Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1935. Heft III

November-Dezember-Sitzung

München 1935
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über Gleichungen unendlich hohen Grades in zwei Variabeln.

(Zweite Mitteilung.)

Von Fritz Lettenmeyer in München.

Vorgelegt von Herrn Perron in der Sitzung vom 2. November 1935.

§ 1. Einleitung.

In zwei früheren im Jahrgang 1933 dieser Berichte erschienenen Arbeiten habe ich für Gleichungen der Form

$$\text{(A)} \qquad \sum_{\varrho} \sum_{\sigma} a_{\varrho\sigma}\, x^{\varrho}\, y^{\sigma} = 0 \qquad (\sigma \geqq 0),$$

worin die ρ, σ ein gegebenes Gitterpunktsgebiet mit $\sigma \geqq 0$ durchlaufen, welches bezüglich ρ weder nach oben noch nach unten, bezüglich σ nicht nach oben beschränkt zu sein braucht, die Konstruktion sämtlicher formalen Lösungen der Form

$$\text{(P)} \qquad y = \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} c_{\nu}\, x^{\frac{\nu}{k}} \qquad (\nu_0 \text{ und } k \text{ ganz, } \nu_0 \gtreqless 0,\ k > 0)$$

behandelt. Dabei bedeuten die $a_{\varrho\sigma}$ Größen irgendeines Körpers $\mathfrak{A}$, in welchem die üblichen Rechengesetze gelten (d. h. eines Körpers der Charakteristik Null).

In der ersten dieser Arbeiten[1] war die Fragestellung auf Gleichungen der Form

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} \left(\sum_{\sigma=0}^{n_{\varrho}} a_{\varrho\sigma}\, y^{\sigma} \right) x^{\varrho} = 0$$

und auf Lösungen der Form

$$\text{(P}_0\text{)} \qquad y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}\, x^{\frac{\nu}{k}} \qquad (k > 0 \text{ und ganz})$$

beschränkt; die hierauf bezüglichen Existenzaussagen sind die Sätze I und II der Arbeit I.

---

[1] „Ein neuer Beweis für die formale Entwickelbarkeit algebraischer München Ak. Sb. 1935, III

In der zweiten der früheren Arbeiten[2] sind diejenigen Typen von Gleichungen der Form (A) aufgestellt, von denen man überhaupt Lösungen der Form (P) verlangen kann, und es ist gezeigt, daß sämtliche Lösungen mit der Methode der Arbeit I konstruiert werden können.

In der vorliegenden Arbeit werden diese Ergebnisse auf Gleichungen ausgedehnt, in welchen auch die Potenzen von y mit negativen ganzen Exponenten vorkommen dürfen; es soll sich also um Gleichungen der Form

$$\text{(B)} \qquad \sum_{\varrho} \sum_{\sigma} a_{\varrho\sigma} x^{\varrho} y^{\sigma} = 0$$

handeln, bei denen das vorgegebene Gitterpunktsgebiet (ρ, σ) sowohl bezüglich ρ als auch bezüglich σ weder nach oben noch nach unten beschränkt zu sein braucht. Man könnte solche Gleichungen auch als Gleichungen „von zweiseitig unendlich hohem Grade" (in y) bezeichnen.

Dabei ist im Falle $c_{\nu_0} \neq 0$ unter y^{-1} diejenige durch (P) eindeutig bestimmte Potenzreihe in $x^{\frac{1}{k}}$ zu verstehen, für welche sich durch formales Ausmultiplizieren

$$y y^{-1} = 1$$

ergibt; es ist also

$$y^{-1} = \sum_{\nu=-\nu_0}^{\infty} C_{\nu} x^{\frac{\nu}{k}},$$

wo die C_ν durch das Rekursionssystem

$$c_{\nu_0} C_{-\nu_0} = 1$$
$$c_{\nu_0} C_{-\nu_0+1} + c_{\nu_0+1} C_{-\nu_0} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

bestimmt sind.

