Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1933. Heft II
Mai-Juli-Sitzung

München 1933
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über die strengen Lösungen des Dreikörperproblems.

Von C. Carathéodory.

Vorgetragen in der Sitzung vom 8. Juli 1933.

1. In seiner berühmten Arbeit des Jahres 1772 hat Lagrange die einzigen bis heute bekannten Fälle angegeben, in denen das Dreikörperproblem der Himmelsmechanik mit Hilfe von elementaren Funktionen integriert werden kann. Lagrange hat dieses Resultat im Rahmen einer großartigen Theorie durch recht lange und ziemlich verwickelte Rechnungen erhalten.[1]

Später hat Laplace in seiner Himmelsmechanik eine viel einfachere Ableitung der betreffenden Tatsachen mitgeteilt, aber hierbei die einschränkende Voraussetzung gemacht, daß die Bewegung der drei Körper in einer festen Ebene stattfinden soll.[2]

Herr Lettenmeyer machte mir die Bemerkung, daß auch in modernen Darstellungen entweder wie bei Whittaker die ganze Reduktionstheorie des Dreikörperproblems vorausgesetzt und angewandt wird[3] oder wie bei Levi-Civita und Amaldi bloß das ebene Problem berücksichtigt wird.[4] Vielleicht ist nur deshalb nie der Versuch gemacht worden, das allgemeine Problem im dreidimensionalen Raume mit einfachen Mitteln zu behandeln, weil Lagrange selbst der Meinung gewesen ist, daß dies nicht leicht möglich sei. Er sagt nämlich: ,,J'avoue, au reste, qu'on pourrait résoudre les Problèmes précédents d'une manière

---

[1] Essai sur le Problème des trois Corps. Prix de l'Académie des Sciences de Paris t. IX, 1772. Œuvres de Lagrange t. VI pp. 229—331, insbes. pp. 272—292. Siehe auch Tisserand, Traité de Mécanique Céleste, T. I (1889) p. 128—158.

[2] Laplace. Œuvres T. IV. Mécanique céleste, Seconde partie, Livre X, Chap. VI. Siehe auch C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels (Leipzig, Veit, 1907) Bd. II p. 89—102.

[3] E. T. Whittaker, Analytical Dynamics (Cambridge, University Press 2[d]. ed. 1917) p. 390. Deutsche Übersetzung (Berlin, Springer 1924) p. 419.

[4] T. Levi-Civita e U. Amaldi, Lezioni di meccanica razionale (Bologna, Zanichelli) T. II. 2. (1927) p. 404.

plus simple par les formules ordinaires du Problème des trois Corps entre les rayons vecteurs et les angles décrits par ces rayons, si l'on voulait se borner d'abord à l'hypothèse que les Corps se meuvent dans un même plan fixe; mais il ne serait pas aisé, ce me semble, d'en venir à bout par les mêmes formules, si l'on supposait, comme nous l'avons fait, que les Corps puissent se mouvoir dans des plans différents."[1]

Lagrange hat aber diese Schwierigkeiten überschätzt. Wir werden nämlich zeigen, daß durch Benutzung eines Systems von Veränderlichen, das allerdings Euler erfunden, aber niemand mit größerer Virtuosität als Lagrange selbst gehandhabt hat,[2] das Problem der drei Körper von Lagrange auf die einfachste und kürzeste Weise gelöst werden kann.

2. Bezeichnet man mit (x, y, z) die Koordinaten eines rechtwinkeligen Achsenkreuzes, das um seinen Anfangspunkt rotiert, und mit (p, q, r) die Komponenten des instantanen Drehvektors, so werden die Komponenten der absoluten Beschleunigung eines Punktes, der sich irgendwie relativ zum Raume der (x, y, z) bewegt, durch die Formeln dargestellt:

$$(2.\ 1)\quad \begin{cases} \alpha_x = \ddot{x} - 2r\dot{y} + 2q\dot{z} - \dot{r}y + \dot{q}z - (p^2+q^2+r^2)x \\ \qquad\qquad + (px+qy+rz)p, \\ \alpha_y = \ddot{y} - 2p\dot{z} + 2r\dot{x} - \dot{p}z + \dot{r}x - (p^2+q^2+r^2)y \\ \qquad\qquad + (px+qy+rz)q, \\ \alpha_z = \ddot{z} - 2q\dot{x} + 2p\dot{y} - \dot{q}x + \dot{p}y - (p^2+q^2+r^2)z \\ \qquad\qquad + (px+qy+rz)r. \end{cases}$$

