnung sollen noch die Koordinaten des Paßpunkte im Zusammenhang mit den Standpunkten in der Luft bestimmt werden, wozu die Formeln 8 geeignet sind. Die Figuren 5 und 6 geben die entsprechende Darstellung im Grund- und Aufriß. Während in Fig. 5 alle 9 Punkte nahezu in einer Ebene parallel zur Basis  $OO'$  liegen, treten im

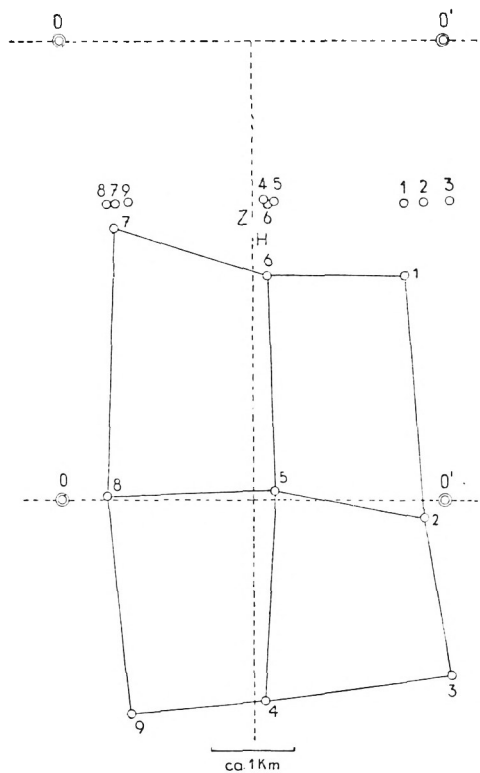


Fig. 6.

Aufriß der Fig. 5 die Geländeunebenheiten deutlich hervor. Punkt 1 liegt im Schafkar zwischen Hochglück und Schafkarspitze, Punkt 2 an den Hängen des Rauhen Knoll, Punkt 3 am Haukampfl, Punkt 4 ober Stans auf der nördlichen Innaltterrasse, Punkt 5 am Südfuß des Niedernissl, Punkt 6 im Vomperloch bei der Mündung des Ödkarbaches, Punkt 7 und 8 im Inntal bei Baumkirchen und Weer und Punkt 9 auf der südlichen Innaltterrasse oberhalb Pill.

## Koordinatenverzeichnis

Inntal und Vomperloch

München-Süd

|    | $\xi$   | $\eta$  | $\zeta$ | $\xi$   | $\eta$  | $\zeta$ |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0  | —0,5000 | 0       | 0       | —0,5000 | 0       | 0       |
| 0' | 0,5000  | 0       | 0       | 0,5000  | 0       | 0       |
| 1  | 0,6104  | 0,7293  | 0,5560  | 0,3929  | 0,5847  | 0,4239  |
| 2  | 0,7087  | —0,0893 | 0,6105  | 0,4443  | —0,0464 | 0,4211  |
| 3  | 0,8015  | —0,8972 | 0,6617  | 0,5144  | —0,4560 | 0,4188  |
| 4  | —0,0266 | —1,1972 | 0,9168  | 0,0276  | —0,5236 | 0,4179  |
| 5  | —0,0195 | —0,0768 | 0,7388  | 0,0548  | 0,0227  | 0,4208  |
| 6  | 1,1397  | —0,0649 | 0,8018  | 0,0382  | 0,5856  | 0,4290  |
| 7  | —1,2910 | —1,2597 | 0,8990  | —0,3576 | 0,7040  | 0,4294  |
| 8  | —1,3553 | 0,0216  | 0,9388  | —0,3822 | 0,0090  | 0,4286  |
| 9  | —1,2170 | —1,1335 | 0,8751  | —0,3230 | —0,5594 | 0,4189  |

Die in der vorstehenden Untersuchung rechnerisch ausgewiesene Genauigkeit der Panoramenkammer stellt aus verschiedenen Gründen nur eine untere Grenze der bei der Geländeaufnahme erzielbaren und bereits erzielten Genauigkeit dar. Sie drückt sich in den Koordinaten der Geländepunkte durch Zahlen von 5—10 m aus. Von dieser Größenordnung wären die im Großen erzielten Genauigkeiten. In den Einzelheiten ist dagegen die Genauigkeit viel größer. So ist die Sicherheit des Aufsetzens der „wandernden Marke“ auf einen Geländepunkt bei günstigem Stereoeffekt auf einzelne Meter anzunehmen, was in den betrachteten Beispielen schon deshalb nicht zum Ausdruck kommt, weil möglichst große Parallaxe bei möglichst starker Überdeckung der Bilder angestrebt wurde. Denn nur in diesem Fall versprach die direkte Prüfmethode der Perspektive Erfolg. Da diese nur die Fehlerkomponenten quer zur Basisrichtung erfaßt, so wäre eine Ergänzung wünschenswert, bei der die Kammer nach Fertigstellung eines Aufnahmepaares um  $90^0$  gedreht würde, ehe ein zweites Bildpaar zur Aufnahme gelangt. Dann könnte die Richtigkeit der Perspektive in beiden Koordinatenrichtungen untersucht werden.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1932

Band/Volume: [1932](#)

Autor(en)/Author(s): Finsterwalder Sebastian

Artikel/Article: [Die Hauptaufgabe der Photogrammetrie 115-131](#)