Funktionen in Potenzreihen", S. 317—347 des Jahrganges 1933, im folgenden als „Arbeit I" zitiert.

[2] „Über Gleichungen unendlich hohen Grades in zwei Variabeln", S. 349—371 des Jahrganges 1933, im folgenden als „Arbeit II" zitiert.

Unter y^σ mit ganzen $\sigma \leqq -2$ ist das Potenzreihenprodukt $(y^{-1})^{|\sigma|}$ zu verstehen oder, was auf dasselbe hinauskommt, diejenige durch (P) eindeutig bestimmte Potenzreihe in $x^{\frac{1}{k}}$, für welche sich durch formales Ausmultiplizieren

$$y^{|\sigma|}\, y^\sigma = 1$$

ergibt.

Im Anschluß an diese Definition ist eine Bemerkung über die formale Taylor-Entwicklung am Platze.

Diese Entwicklung wird im folgenden in äußerlich derselben Form benützt werden wie in den Beweisen der Arbeit I; es liegt jedoch ein Unterschied in der Bedeutung des Formalismus vor.

In der Arbeit I handelte es sich um Polynome $\Phi_\varrho(y)$, welche bei einer Transformation der Form $y = c_0 + \zeta$ mittels der Formel

$$\Phi_\varrho(c_0+\zeta) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \Phi_\varrho^{(\tau)}(c_0)\,\frac{\zeta^\tau}{\tau!} \tag{1}$$

in Polynome von ζ umgerechnet wurden; die rechtsstehende Potenzreihe bricht in diesem Falle nach endlich vielen Gliedern ab, und die Formel (1) ist lediglich die mehrmalige Anwendung des binomischen Satzes.

In der vorliegenden Arbeit (§ 2) werden jedoch die $\Phi_\varrho(y)$ eine allgemeinere Bedeutung haben, nämlich

$$\Phi_\varrho(y) = \sum_{\sigma=m_\varrho}^{n_\varrho} a_{\varrho\sigma}\, y^\sigma,$$

wo auch Potenzen von y mit negativen (ganzen) Exponenten vorkommen. Auf der linken Seite von (1) ist dann im Falle $c_0 \neq 0$ gemäß den obigen Definitionen unter $(c_0+\zeta)^{-1}$ die Potenzreihe $\sum\limits_{\tau=0}^{\infty} \frac{(-1)^\tau}{c_0^{\tau+1}}\,\zeta^\tau$ und unter $(c_0+\zeta)^\sigma$ mit $\sigma \leqq -2$ das Potenzreihenprodukt $((c_0+\zeta)^{-1})^{|\sigma|}$ zu verstehen. Daß nun bei dieser Verallgemeinerung der Bedeutung von $\Phi_\varrho(y)$ unter der Voraussetzung $c_0 \neq 0$ die Formel (1) richtig bleibt, ist nicht selbstverständlich, aber leicht einzusehen. Dazu ist lediglich zu zeigen, daß die einzelnen Relationen

$$(c_0 + \zeta)^\sigma = \sum_{\tau=0}^{\infty} \binom{\sigma}{\tau} c_0^{\sigma-\tau} \zeta^\tau, \tag{2}$$

aus denen sich ja (1) durch Addition aufbaut, im Falle $c_0 \neq 0$ auch für ein negatives ganzes σ formal gültig sind. Für $\sigma = -1$ ist die Relation (2) als sofort aus der Definition von $(c_0 + \zeta)^{-1}$ folgend bereits einige Zeilen vorher erwähnt; für $\sigma \leqq -2$ läßt sich leicht ein Induktionsbeweis führen.