Setzt man hierin $z = 0$, $\dot{z} = 0$ und $\ddot{z} = 0$, so kann man schreiben:

$$(2.\ 2)\quad \begin{cases} \alpha_x = [\ddot{x} - (q^2+r^2)x] - [2r\dot{y} + (\dot{r} - pq)y] \\ \alpha_y = [2r\dot{x} + (\dot{r} + pq)x] + [\ddot{y} - (p^2+r^2)y] \\ \alpha_z = -[2q\dot{x} + (\dot{q} - pr)x] + [2p\dot{y} + (\dot{p} + qr)y] \end{cases}$$

3. Wir nehmen nun mit Lagrange an,[3] daß die drei Körper, die sich gegenseitig nach dem Newtonschen Gesetz anziehen

---

[1] Lagrange, a. a. O. p. 292.

[2] Lagrange, Mécanique analytique, Seconde Partie Sect. IX § 2.

[3] A. a. O. p. 272.

sollen, ein Dreieck bilden, das beständig sich selbst ähnlich bleibt. Dann kann man durch den Schwerpunkt der drei Körper die Achsen eines beweglichen rechtwinkeligen Koordinatenkreuzes so legen, daß die Koordinaten dieser Körper durch die Gleichungen

$$x_i = a_i \lambda(t), \quad y_i = b_i \lambda(t), \quad z_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3. 1}$$

dargestellt werden. Beachtet man, daß die Komponenten der Anziehungskräfte, die auf jeden dieser Körper wirken, umgekehrt proportional λ^2 sind, so müssen nach (2. 2) und (3. 1) die Differentialgleichungen für die Bewegung der Planeten die Gestalt haben:

$$a_i[\ddot{\lambda} - (q^2 + r^2)\lambda] - b_i[2r\dot{\lambda} + (\dot{r} - pq)\lambda] = \frac{L_i}{\lambda^2} \tag{3. 2}$$

$$a_i[2r\dot{\lambda} + (\dot{r} + pq)\lambda] + b_i[\ddot{\lambda} - (p^2 + r^2)\lambda] = \frac{M_i}{\lambda^2} \tag{3. 3}$$

$$-a_i[2q\dot{\lambda} + (\dot{q} - pr)\lambda] + b_i[2p\dot{\lambda} + (\dot{p} + qr)\lambda] = 0, \tag{3. 4}$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Da nun nach Voraussetzung die drei Körper nicht auf einer Geraden liegen sollen, schließt man hieraus, daß jede einzelne der eckigen Klammern, die in (3. 2) und (3. 3) vorkommen, gleich einer durch λ^2 dividierten Konstanten ist. Hieraus folgt weiter, wenn man die Differenz der ersten Klammer in (3. 2) mit der zweiten Klammer in (3. 3) bildet und ebenso die Differenz der ersten Klammer in (3. 3) und der zweiten Klammer in (3. 2), daß man haben muß

$$p^2 - q^2 = \frac{A}{\lambda^3}, \quad pq = \frac{B}{\lambda^3}. \tag{3. 5}$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber unmittelbar, daß man schreiben kann

$$p = \alpha\lambda^{-3/2}, \quad q = \beta\lambda^{-3/2}. \tag{3. 6}$$

Andererseits entnimmt man aus den drei Gleichungen (3. 4) die Bedingungen

$$(3.\ 7)\qquad 2q\dot{\lambda}+(\dot{q}-pr)\lambda=0,\quad 2p\dot{\lambda}+(\dot{p}+qr)\lambda=0,$$

aus denen, durch Einsetzen der Werte (3. 6)

$$(3.\ 8)\qquad \beta\dot{\lambda}-2\alpha r\lambda=0,\quad \alpha\dot{\lambda}+2\beta r\lambda=0$$

und also auch

$$(3.\ 9)\qquad (\alpha^2+\beta^2)\dot{\lambda}=0$$

folgt.

