Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1932. Heft III
November-Dezember-Sitzung

München 1933
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Dreifach-orthogonale Kurvenkongruenzen.

Von M. Lagally in Dresden.

Vorgelegt in der Sitzung vom 5. November 1932 von S. Finsterwalder.

1. Ziel der Untersuchung.

Unter den dreifach-orthogonalen Kurvenkongruenzen im euklidischen Raum haben diejenigen das meiste Interesse gefunden, die sich zu dreifach-orthogonalen Systemen von Flächen zusammenfassen lassen. Nach dem Dupinschen Satz sind die drei Systeme von Kurven, in denen sich diese Flächen schneiden, ihre Krümmungslinien. Für die Existenz eines dreifach-orthogonalen Flächensystems sind die Laméschen Gleichungen, ein simultanes System von neun Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen geometrischen Größen, charakteristisch.

Dreifach-orthogonale Kurvenkongruenzen, die sich im allgemeinen nicht zu dreifach-orthogonalen Flächensystemen zusammenfassen lassen, treten bei der Untersuchung des Feldes eines allgemeinen symmetrischen Tensors zweiter Stufe auf, der jedem Punkt des Feldes drei aufeinander senkrechte Hauptrichtungen zuordnet, die die Tangentenrichtungen dreier sich senkrecht schneidender Kurvenkongruenzen bilden. Das bekannteste Beispiel aus der Mechanik sind die in jedem räumlichen Spannungsfeld vorhandenen drei Systeme von Spannungstrajektorien.

Die Bedingungen dafür, daß drei Kurvenkongruenzen ein derartiges Orthogonalsystem bilden, scheinen nach der geometrischen Seite hin nicht näher untersucht worden zu sein. Nach der analytischen Seite hin sind allerdings zahlreiche Untersuchungen angestellt worden, deren Ziel viel weiter gesteckt ist, und die sich mit n-fach orthogonalen Kurvensystemen in Riemannschen Räumen und mit den Eigenschaften der für ihre Existenz charakteristischen Riccischen Drehungskoeffizienten befassen.[1] Demgegenüber ist das Ziel der vorliegenden Untersuchung die Aufstellung eines Systems von Bedingungsgleichungen, denen

[1] Vgl. T. Levi-Civita, Der absolute Differentialkalkül, 1928, Kap. 7.

die geometrischen Größen genügen müssen, welche ein dreifach-orthogonales Kurvensystem bestimmen; diese Bedingungsgleichungen müssen die Laméschen Gleichungen als Spezialfall enthalten.

Als Anwendung sind die Gleichgewichtsbedingungen eines Spannungszustands, bezogen auf die Spannungstrajektorien, aufgestellt.

2. Das begleitende Dreibein und seine Drehung.

Für die Wahl des begleitenden Dreibeins einer Kurve aus einer der drei Kongruenzen gibt es zwei naheliegende Möglichkeiten.

Erstens kann man das Dreibein der Einheitsvektoren $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{b}$ in Richtung der Tangente, Hauptnormale, Binormale verwenden; dann erhält man die Frenetschen Formeln. Diese haben für eine Kurve der ersten Kongruenz, wenn man sämtliche auf sie bezügliche Größen durch einen unteren Index 1 kennzeichnet, und wenn man das Dreibein als Rechtssystem voraussetzt, folgende Form:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathfrak{t}_1}{ds_1} &= \mathfrak{d}_1 \times \mathfrak{t}_1 = \quad * \quad \frac{1}{\rho_1}\mathfrak{n}_1 \quad *; \\
\frac{d\mathfrak{n}_1}{ds_1} &= \mathfrak{d}_1 \times \mathfrak{n}_1 = -\frac{1}{\rho_1}\mathfrak{t}_1 \quad * \quad + \frac{1}{\tau_1}\mathfrak{b}_1; \\
\frac{d\mathfrak{b}_1}{ds_1} &= \mathfrak{d}_1 \times \mathfrak{b}_1 = \quad * \quad -\frac{1}{\tau_1}\mathfrak{n}_1 \quad *.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ρ_1 und τ_1 sind der Krümmungs- und Torsionsradius;

$$
\mathfrak{d}_1 = \frac{1}{\tau_1}\mathfrak{t}_1 + \frac{1}{\rho_1}\mathfrak{b}_1
\tag{2}
$$

ist der Vektor der Drehung (Darbouxscher Vektor).