Der früheren Einteilung entsprechend, werden zunächst in § 2 die Existenzaussagen für denjenigen speziellen Typus von Gleichungen der Form (B) bewiesen werden, bei welchen die ρ nach unten beschränkt sind und zu einem festen ρ höchstens endlich viele σ gehören, also für Gleichungen der Form

$$\sum_{\varrho=\varrho_0}^{\infty} x^\varrho \Phi_\varrho(y) = 0,$$

wo $\Phi_\varrho(y)$ eine endliche Summe von Gliedern der Form $a_{\varrho\sigma} y^\sigma$ bedeutet. Da natürlich nicht alle $a_{\varrho\sigma}$ gleich Null sein sollen, läßt sich durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von x und mit einer geeigneten Potenz von y erreichen, daß $\rho_0 = 0$ und $\Phi_0(y)$ ein Polynom von y mit einem von Null verschiedenen konstanten Glied ist. Der spezielle Typus darf also ohne Einschränkung der Allgemeinheit in der Form (BI) geschrieben werden, die im Satze I des § 2 angegeben ist.

In § 3 werden die der Arbeit II entsprechenden Untersuchungen durchgeführt werden.

§ 2. Die Existenzsätze für den speziellen Typus.

Satz I: Es sei $\Phi_0(y) = \sum_{\sigma=0}^{m} a_{0\sigma} y^\sigma$ ein Polynom mit Koeffizienten aus einem Körper $\mathfrak{A}$ der Charakteristik Null; $a_{00} \neq 0$, $a_{0m} \neq 0$, $m \geqq 0$. Für jedes ganze $\rho \geqq 1$ sei

$$\Phi_\varrho(y) = \sum_{\sigma=m_\varrho}^{n_\varrho} a_{\varrho\sigma} y^\sigma \qquad (m_\varrho \leqq n_\varrho),$$

wo die $a_{\varrho\sigma}$ ebenfalls Größen aus $\mathfrak{A}$ bedeuten. Dann hat die Gleichung

$$\text{(B I)} \qquad \sum_{\varrho=0}^{\infty} x^{\varrho}\, \Phi_{\varrho}(y) = 0$$

genau m formale Lösungen der Form (P_0) mit $c_0 \neq 0$, wobei mehrfache Lösungen in ihrer Vielfachheit zu zählen sind.[3]

Für jede einzelne dieser Lösungen gilt, daß ihre sämtlichen c_ν einem endlichen algebraischen Erweiterungskörper über $\mathfrak{A}$ angehören („Koeffizientenkörper").

Wie S. 321 der Arbeit I ergibt sich $\Phi_0(c_0) = 0$; im Fall $m = 0$ gibt es also keine Lösung der verlangten Art. Im Falle $m \geqq 1$ gilt bezüglich des jetzigen Satzes I wörtlich wie S. 322 und S. 340:

Satz II: Gegeben sei der in Satz I vorausgesetzte Sachverhalt. c_0 sei eine festgewählte q-fache Wurzel von $\Phi_0(y)$. Dann gibt es genau q mit diesem c_0 beginnende Lösungen (mehrfache mehrfach gezählt) der Form (P_0).

Für jede einzelne gilt, daß ihre sämtlichen c_ν einem endlichen algebraischen Erweiterungskörper über $\mathfrak{A}$ angehören.

Zusatz zu Satz II: w bezeichne den Grad der algebraischen Größe c_0 über $\mathfrak{A}$. Dann ist für jede der in Satz II genannten Lösungen der Grad des Koeffizientenkörpers (über $\mathfrak{A}$) $\leqq wq$, a fortiori $\leqq m$.

Satz III: Für jede der in Satz II genannten Potenzreihen ist der Exponentenhauptnenner $\leqq q$.

Um den Satz II (woraus wieder sofort Satz I folgt) samt Zusatz und den Satz III zu beweisen, lassen sich zweierlei Wege

---

[3] Dabei heißt eine Lösung von (BI) natürlich dann q-fach, wenn sie außer der Gleichung (BI) auch den abgeleiteten Gleichungen

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} x^{\varrho}\, \Phi_{\varrho}^{(\nu)}(y) = 0$$

für $\nu < q$, aber nicht für $\nu = q$ genügt.

einschlagen: entweder führt man die Behauptungen auf einen Sachverhalt zurück, welcher die Anwendung der früheren Ergebnisse gestattet, oder man ergänzt die Beweise von Arbeit I derart, daß sie auch die jetzigen Behauptungen liefern.