Wäre nun $(\alpha^2+\beta^2)\neq 0$, so müßte $\dot{\lambda}=0$ und nach (3. 8) auch $r=0$ sein. Die Größen p und q wären außerdem konstant und man kann daher von vornherein das Achsensystem so legen, daß auch $q=0$ ist. Dann verschwinden aber die linken Seiten der Gleichungen (3. 2) und es müßten alle $L_i=0$ sein. Die Anziehungskräfte müßten alle parallel zu der y-Achse sein und dies ist mit der Voraussetzung, daß die drei Planeten nicht in gerader Linie liegen, unverträglich.[1]

Es müssen also notwendig die Gleichungen $\alpha=\beta=0$ gelten, so daß auch

$$(3.\ 10)\qquad p=0,\quad q=0$$

gilt, und dies besagt, daß die Bewegung in einer festen Ebene stattfinden muß.

4. Nachdem wir gefunden haben, daß $p=q=0$ ist, können wir die dritte Komponente r des instantanen Drehvektors mit Hilfe des Flächensatzes berechnen. Man sieht ohne weiteres ein, daß eine Relation von der Form

$$(4.\ 1)\qquad r\lambda^2=\gamma,$$

in der γ eine Integrationskonstante bedeutet, hier bestehen muß.

---

[1] Dagegen kann sehr wohl, wie aus der folgenden Untersuchung zu entnehmen ist, $\dot{\lambda}$ *gleichzeitig* mit $\alpha^2+\beta^2$ gleich Null sein.

Indem man diese Werte von (p, q, r) in (3. 2) und (3. 3) einsetzt, und noch bemerkt, daß aus (4. 1) durch Differentiation die Relation

$$2r\dot{\lambda}+\dot{r}\lambda=0 \tag{4. 2}$$

folgt, erhält man die Differentialgleichungen der Bewegung in ihrer endgültigen Gestalt

$$\lambda^2\ddot{\lambda}-\frac{\gamma^2}{\lambda}=\frac{L_i}{a_i}=\frac{M_i}{b_i} \quad (i=1, 2, 3). \tag{4. 3}$$

5. Von den Gleichungen (4. 3) untersuchen wir zuerst die fünf Gleichungen

$$\frac{L_1}{a_1}=\frac{L_2}{a_2}=\frac{L_3}{a_3}=\frac{M_1}{b_1}=\frac{M_2}{b_2}=\frac{M_3}{b_3}, \tag{5. 1}$$

in denen die Zeit nicht eingeht. Von diesen geben die drei Gleichungen

$$\frac{L_i}{a_i}=\frac{M_i}{b_i} \quad (i=1, 2, 3) \tag{5. 2}$$

Anlaß zu einer wichtigen Interpretation:
Diese Gleichungen besagen nämlich, daß eine Lagrangesche Bewegung nur dann möglich ist, wenn die Resultierende der Anziehungskräfte, die auf jeden einzelnen der Planeten wirken, durch den Schwerpunkt des Systems hindurchgehen.

Dies ist der Ausgangspunkt von Laplace in seiner Behandlung des Lagrangeschen Problems gewesen.

Sind drei beliebige Körper P_1, P_2, P_3 mit den Massen m_1, m_2, m_3 gegeben, und bezeichnet man mit φ_i die Winkel und mit s_i die Seitenlängen des Dreiecks, das von ihnen gebildet wird, so geht die Resultierende der Newtonschen Anziehungskräfte, die z. B. auf P_1 wirken, dann und nur dann durch den Schwerpunkt des Systems, wenn

$$\frac{\frac{m_1 m_3}{s_2^2}\sin\varphi_1}{\frac{m_1 m_2}{s_3^2}+\frac{m_1 m_3}{s_2^2}\cos\varphi_1}=\frac{m_3 s_2\sin\varphi_1}{m_2 s_3+m_3 s_2\cos\varphi_1} \tag{5. 3}$$

ist. Hieraus folgt aber $s_3^3 = s_2^3$, so daß das Dreieck gleichschenklig sein muß.

Die drei Gleichungen (5.2) können also nur dann gleichzeitig erfüllt sein, wenn alle drei Seiten des von den Planeten gebildeten Dreiecks einander gleich sind.