Diese Wahl des begleitenden Dreibeins hat den Nachteil, daß sie für jede der drei sich in einem Punkt senkrecht schneidenden Kurven ein anderes Dreibein notwendig macht. Diesem Nachteil entgeht man, indem man die drei Tangentenrichtungen $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ der drei Kurven selbst als Dreibein nimmt. Setzt man den Drehvektor für die Bewegung des Dreibeins längs einer Kurve der Kongruenz (1) mit unbestimmten Koeffizienten in der Form

$$
\mathfrak{u}_1 = a^1{}_1\,\mathfrak{t}_1 + a^2{}_1\,\mathfrak{t}_2 + a^3{}_1\,\mathfrak{t}_3
\tag{3}
$$

an, und nimmt man das Dreibein als Rechtssystem an, so ergibt sich für seine Bewegung folgendes Gleichungssystem:

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
\frac{d\mathfrak{t}_1}{ds_1} &= \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{t}_1 = \quad * \qquad a^3{}_1\,\mathfrak{t}_2 - a^2{}_1\,\mathfrak{t}_3;\\
\frac{d\mathfrak{t}_2}{ds_1} &= \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{t}_2 = -a^3{}_1\,\mathfrak{t}_1 \quad * \quad + a^1{}_1\,\mathfrak{t}_3;\\
\frac{d\mathfrak{t}_3}{ds_1} &= \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{t}_3 = \quad a^2{}_1\,\mathfrak{t}_1 - a^1{}_1\,\mathfrak{t}_2 \quad *.
\end{aligned}
$$

Die Koeffizienten $a^k{}_i$ lassen sich formal berechnen:

$$
(5) \quad a^1{}_1 = \frac{d\mathfrak{t}_2}{ds_1}\cdot\mathfrak{t}_3 = -\frac{d\mathfrak{t}_3}{ds_1}\cdot\mathfrak{t}_2;\quad a^2{}_1 = \frac{d\mathfrak{t}_3}{ds_1}\cdot\mathfrak{t}_1;\quad a^3{}_1 = -\frac{d\mathfrak{t}_2}{ds_1}\cdot\mathfrak{t}_1;
$$

will man sie aber durch geometrische Größen ausdrücken, so muß man das zweite Dreibein auf das erste beziehen.

Werden die Richtungen $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ durch eine Drehung um den Winkel α_1 in die Richtungen $\mathfrak{t}_2$ und $\mathfrak{t}_3$ übergeführt, so ist

$$
\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{t}_2 \cos\alpha_1 - \mathfrak{t}_3 \sin\alpha_1;
$$

also nach (1)

$$
\frac{d\mathfrak{t}_1}{ds_1} = * \ \frac{1}{\rho_1}\cos\alpha_1\,\mathfrak{t}_2 - \frac{1}{\rho_1}\sin\alpha_1\,\mathfrak{t}_3.
$$

Anderseits ist

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{t}_2 &= \mathfrak{n}_1 \cos\alpha_1 + \mathfrak{b}_1 \sin\alpha_1;\\
\mathfrak{t}_3 &= -\mathfrak{n}_1 \sin\alpha_1 + \mathfrak{b}_1 \cos\alpha_1.
\end{aligned}
$$

Hieraus erhält man durch Differentiation nach s_1 und geeignete Zusammenfassung unter Verwendung der Frenetschen Formeln:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathfrak{t}_2}{ds_1} &= -\frac{1}{\rho_1}\cos\alpha_1\,\mathfrak{t}_1 \ * + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{d\alpha_1}{ds_1}\right)\mathfrak{t}_3;\\
\frac{d\mathfrak{t}_3}{ds_1} &= \frac{1}{\rho_1}\sin\alpha_1\,\mathfrak{t}_1 - \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{d\alpha_1}{ds_1}\right)\mathfrak{t}_2 \ *.
\end{aligned}
$$

Damit sind die Koeffizienten

$$
(6) \qquad a^1{}_1 = \frac{1}{\tau_1} + \frac{d\alpha_1}{ds_1};\quad a^2{}_1 = \frac{1}{\rho_1}\sin\alpha_1;\quad a^3{}_1 = \frac{1}{\rho_1}\cos\alpha_1
$$

und der Drehvektor

$$\mathfrak{u}_1 = \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{d\alpha_1}{ds_1}\right)\mathfrak{t}_1 + \frac{1}{\rho_1}\sin\alpha_1\,\mathfrak{t}_2 + \frac{1}{\rho_1}\cos\alpha_1\,\mathfrak{t}_3 \tag{7}$$

oder

$$\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{d}_1 + \frac{d\alpha_1}{ds_1}\mathfrak{t}_1 \tag{7'}$$

berechnet.