Der erste Weg soll lediglich angedeutet werden: er besteht in einer Transformation der Aufgabe, alle Potenzreihen der Form (P_0) zu finden, welche die Gleichung (BI) erfüllen, in eine äquivalente Aufgabe, bei welcher die den $\Phi_\varrho(y)$ entsprechenden neuen Ausdrücke Polynome sind. Dies geschieht nach der im Anfang des § 3 von Arbeit I angegebenen Methode. Man zeigt zunächst, daß in jeder (B I) erfüllenden Potenzreihe (P_0) das erste auf c_0 folgende und von Null verschiedene Glied (falls es ein solches gibt) notwendig einen Exponenten $\geqq \frac{1}{q}$ hat, und verwendet dann die Transformation $y = c_0 + x^{\frac{1}{q}} z$. Auf Grund der Formel (1) werden dann in der transformierten Gleichung keine negativen Potenzen von z auftreten.

Der zweite Weg, auf dem im folgenden der Beweis erbracht werden soll, darf aus mehreren Gründen als befriedigender angesehen werden: Einmal liegt dann ein direkter, einheitlicher Beweis der neuen Sätze vor, womit also die Aufstellung der in diesen enthaltenen[4] früheren Sätze entbehrlich wird. Des wei-

---

[4] Mit einer unwesentlichen Ausnahme: Der Satz I der Arbeit I enthält nicht die Voraussetzung $a_{00} \neq 0$ und gilt auch für mit $c_0 = 0$ beginnende Lösungen. Letztere wurden aber in der Arbeit II ohnehin besonders behandelt und durch Anwendung des Satzes I mit $c_0 \neq 0$ erfaßt.

Im jetzigen Falle könnte in Satz I zwar die Voraussetzung $a_{00} \neq 0$ weggelassen werden, da nur von $c_0 \neq 0$ die Rede ist; es müßte dann m durch $m - m_0$ ersetzt werden, wo m_0 der Exponent der niedrigsten in dem Polynom $\Phi_0(y)$ wirklich auftretenden Potenz von y ist (vgl. S. 355 der Arbeit II). Aber eine Aussage über mit $c_0 = 0$ beginnende Lösungen könnte trotzdem nicht gemacht werden; es kann solche geben, aber es braucht keine solchen zu geben. Woran dies liegt, sieht man an dem Beispiel

$$y^3 + y^2 + \sum_{\varrho=1}^{\infty} x^\varrho \sum_{\sigma=-(\varrho-1)^2}^{(\varrho-1)^2} a_{\varrho\sigma}\, y^\sigma = 0 \quad (a_{\varrho\sigma} \neq 0).$$

Nach dem jetzigen Satz I gibt es eine einzige mit $c_0 \neq 0$ (nämlich $c_0 = -1$) beginnende Lösung der Form (P_0). Unter Vorausnahme der Ergebnisse des folgenden § 3 sieht man sofort, daß die σ-Achse die einzige Stützgerade ist.

teren liegt es im Plane dieser Untersuchungen, wie schon in der Einleitung zu Arbeit I betont wurde, die Beweise nach dem Verfahren der praktischen Berechnung der c_ν zu gestalten. So wird man auch jetzt im Falle $q = 1$ die c_ν direkt nach der Methode der Koeffizientenvergleichung zu berechnen versuchen und nicht bereits in diesem Falle eine Transformation vornehmen, wie es der erste Weg erfordern würde. Es wird gezeigt werden, daß der Beweis für $q = 1$ S. 322—324 der Arbeit I in der Tat so ergänzt werden kann, daß er die neuen Behauptungen liefert. Weiter aber sind überhaupt keine Ergänzungen erforderlich! Auch dies spricht für den zweiten Weg. Die Paragraphen 3 und 4 der Arbeit I (S. 324—347) bleiben wörtlich in Geltung, wie ohne weiteres aus dem Transformationsschema S. 325 zu ersehen ist: Die $\Phi_\varrho(y)$ werden dort weiterhin nur mehr in der Gestalt ihrer Taylorschen Entwicklung verwendet, und diese Entwicklung ist, wie oben im Anschluß an Formel (1) dargetan, auch für die jetzigen verallgemeinerten $\Phi_\varrho(y)$ unverändert gültig.