Es ist nun sehr merkwürdig, daß das Bestehen der drei Gleichungen (5. 2) die Richtigkeit der übrigen Gleichungen (5. 1) nach sich zieht. Man sieht dies am einfachsten ein, indem man die x-Achse parallel zum Vektor $P_1 P_2$ nimmt und $M_1 : b_1$ berechnet. Man findet, wenn man mit f die Newtonsche Anziehungskonstante und mit s die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks bezeichnet, das durch die Punkte (a_i, b_i) gebildet wird,

$$\frac{M_1}{b_1} = -\frac{f(m_1 + m_2 + m_3)}{s^3}, \tag{5.4}$$

also eine Größe, die in den drei Massen symmetrisch ist.

6. Die Überlegungen des vorigen Paragraphen werden illusorisch, wenn der eine Körper ein Planetoid, also z. B. $m_3 = 0$ ist. In diesem Falle kann man aus den Gleichungen (5. 2) nur schließen, daß das Dreieck, das durch die Punkte (a_i, b_i) gebildet wird, gleichschenklig ist. Bezeichnet man aber mit φ die Winkel an der Basis dieses Dreiecks, so findet man durch eine leichte Rechnung, wenn man die Achsen so legt, daß $b_1 = b_2 = 0$ ist, daß die Gleichung

$$\frac{L_1}{a_1} = \frac{M_3}{b_3}$$

äquivalent ist der Relation

$$\cos^3 \varphi = \frac{1}{8},$$

woraus folgt, daß auch hier das durch die Planeten gebildete Dreieck gleichseitig sein muß.

7. Man kann in allen unseren Gleichungen die Größen (a_i, b_i) mit einem konstanten Faktor ρ multiplizieren, wenn man nur λ durch ρ und γ durch ρ^2 dividiert. Es ist also keine Beschränkung der Allgemeinheit vorauszusetzen, daß die rechte Seite von (4. 3) gleich — 1 sein soll. Nach (5. 4) muß man hierzu für die Seitenlänge s des Dreiecks mit den Ecken (a_i, b_i) den Wert

$$s = \left(f(m_1 + m_2 + m_3)\right)^{\frac{1}{3}}$$

wählen. Dann hat man nur noch die Differentialgleichung

$$\lambda^2 \ddot{\lambda} - \frac{\gamma^2}{\lambda} + 1 = 0$$

zu integrieren, die aus dem Keplerschen Problem bekannt ist, wenn man für dieses Problem Polarkoordinaten ansetzt.

8. Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, daß die drei Körper nicht beständig in gerader Linie liegen. Aber auch wenn dies der Fall ist, führt unsere Methode sehr schnell zum Ziel.

Man kann wieder von den Ausdrücken (2. 2) ausgehen, aber mit dem Unterschiede, daß man von Anfang an $y = \dot{y} = \ddot{y} = 0$ und $p = 0$ zu setzen hat. Da außerdem die Anziehungskräfte alle längs der x-Achse wirken, gelten jedenfalls die Gleichungen

$$(8.1) \qquad 2r\dot{x}_i + \dot{r}x_i = 0, \qquad 2q\dot{x}_i + \dot{q}x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Aus diesen Gleichungen folgt dann immer die Existenz von zwei Konstanten A und B, die nicht beide verschwinden, für welche

$$(8.2) \qquad A q + B r = 0$$

ist. Durch geeignete Änderung des Koordinatensystems kann man infolgedessen erreichen, daß nicht nur p, sondern auch q identisch verschwindet. Ist dann auch $r = 0$, so findet die Bewegung auf einer festen Geraden statt, ein Fall, der uns nicht weiter beschäftigen soll.

Wir nehmen daher an, daß $r(t) \neq 0$ ist, und bestimmen nach Festsetzung einer von Null verschiedenen Konstanten γ, die bis auf das Vorzeichen willkürlich gewählt werden kann, eine Funktion $\lambda(t)$ durch die Geichung

$$(8.3) \qquad r \cdot \lambda^2(t) = \gamma.$$

Dann folgt aus der ersten Gruppe der Differentialgleichungen (8. 1) die Existenz von Konstanten a_i, für welche die Beziehungen

$$(8.4) \qquad x_i = a_i \lambda(t)$$

alle gleichzeitig gelten müssen, und wir finden wieder, wie im § 4, daß die Differentialgleichungen der Bewegung die Gestalt

$$\lambda^2 \ddot{\lambda} - \frac{\gamma^2}{\lambda} = \frac{L_i}{a_i} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{8.5}$$

haben.