Gleichung (7′) hat eine unmittelbar ersichtliche geometrische Bedeutung: Die Drehung des Dreibeins $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ setzt sich zusammen aus der Drehung des Dreibeins $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{b}_1$ und aus einer Drehung gegenüber diesem Dreibein um $\mathfrak{t}_1$ als Achse.

3. Die mit den Kurven verbundenen Flächenstreifen.

Wenn sich auch die Kurven der drei Kongruenzen nicht zu orthogonalen Flächen zusammenfassen lassen, so kann man doch jede Kurve mit einem Flächenstreifen verbinden, auf dem sie liegt und auf dem die Richtungen der beiden anderen Kurven die Tangentialnormale und Flächennormale bestimmen. Diese Zuordnung ist auf zweierlei Art möglich:

Flächenstreifen der ersten Art	Flächenstreifen der zweiten Art
$\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}$ Kurventangente;	$\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}$ Kurventangente;
$\mathfrak{t}_2 = \bar{\mathfrak{t}}$ Tangentialnormale;	$\mathfrak{t}_3 = \bar{\mathfrak{t}}$ Tangentialnormale;
$\mathfrak{t}_3 = \mathfrak{N}$ Flächennormale.	$\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{N}$ Flächennormale.
$\mathfrak{t}, \bar{\mathfrak{t}}, \mathfrak{N}$ bilden ein Rechtssystem.	$\mathfrak{t}, \bar{\mathfrak{t}}, \mathfrak{N}$ bilden ein Linkssystem.

Jetzt kann man den Drehvektor längs jeder Kurve in doppelter Weise ansetzen, indem man ihn auf das Dreibein $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ bezieht und als Koeffizienten die Normalkrümmung N, die geodätische Krümmung G und die geodätische Torsion T der Kurve auf einem der beiden Flächenstreifen einführt. Die Größen N, G, T sollen mit einem unteren Index versehen werden, der die Tangentenrichtung der Kurve bezeichnet; außerdem N und G mit einem oberen Index, der die Normalenrichtung des Flächenstreifens kennzeichnet, auf dem die Kurve betrachtet wird. Für die geodätische Torsion kann von der Anbringung dieses zweiten Index abgesehen werden, da sie auf den beiden Flächenstreifen, die sich in einer Kurve senkrecht schneiden, den gleichen Wert hat.

Also ist für das Rechtssystem[1]

(8a) $$\mathfrak{u}_1 = T_1\,\mathfrak{t}_1 + N^3{}_1\,\mathfrak{t}_2 + G^3{}_1\,\mathfrak{t}_3;$$

und für das Linkssystem[1]

(8b) $$\mathfrak{u}_1 = T_1\,\mathfrak{t}_1 - N^2{}_1\,\mathfrak{t}_3 - G^2{}_1\,\mathfrak{t}_2.$$

Daraus folgen für die Koeffizienten $a^k{}_i$ die Werte:

(9a) $$a^1{}_1 = \frac{1}{\tau_1} + \frac{d\alpha_1}{ds_1} = T_1;$$

(9b) $$a^2{}_1 = \frac{1}{\rho_1}\sin\alpha_1 = N^3{}_1 = -G^2{}_1;$$

(9c) $$a^3{}_1 = \frac{1}{\rho_1}\cos\alpha_1 = -N^2{}_1 = G^3{}_1.$$

Diese Gleichungen enthalten die Meusniersche Formel, den Ausdruck für die geodätische Krümmung und geodätische Torsion einer Flächenkurve, und sind somit direkt zu verifizieren. Sie sagen weiter aus, daß für zwei sich senkrecht schneidende Flächenstreifen die Normalkrümmung der Schnittkurve auf dem einen gleich ihrer geodätischen Krümmung auf dem anderen ist.