Die neuen Behauptungen brauchen also nur noch für $q = 1$ bewiesen zu werden.

Beweis des Satzes II samt Zusatz und des Satzes III für $q = 1$.

c_0 sei eine einfache Wurzel des Polynoms $\Phi_0(y)$; $c_0 \neq 0$ wegen $a_{00} \neq 0$. Wir gehen zunächst mit dem Ansatz

$$(\mathrm{p}_1) \quad y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu, \; y^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu x^\nu \quad (c_0 C_0 = 1,\, c_0 C_1 + c_1 C_0 = 0 \text{ usw.})$$

in (B I) hinein, wo also $k = 1$ gewählt ist. Ordnet man auf der linken Seite nach Potenzen von x, so ist wegen $\Phi_0(c_0) = 0$ der Koeffizient von x^0 gleich Null. Der Koeffizient einer Potenz x^λ ($\lambda \geqq 1$) wird offenbar bereits dann erhalten, wenn in dem Ausdruck

$$\Phi_0\left(\sum_{\nu=0}^{\lambda} c_\nu x^\nu\right) + \sum_{\varrho=1}^{\lambda} x^\varrho \left[\sum_{\sigma=m_\varrho}^{-1} a_{\varrho\sigma} \left(\sum_{\nu=0}^{\lambda-\varrho} C_\nu x^\nu\right)^{|\sigma|} + \sum_{\sigma=0}^{n_\varrho} a_{\varrho\sigma} \left(\sum_{\nu=0}^{\lambda-\varrho} c_\nu x^\nu\right)^{\sigma}\right]$$

Läßt man jedoch in dem Beispiel die Gitterpunkte der unteren Halbebene weg, dann ist auch die Strecke zwischen (0,2) und (1,0) eine Stützstrecke, und diese liefert zwei mit der Potenz x^2 beginnende Lösungen.

die Glieder mit x^λ gesammelt werden; es können also keine anderen c_ν und C_ν als $c_0, c_1 \ldots, c_\lambda, C_0, C_1, \ldots, C_{\lambda-1}$ vorkommen. Suchen wir speziell die Glieder, welche c_λ enthalten, so können sie nur aus

$$\Phi_0\left(\sum_{\nu=0}^{\lambda} c_\nu x^\nu\right) = \Phi_0(c_0) + \Phi_0'(c_0) \sum_{\nu=1}^{\lambda} c_\nu x^\nu + \frac{1}{2}\Phi_0''(c_0)\left(\sum_{\nu=1}^{\lambda} c_\nu x^\nu\right)^2 + \cdots$$

herrühren; dies ergibt $\Phi_0'(c_0)\, c_\lambda x^\lambda$.

Die unendlich vielen Bedingungsgleichungen dafür, daß (p_1) eine Lösung sei, sind also von der Form:

$$\Phi_0'(c_0) c_\lambda + \left\{\begin{array}{l}\text{Polynom von } c_0, \ldots, c_{\lambda-1}, C_0, \ldots, \\ C_{\lambda-1} \text{ mit Koeffizienten aus } \mathfrak{A}\end{array}\right\} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

und

$$\begin{gathered} c_0 C_0 = 1 \\ c_0 C_1 + c_1 C_0 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

woraus wegen $\Phi_0'(c_0) \neq 0$ sukzessive $C_0, c_1, C_1, c_2, C_2, \ldots$ eindeutig als Größen des Körpers $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}, c_0)$ vom Grad w geliefert werden.

Der weitere Text des früheren Beweises bleibt unverändert gültig.

