Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1932. Heft III
November-Dezember-Sitzung

München 1933
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Ein anderer Beweis des Satzes, daß zwei singularitätenfreie Kurven von einer Ordnung $n \geqq 4$ notwendig kollinear sind, wenn sie eindeutig aufeinander bezogen sind.

Von **Wilhelm Wirtinger** in Wien.

Vorgelegt in der Sitzung vom 5. November 1932

Herr H. Kapferer hat den obigen Satz in diesen Berichten (1931, Heft III S. 155) durch algebraische Identitäten bewiesen und dabei in einer Anmerkung einen Satz von H. Weber angeführt,[1] aus dem unmittelbar folgt, daß eine Beziehung zwischen zwei algebraischen Kurven gleichen Geschlechts größer als 1, welche nach einer Seite hin eindeutig ist, auch eindeutig umkehrbar sein muß. Er knüpft daran die Bemerkung, daß ein anderer Beweis seines Satzes sich ergeben würde, wenn man unter Benützung der funktionentheoretischen Hilfsmittel auch beweisen könnte, daß hieraus auch die lineare Beziehung der beiden Kurven folge. Ein solcher Beweis kann ohne weiteres geliefert werden. Vorher möge noch der Webersche Satz angeführt und der von Weber selbst gegebene ungemein einfache Beweis wiederholt werden.

Ist eine Riemannsche Fläche F_1 vom Geschlecht p_1 auf eine andere F_2 vom Geschlecht p_2 so bezogen, daß jedem Punkt von F_2 nur ein Punkt von F_1 entspricht, aber umgekehrt jedem Punkt von F_1 m Punkte von F_2, so wird eine der Gestalten von F_2 erhalten, wenn man F_1 m-fach überdeckt, wobei diese Überdeckungen untereinander etwa in k Verzweigungspunkten zusammenhängen mögen. Das Geschlecht dieser Fläche ist dann auch das von F_2 und bestimmt sich sofort aus der Riemannschen Beziehung zwischen Blätterzahl, Anzahl der Verzweigungspunkte und Geschlecht zu

$$2p_2 - 2 = m\,(2p_1 - 2) + k,$$

woraus für $p_1 = p_2 = p$ folgt

$$(m - 1)\,(2p - 2) + k = 0,$$

also für $p > 1$ $m = 1$, $k = 0$, was der von Herrn Kapferer angeführte Satz ist.

[1] J. f. Math. 76 (1873).

Hat man nun zwei Kurven gleichen Geschlechts $p \geqq 2$ nach einer Seite eindeutig aufeinander bezogen, so ist die Beziehung schon von selbst auch eindeutig umkehrbar. Dies festgestellt, läßt sich nun für den Fall zweier singularitätenfreier Kurven gleicher Ordnung größer als 3 der Satz des Herrn Kapferer ohne Schwierigkeit beweisen.

Seien die beiden singularitätenfreien Kurven n^{ter} Ordnung C_n und C'_n, dann müssen die Nullstellen der Differentiale erster Gattung oder, wenn man lieber will, die Schnittpunkte der Kurven $n - 3^{\text{ter}}$ Ordnung einander entsprechen, welche ja hier sämtlich adjungiert sind. Außerdem muß aber jeder Spezialschar auf der einen Kurve eine gleichgebaute Spezialschar auf der andern entsprechen, insbesondere also auch den Schnittpunkten der Geraden in der Ebene der C'_n, einer g'^2_n, eine solche Schar γ^2_n in der Ebene der C_n. Zeigt sich nun, daß diese Schar der γ^2_n mit der Schar g^2_n der Schnittpunkte der Geraden mit C_n in ihrer Ebene identisch sein muß, so entsprechen überhaupt Geradenschnittpunkten wieder Geradenschnittpunkte und der Satz ist bewiesen.

Für $n = 4$ ist der Satz trivial, denn hier sind die C_{n-3} selbst schon die Geraden. Für größeres n liefert der Riemann-Rochsche Satz mit dem Brill-Nötherschen Reziprozitätssatz die Mittel zum Beweis.

Für die γ^2_n bestimmt sich die Anzahl τ der in einem n-tupel derselben verschwindenden linear unabhängigen Differentiale erster Gattung mit $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aus

$$n - p + \tau + 1 = 3 \text{ zu } \tau = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

d. h. die Anzahl der linear unabhängigen Kurven $n - 4^{\text{ter}}$ Ordnung.

Da nun die adjungierte C_{n-3} durch ein n-tupel der γ^2_n noch in $n(n-4)$ Punkten schneidet, so gehen durch diese $n(n-4)$ Punkte nach dem Reziprozitätssatz genau 3 linear unabhängige C_{n-3}. Zwei dieser C_{n-3} müssen also $n(n-4)$ Punkte gemeinsam haben. Nun ist für $n > 4$

$$n(n-4) > (n-3)^2,$$

also zerfallen die Kurven und haben einen Bestandteil gemeinsam. Sei dieser von der Ordnung ν, dann haben die übrigen Bestandteile von der Ordnung $n - 3 - \nu$ höchstens $(n - 3 - \nu)^2$ Schnittpunkte. Nun ist

$$n(n - 4 - \nu) - (n - 3 - \nu)^2 = 2n - 9 + \nu(n - 6 - \nu) > 0$$

für $n \geqq 5$ und $\nu \leqq n - 6$ augenscheinlich, aber auch noch für $\nu = n - 5$, dagegen nicht mehr für $\nu = n - 4$.

Es muß also der eine Bestandteil von der Ordnung $n - 4$ sein, während der zweite Bestandteil von der Ordnung 1 ist, also die Gleichung einer Geraden ergibt, was nun in der Tat allen Bedingungen des Riemann-Rochschen Satzes entspricht. Das heißt aber nichts anderes als, es gibt keine andere $\gamma^2{}_n$ auf der C_n als die Schnittpunkte der geraden Linien mit ihr. Es müssen also nicht bloß die Formen $n - 3^{\text{ter}}$ Ordnung, sondern auch die Linearformen entsprechen, was eben der behauptete Satz ist, wie ins einzelne weiter auszuführen wohl nicht mehr nötig ist.

bezogen sind 145-147