Der Vektor der Drehung des begleitenden Dreibeins kann nun, wenn sein Scheitel auf einer Kurve der ersten Kongruenz fortschreitet, in folgende endgültige Form gebracht werden:

(10a) $$\mathfrak{u}_1 = T_1\,\mathfrak{t}_1 + N^3{}_1\,\mathfrak{t}_2 - N^2{}_1\,\mathfrak{t}_3;$$

entsprechende Ausdrücke erhält man durch zyklische Vertauschung der Indizes für die zu den Kurven (2) und (3) gehörigen Drehvektoren:

(10b) $$\mathfrak{u}_2 = T_2\,\mathfrak{t}_2 + N^1{}_2\,\mathfrak{t}_3 - N^3{}_2\,\mathfrak{t}_1;$$

(10c) $$\mathfrak{u}_3 = T_3\,\mathfrak{t}_3 + N^2{}_3\,\mathfrak{t}_1 - N^1{}_3\,\mathfrak{t}_2.$$

Die Änderungen eines Vektors $\mathfrak{v}$, der mit dem Dreibein starr verbunden ist, sind dann, wenn sein Scheitel auf einer der Kurven fortschreitet, nach (4) durch folgende Richtungsdifferentialquotienten gegeben:

---

[1] Wegen der Bezeichnungen und besonders wegen der Vorzeichen vgl. M. Lagally, Die Verwendung des begleitenden Dreibeins für den Aufbau der natürlichen Geometrie. Münchener Berichte 1927.

(11a) $$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s_1} = \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{v};$$

(11b) $$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s_2} = \mathfrak{u}_2 \times \mathfrak{v};$$

(11c) $$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s_3} = \mathfrak{u}_3 \times \mathfrak{v}.$$

Im besonderen ergeben sich für die Aenderungen der das Dreibein bildenden Vektoren selbst durch Ausrechnen der Vektorprodukte folgende Ausdrücke:

(12a) $$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_1} &= \quad * \quad - N^2{}_1\,\mathfrak{t}_2 - N^3{}_1\,\mathfrak{t}_3; \\ \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_1} &= N^2{}_1\,\mathfrak{t}_1 \quad * \quad + T_1\,\mathfrak{t}_3; \\ \frac{\partial \mathfrak{t}_3}{\partial s_1} &= N^3{}_1\,\mathfrak{t}_1 - T_1\,\mathfrak{t}_2 \quad *. \end{aligned}$$

(12b, c) $$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_2} &= \quad * \quad - N^3{}_2\,\mathfrak{t}_3 - N^1{}_2\,\mathfrak{t}_1; & \frac{\partial \mathfrak{t}_3}{\partial s_3} &= \quad * \quad - N^1{}_3\,\mathfrak{t}_1 - N^2{}_3\,\mathfrak{t}_2; \\ \frac{\partial \mathfrak{t}_3}{\partial s_2} &= N^3{}_2\,\mathfrak{t}_2 \quad * \quad + T_2\,\mathfrak{t}_1; & \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_3} &= N^1{}_3\,\mathfrak{t}_3 \quad * \quad + T_3\,\mathfrak{t}_2; \\ \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2} &= N^1{}_2\,\mathfrak{t}_2 - T_2\,\mathfrak{t}_3 \quad *; & \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_3} &= N^2{}_3\,\mathfrak{t}_3 - T_3\,\mathfrak{t}_1 \quad *. \end{aligned}$$

Die auf der rechten Seite dieser Gleichungen auftretenden Größen $N^k{}_i$ und T_i lassen sich nach (9) auf die Krümmungs- und Torsionsradien der Kurven und auf die Winkel ihrer Schmiegungsebenen mit den Ebenen des Dreibeins ihrer Tangenten zurückführen.

4. Die Integrabilitätsbedingungen.

Wenn die neun Differentialgleichungen (12) verträglich und integrabel sein sollen, müssen die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sein, die darin bestehen, daß die Differenz zweier zweiter, nur durch die Reihenfolge der Operationen unterschiedener Richtungsdifferentialquotienten eine lineare Form der ersten Richtungsdifferentialquotienten ist; also

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial s_k \partial s_i} - \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial s_i \partial s_k} = \sum_l c_{ikl} \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s_l}. \tag{13}$$

In dem Gleichungssystem (13) müssen zunächst die Koeffizienten c_{ikl} berechnet werden. Bestimmt man dann die ersten und zweiten Richtungsdifferentialquotienten von $\mathfrak{v}$ mittels der Gleichungen (11), so erhält man die Integrabilitätsbedingungen in der Form eines Systems von Gleichungen zwischen den Größen $N^h{}_i$ und T_i und ihren Differentialquotienten.