9. Das ganze Problem ist wieder auf eine Konstantenbestimmung zurückgeführt. Lagrange hat nun bemerkt, daß man nach Vorgabe der Massen noch die Reihenfolge der Planeten auf der rotierenden Geraden willkürlich vorschreiben kann. Wir nehmen z. B. an, daß

$$a_1 < a_2 < a_3 \tag{9.1}$$

ist, und führen die Bezeichnungen

$$\xi = a_2 - a_1, \quad \eta = a_3 - a_2, \quad L_i = -a_i u \tag{9.2}$$

ein.

Es müssen dann die Gleichungen bestehen

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 = 0 \tag{9.3}$$

$$u\xi = \frac{m_1 + m_2}{\xi^2} - \frac{m_3}{\eta^2} + \frac{m_3}{(\xi + \eta)^2} \tag{9.4}$$

$$u\eta = \frac{m_2 + m_3}{\eta^2} - \frac{m_1}{\xi^2} + \frac{m_1}{(\xi + \eta)^2}. \tag{9.5}$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen folgt durch Addition die Relation

$$u = \frac{m_2(\xi^2 + \eta^2)(\xi + \eta)^2 + (m_1 + m_3)\xi^2\eta^2}{\xi^2\eta^2(\xi + \eta)^3}, \tag{9.6}$$

aus der man entnimmt, daß u gleichzeitig mit ξ und η positiv ist. Dann aber folgt durch Elimination von u die Relation von Lagrange

$$\begin{aligned}(m_2 + m_3)\xi^5 + (2m_2 + 3m_3)\xi^4\eta + (m_2 + 3m_3)\xi^3\eta^2 \\ - (3m_1 + m_2)\xi^2\eta^3 - (3m_1 + 2m_2)\xi\eta^4 - (m_1 + m_2)\eta^5 = 0.\end{aligned} \tag{9.7}$$

Es gibt nun nach der Zeichenregel von Descartes eine einzige Lösung der beiden letzten Gleichungen, für welche

$$\xi > 0, \quad \eta > 0, \quad u = 1$$

ist. Nach Bestimmung derselben berechne man die Größe a_i durch die Formeln

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2 + m_3)\, a_1 &= -(m_2 + m_3)\,\xi - m_3\,\eta \\ (m_1 + m_2 + m_3)\, a_2 &= \quad m_1\,\xi - m_3\,\eta \\ (m_1 + m_2 + m_3)\, a_3 &= \quad m_1\,\xi + (m_1 + m_2)\,\eta.\end{aligned}$$

Dann werden alle Bedingungen erfüllt, und die Differentialgleichungen der Bewegung sind genau dieselben, wie im § 7. Man beachte die merkwürdige Symmetrie der beiden so verschiedenen Lösungen des Lagrangeschen Dreikörperproblems.

10. Alles, was wir für drei Körper bewiesen haben, überträgt sich Wort für Wort, wenn vier oder mehr Körper betrachtet werden, die sich alle in einer Ebene oder auf einer geraden Linie befinden. Die Gestalt der Gleichungen (4. 3) für die ebenen und der Gleichungen (8. 5) für die linearen Konfigurationen der Planeten bleiben unverändert. Nur ist dann die Bestimmung derartiger Konfigurationen viel komplizierter als früher, weil mehr Gleichungen zu berücksichtigen sind. Es existiert eine ziemlich ausgedehnte Literatur[1] über diesen Gegenstand.

11. Zum Schluß wollen wir eine Frage behandeln, die prinzipiell viel wichtiger ist. Wir wollen nämlich zeigen, daß, von gewissen trivialen Fällen abgesehen, keine räumliche Konfiguration von Planeten existiert, für welche eine Lagrangesche Bewegung möglich ist.