§ 3. Allgemeine Typen von Gleichungen unendlich hohen Grades.

Für die Untersuchungen von Gleichungen der Form (B) läßt sich die gesamte Darstellung der Arbeit II (von geringen Modifikationen abgesehen) aufrechterhalten, wobei aber jetzt die zugrunde liegenden Gitterpunktsgebiete sich auch in die untere Halbebene $\sigma < 0$ erstrecken dürfen.

Die Definitionen folgender Begriffe bleiben wörtlich gültig:

Vorbedingung (S. 350); Abzählbarkeit eines Gitterpunktsgebietes nach Vertikalen von links her (S. 353); Anfangsvertikale (S. 353); linke Stützgerade (S. 355); Stützstrecke (S. 355); Abzählbarkeit eines Gitterpunktsgebietes nach Parallelen der Steigung $-\frac{k}{\nu_0}$ von links her (S. 358); Anfangsparallele (S. 358).

Die den Ergebnissen des § 2 der Arbeit II entsprechenden Sätze lauten:

Für die Existenz einer Lösung der Form (P_0) mit $c_0 \neq 0$ ist es notwendig, sich auf den Gleichungstypus

$$\text{(BI a)} \qquad \sum_{\varrho=\varrho_0}^{\infty} x^{\varrho} \sum_{\sigma=m_\varrho}^{n_\varrho} a_{\varrho\sigma} y^{\sigma} = 0$$

zu beschränken[5]; geometrisch ausgedrückt: das Gitterpunktsgebiet muß nach Vertikalen von links her abzählbar sein.

Dieser Gleichungstypus läßt sich auch in der Form schreiben:

$$\text{(B Ib)} \qquad \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} y^{\sigma} \sum_{\varrho=g_\sigma}^{\infty} a_{\varrho\sigma} x^{\varrho} = 0 \quad \text{mit} \lim_{\sigma \to +\infty} g_\sigma = +\infty \quad \text{und} \lim_{\sigma \to -\infty} g_\sigma = +\infty.$$[6]

Eine Gleichung vom Typus (BI a) (nicht alle $a_{\varrho\sigma}$ gleich Null) hat dann und nur dann Lösungen der Form (P_0) mit $c_0 \neq 0$, wenn die Anfangsvertikale des zugrunde liegenden Gitterpunktsgebietes zugleich linke Stützgerade ist. Wenn letzteres der Fall ist, dann ist die Anzahl dieser Lösungen gleich der Länge der Stützstrecke.

Auch die Anmerkung S. 356 der Arbeit II bleibt erhalten.

Die den Ergebnissen des § 3 der Arbeit II entsprechenden Sätze lauten:

Für die Existenz einer Lösung, welche eine mit einem Gliede der Form

$$d_0 x^{\frac{\nu_0}{k}} \qquad (d_0 \neq 0,\ \nu_0 \text{ und } k \text{ ganz},\ \nu_0 \lesseqgtr 0,\ k > 0)$$

beginnende aufsteigende Potenzreihe einer gebrochenen Potenz von x ist[7], ist notwendig, daß das zugrunde liegende Gitterpunkts-

[5] Die Normierung in (BI) wurde schon S. 460 erwähnt.

[6] Die Bemerkungen zu (Ib) S. 354 der Arbeit II übertragen sich sinngemäß.

[7] Der Exponentenhauptnenner kann ein Vielfaches von k sein; vgl. S. 358 der Arbeit II.

gebiet nach Parallelen der Steigung $-\frac{k}{\nu_0}$ von links her abzählbar ist. Wenn diese Eigenschaft vorhanden ist, gibt es dann und nur dann Lösungen der verlangten Art, wenn die Anfangsparallele des Gitterpunktsgebietes zugleich linke Stützgerade ist. Wenn letzteres der Fall ist, dann ist die Anzahl dieser Lösungen gleich der Länge der vertikalen Komponente der Stützstrecke.