Die ersten Richtungsdifferentialquotienten sind in vektorieller Form

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s_1} = \mathfrak{t}_1 \cdot \nabla \mathfrak{v}; \quad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s_2} = \mathfrak{t}_2 \cdot \nabla \mathfrak{v}; \quad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s_3} = \mathfrak{t}_3 \cdot \nabla \mathfrak{v}; \tag{14}$$

dann ist

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial s_2 \partial s_1} = \frac{\partial}{\partial s_2}(\mathfrak{t}_1 \cdot \nabla \mathfrak{v}) = \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2} \cdot \nabla \mathfrak{v} + \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_1 \cdot\cdot \nabla^2 \mathfrak{v};$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{\partial}{\partial s_1}(\mathfrak{t}_2 \cdot \nabla \mathfrak{v}) = \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_1} \cdot \nabla \mathfrak{v} + \mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \cdot\cdot \nabla^2 \mathfrak{v};$$

und wegen der Symmetrie von $\nabla^2 \mathfrak{v}$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial s_2 \partial s_1} - \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial s_1 \partial s_2} = \left(\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_1}\right) \cdot \nabla \mathfrak{v}.$$

Unter Verwendung von (12) und (14) ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial s_2 \partial s_1} - \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial s_1 \partial s_2} = -N^2{}_1 \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s_1} + N^1{}_2 \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s_2} - (T_1 + T_2) \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s_3}. \tag{15}$$

Anderseits ist nach (11)

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial s_2 \partial s_1} = \frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial s_2} \times \mathfrak{v} + \mathfrak{u}_1 \times (\mathfrak{u}_2 \times \mathfrak{v});$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{\partial \mathfrak{u}_2}{\partial s_1} \times \mathfrak{v} + \mathfrak{u}_2 \times (\mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{v});$$

also unter Verwendung einer bekannten vektoralgebraischen Identität

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial s_2 \partial s_1} - \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial s_1 \partial s_2} = \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \mathfrak{u}_2}{\partial s_1}\right) \times \mathfrak{v} + (\mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{u}_2) \times \mathfrak{v}. \tag{16}$$

Damit sind die sämtlichen Glieder von (15) als Vektorprodukte mit dem gleichen zweiten Faktor $\mathfrak{v}$ dargestellt: nach dessen Weglassung ergibt sich eine Integrabilitätsbedingung

$$(17)\quad \frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \mathfrak{u}_2}{\partial s_1} + \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{u}_2 = -N^2{}_1 \mathfrak{u}_1 + N^1{}_2 \mathfrak{u}_2 - (T_1 + T_2)\mathfrak{u}_3,$$

aus der durch zyklische Vertauschung die beiden noch fehlenden Integrabilitätsbedingungen hergeleitet werden können.

Aus diesen Gleichungen läßt sich ein System von neun skalaren Bedingungsgleichungen zwischen den Größen $N^k{}_i$ und T_i und ihren Differentialquotienten ableiten. Hierzu hat man die Drehvektoren $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$, nach (10) durch $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ auszudrücken; desgleichen die Richtungsdifferentialquotienten der Drehvektoren; z. B.

$$(18)\quad \frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial s_2} = \frac{\partial T_1}{\partial s_2}\mathfrak{t}_1 + \frac{\partial N^3{}_1}{\partial s_2}\mathfrak{t}_2 - \frac{N^2{}_1}{\partial s_2}\mathfrak{t}_3$$
$$+ T_1(N^1{}_2\mathfrak{t}_2 - T_2\mathfrak{t}_3) + N^3{}_1(-N^3{}_2\mathfrak{t}_3 - N^1{}_2\mathfrak{t}_1) - N^2{}_1(N^3{}_2\mathfrak{t}_2 + T_2\mathfrak{t}_1).$$