Wir wählen wieder ein bewegliches Koordinatenkreuz, dessen Anfangspunkt im Schwerpunkt unseres Systems liegt, so daß die Koordinaten unserer Planeten durch die Gleichungen

$$(11.1) \qquad \begin{cases} x_i = a_i \lambda(t), \quad y_i = b_i \lambda(t), \quad z_i = c_i \lambda(t) \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

gegeben werden. Wir finden dann, wie im § 3, daß die Differentialgleichungen der Bewegung die Gestalt haben

[1] Siehe Enzyklop. d. Mathem. Wiss. Bd 6. 2 p. 529 Fußn. 37.

$$
(11.2)\quad \left\{\begin{aligned}
&a_i[\ddot{\lambda} - (q^2 + r^2)\lambda] - b_i[2r\dot{\lambda} + (\dot{r} - pq)\lambda] \\
&\qquad\qquad + c_i[2q\dot{\lambda} + (\dot{q} + pr)\lambda] = \frac{L_i}{\lambda^2} \\
&a_i[2r\dot{\lambda} + (\dot{r} + pq)\lambda] + b_i[\ddot{\lambda} - (p^2 + r^2)\lambda] \\
&\qquad\qquad - c_i[2p\dot{\lambda} + (\dot{p} - qr)\lambda] = \frac{M_i}{\lambda^2} \\
-&a_i[2q\dot{\lambda} + (\dot{q} - pr)\lambda] + b_i[2p\dot{\lambda} + (\dot{p} + qr)\lambda] \\
&\qquad\qquad + c_i[\ddot{\lambda} - (p^2 + q^2)\lambda] = \frac{N_i}{\lambda^2} \\
&\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}\right.
$$

Wir nehmen nun an, daß die Körper nicht alle in einer Ebene liegen; dann gibt es mindestens drei Körper, z. B. P_1, P_2, P_3, deren Ebene nicht durch den Schwerpunkt des Systems hindurchgeht. Infolgedessen ist die Determinante

$$
(11.3)\qquad \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \neq 0
$$

und es folgt hieraus, daß alle Klammern auf der linken Seite von (11.2) die Gestalt haben müssen

$$
\frac{\text{Const}}{\lambda^2}.
$$

Es folgt nunmehr, genau wie im § 3, daß man schreiben kann

$$
(11.4)\qquad p = \frac{p_0}{\lambda^{3/2}},\quad q = \frac{q_0}{\lambda^{3/2}},\quad r = \frac{r_0}{\lambda^{3/2}}.
$$

Der instantane Drehvektor muß demnach, falls er nicht verschwindet, eine feste Richtung im Raume der (x, y, z) besitzen, und man kann daher von vornherein dieses Koordinatensystem so wählen, daß p und q identisch verschwinden.

Nach dem Flächensatz muß die absolute Geschwindigkeit des Drehimpulses, dessen Komponenten relativ zu (x, y, z) wir mit J_x, J_y, J_z bezeichnen, verschwinden. Wegen $p = q = 0$ ist die Komponente dieser absoluten Geschwindigkeit in Richtung der z-Achse gleich $\dot{J}_z$, woraus folgt, daß J_z konstant sein muß. Nun ist aber

$$(11.5) \qquad J_z = \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + b_i^2)\, m_i r \lambda^2,$$

und, da der Koeffizient von $r\lambda^2$ nicht verschwindet, muß wieder

$$(11.6) \qquad r\lambda^2 = \gamma$$

sein.

Aus (11.4) und (11.6) folgt nun

$$r_0 \sqrt{\lambda} = \gamma,$$

so daß also, wenn nicht r_0 und γ beide gleichzeitig verschwinden, die Funktion $\lambda(t)$ konstant sein muß.
Wäre dies aber der Fall, so müßten nach der letzten Gleichung (11.2), wegen $p = q = 0$, alle Konstanten N_i verschwinden. Die Resultierenden der Anziehungskräfte müßten alle parallel der xy-Ebene sein und dies ist mit der Voraussetzung, daß nicht alle Körper in einer Ebene liegen, unverträglich.

Ist dagegen $r_0 = 0$, so reduzieren sich die Gleichungen (11.2) auf folgende

$$\lambda^2 \ddot{\lambda} = \frac{L_i}{a_i} = \frac{M_i}{b_i} = \frac{N_i}{c_i},$$

die wohl Lösungen besitzen, bei denen die Planeten nicht in einer Ebene liegen. Aber die Bewegung muß strahlenförmig auf Geraden durch den Schwerpunkt stattfinden, und diese Lösungen sind daher ohne jedes Interesse.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1933

Band/Volume: 1933

Autor(en)/Author(s): Caratheodory [Carathéodory] Constantin

Artikel/Article: Über die strengen Lösungen des Dreikörperproblems 257-267