Setzt man diese Ausdrücke in (17) ein und ordnet nach $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3$, so erhält man die folgenden drei skalaren Gleichungen:

(19)

$$\frac{\partial N^3{}_2}{\partial s_1} + \frac{\partial T_1}{\partial s_2} = N^1{}_2(N^3{}_1 - N^3{}_2) + N^2{}_1(T_2 - T_1) - N^2{}_3(T_1 + T_2);$$
$$\frac{\partial N^3{}_1}{\partial s_2} - \frac{\partial T_2}{\partial s_1} = N^2{}_1(N^3{}_2 - N^3{}_1) + N^1{}_2(T_2 - T_1) + N^1{}_3(T_1 + T_2);$$
$$\frac{\partial N^2{}_1}{\partial s_2} + \frac{\partial N^1{}_2}{\partial s_1} = -(N^2{}_1)^2 - (N^1{}_2)^2 - N^3{}_1 N^3{}_2 + (T_1 + T_2)T_3 - T_1 T_2.$$

Hierzu treten durch zyklische Vertauschung der Indizes zwei weitere Systeme von je drei Gleichungen; damit ist die Gesamtheit der neun Integrabilitätsbedingungen aufgestellt.

Es sei bemerkt, daß auch die sog. Jacobische Identität[1] Integrabilitätsbedingungen liefert, aber nicht alle, sondern nur drei, die mit drei linearen Kombinationen der neun Gleichungen (19) identisch sind.

---

[1] Vgl. W. Blaschke, Topologische Fragen der Differentialgeometrie 19. Flächengewebe und ihre Diagonalen. Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität 8 (1930).

Von Interesse sind folgende spezielle Fälle: Wenn eine der drei Kongruenzen, etwa die dritte, eine Normalenkongruenz ist, lassen sich die Kurven der beiden anderen Kongruenzen zu einer Schar von Flächen zusammenfassen, auf denen sie orthogonale Netze bilden. Dann ist

$$T_1 + T_2 = 0;$$

die ersten drei von den Gleichungen (19) gehen über in die Gleichungen von Gauß und Codazzi. Besonders einfach werden die Integrabilitätsbedingungen, wenn die Richtungen (1) und (2) durch die Hauptnormale und Binormale der Kurven (3) gegeben sind, die ein Normalensystem bilden; dann wird $\alpha_3 = 0$, und man kann, ohne umständliche Gleichungen zu erhalten, die Krümmung und Torsion der Kurven (3) in die Integrabilitätsbedingungen einführen.

Sind zwei von den Kongruenzen, etwa (2) und (3), Normalenkongruenzen, so lassen sich sowohl die Kurven (1) und (3) als auch die Kurven (1) und (2) zu Flächenscharen zusammenfassen, die sich orthogonal in den Kurven (1) schneiden, welche ihrerseits keine Orthogonalflächen besitzen. Sind alle drei Kongruenzen Normalenkongruenzen, so ist $T_1 = T_2 = T_3 = 0$; die Kurven sind die Schnittlinien eines dreifachen Orthogonalsystems von Flächen und bilden auf ihnen die Krümmungslinien. Die Gleichungen (19) gehen in die Laméschen Gleichungen über.

5. Anwendung auf die Spannungstrajektorien.[1])

Die Spannungstrajektorien bilden in einem räumlichen Spannungsfeld dasjenige dreifach-orthogonale Kurvensystem, dessen Tangenten in jedem Punkt in die drei Hauptrichtungen des dort herrschenden Spannungszustands fallen. Der Spannungstensor hat, bezogen auf die drei Hauptrichtungen, die Normalform

$$\sigma = \Sigma \sigma_\mu \mathfrak{t}_\mu \mathfrak{t}_\mu;$$

---

[1]) Zusatz bei der Korrektur: Während der Drucklegung sind mir Untersuchungen von A. Tonolo bekannt geworden, die ein ähnliches Ziel verfolgen, sich aber der Methode der Tensoranalysis bedienen. Besonders: Forma intrinseca delle equationi dell' equilibrio dei mezzi elastici. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei. Vol. 11, serie 6, 1930. Ferner: Une interpretation physique du tenseur de Riemann et des courbures prinzipales d'une variété V_3. Comptes rendus 190, 1930.

dabei sind σ_1, σ_2, σ_3 die drei Hauptspannungen. Die Gleichgewichtsbedingung ist

$$\nabla \cdot \sigma + \mathfrak{K} = 0, \tag{20}$$

wo

$$\nabla = \Sigma \mathfrak{t}_\lambda \frac{\partial}{\partial s_\lambda}$$

zu setzen ist und $\mathfrak{K} = \Sigma k_\mu \mathfrak{t}_\mu$ die auf die Volumeinheit bezogene Massenkraft bedeutet. Also wird die Gleichgewichtsbedingung

$$\Sigma \mathfrak{t}_\lambda \frac{\partial}{\partial s_\lambda} \cdot \Sigma \sigma_\mu \mathfrak{t}_\mu \mathfrak{t}_\mu + \Sigma k_\lambda \mathfrak{t}_\lambda = 0$$

oder

$$\Sigma \mathfrak{t}_\lambda \cdot \frac{\partial \mathfrak{t}_\mu}{\partial s_\lambda} \mathfrak{t}_\mu \sigma_\mu + \Sigma \frac{\partial \mathfrak{t}_\mu}{\partial s_\mu} \sigma_\mu + \Sigma \mathfrak{t}_\mu \frac{\partial \sigma_\mu}{\partial s_\mu} + \Sigma k_\mu \mathfrak{t}_\mu = 0. \tag{21}$$

Jetzt müssen die beiden ersten Summanden auf das Dreibein $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3$ bezogen werden. Nach (12) ist

$$\mathfrak{t}_1 \cdot \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_1} + \mathfrak{t}_2 \cdot \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2} + \mathfrak{t}_3 \cdot \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s^3} = N^1{}_2 + N^1{}_3;$$

allgemeiner

$$\sum_\lambda \mathfrak{t}_\lambda \cdot \frac{\partial \mathfrak{t}_\mu}{\partial s_\lambda} = N^\mu_{\mu-1} + N^\mu_{\mu+1};$$

ferner

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_\mu}{\partial s_\mu} = - N_\mu^{\mu-1} \mathfrak{t}_{\mu-1} - N_\mu^{\mu+1} \mathfrak{t}_{\mu+1}.$$

Also wird (21)

$$\sum \left(N^\mu_{\mu-1} + N^\mu_{\mu+1}\right) \sigma_\mu \mathfrak{t}_\mu - \Sigma \left(N_\mu^{\mu-1} \sigma_\mu \mathfrak{t}_{\mu-1} + N_\mu^{\mu+1} \sigma_\mu \mathfrak{t}_{\mu+1}\right)$$
$$+ \Sigma \frac{\partial \sigma_\mu}{\partial s_\mu} \mathfrak{t}_\mu + \Sigma k_\mu \mathfrak{t}_\mu = 0.$$

Durch Indexvertauschung ergibt sich

$$\sum \left[\left(N^\mu_{\mu-1} + N^\mu_{\mu+1}\right) \sigma_\mu - N^\mu_{\mu+1} \sigma_{\mu+1} - N^\mu_{\mu-1} \sigma_{\mu-1} \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \sigma_\mu}{\partial s_\mu} + k_\mu \right] \mathfrak{t}_\mu = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in drei skalare Gleichungen:

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} + N^1{}_2(\sigma_1 - \sigma_2) + N^1{}_3(\sigma_1 - \sigma_3) + k_1 = 0;\\
&\frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} + N^2{}_3(\sigma_2 - \sigma_3) + N^2{}_1(\sigma_2 - \sigma_1) + k_2 = 0;\\
&\frac{\partial \sigma_3}{\partial s_3} + N^3{}_1(\sigma_3 - \sigma_1) + N^3{}_2(\sigma_3 - \sigma_2) + k_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Damit sind die Gleichgewichtsbedingungen eines Spannungszustandes, bezogen auf die Spannungstrajektorien, aufgestellt. Die Größen $N^k{}_i$ müssen noch den Integrabilitätsbedingungen (19) genügen. Zu bemerken ist, daß die Größen T_i nicht etwa Null sind; sie treten nur in den Gleichgewichtsbedingungen nicht auf.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1932

Band/Volume: 1932

Autor(en)/Author(s): Lagally Max

Artikel/Article: Dreifach-orthogonale Kurvenkongruenzen 133-143