Für Lösungen mit einem negativen Anfangsexponenten $\frac{\nu_0}{k}$ lautet der notwendige Gleichungstypus:

$$(\text{B IIa}) \qquad \sum_{\varrho=-\infty}^{\infty} x^{\varrho} \sum_{\sigma=-\infty}^{n_\varrho} a_{\varrho\sigma} y^{\sigma} = 0 \quad \text{mit} \lim_{\varrho\to+\infty} \left(n_\varrho + \frac{k}{\nu_0}\rho\right) = -\infty$$
$$\text{und} \lim_{\varrho\to-\infty} \left(n_\varrho + \frac{k}{\nu_0}\rho\right) = -\infty.$$

(Die Zahlen n_ϱ dürfen also mit wachsendem ρ nicht so stark gegen $+\infty$ wachsen wie die Zahlen $\frac{k}{|\nu_0|}\rho$, und sie müssen mit abnehmendem ρ stärker gegen $-\infty$ abnehmen als die Zahlen $\frac{k}{|\nu_0|}\rho$; den genauen Sinn dieses „nicht so stark“ und „stärker“ geben die Limesbeziehungen an.)

Für Lösungen mit einem positiven Anfangsexponenten $\frac{\nu_0}{k}$ lautet der notwendige Gleichungstypus:

$$(\text{B IIIa}) \qquad \sum_{\varrho=-\infty}^{\infty} x^{\varrho} \sum_{\sigma=h_\varrho}^{\infty} a_{\varrho\sigma} y^{\sigma} = 0 \quad \text{mit} \lim_{\varrho\to+\infty} \left(h_\varrho + \frac{k}{\nu_0}\rho\right) = +\infty$$
$$\text{und} \lim_{\varrho\to-\infty} \left(h_\varrho + \frac{k}{\nu_0}\rho\right) = +\infty.$$

(Die Zahlen h_ϱ dürfen mit wachsendem ρ nicht so stark gegen $-\infty$ abnehmen wie die Zahlen $-\frac{k}{\nu_0}\rho$, und sie müssen mit abnehmendem ρ stärker gegen $+\infty$ wachsen als die Zahlen $\frac{k}{\nu_0}|\rho|$.)

(B IIa) und (B IIIa) lassen sich in folgender gemeinsamen äquivalenten Form schreiben, die auch (B Ib) mitenthält:

$$\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} y^{\sigma} \sum_{\varrho=g_\sigma}^{\infty} a_{\varrho\sigma} x^{\varrho} = 0 \quad \text{mit} \lim_{\sigma \to +\infty} \left(g_\sigma + \frac{\nu_0}{k}\sigma\right) = +\infty \quad \text{und} \lim_{\sigma \to -\infty} \left(g_\sigma + \frac{\nu_0}{k}\sigma\right) = +\infty. \quad \begin{cases} (\text{B IIb}) & \text{für } \nu_0 < 0, \\ (\text{B Ib}) & \text{für } \nu_0 = 0, \\ (\text{B IIIb}) & \text{für } \nu_0 > 0. \end{cases}$$

Handelt es sich nun um die Auffindung sämtlicher formalen Lösungen der Form (P) einer vorgelegten Gleichung der Form (B), so hat man wie in § 4 der Arbeit II zu dem vorgegebenen Gitterpunktsgebiet denjenigen von links her gesehen konvexen Streckenzug zu konstruieren, dessen „Äußeres" keine Gitterpunkte mit $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ enthält, während seine Ecken solche Gitterpunkte sind (falls ein solcher Streckenzug vorhanden ist).

Wird mindestens ein $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ vorausgesetzt, so erklärt man wie früher (S. 363) den Punkt Q_0. Von ihm aus wird nun die frühere Konstruktion nicht nur in der oberen Halbebene $\sigma > 0$, sondern in ganz analoger Weise durch Drehung des von Q_0 nach links gehenden horizontalen Strahles im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers auch in der unteren Halbebene $\sigma < 0$ ausgeführt. Im allgemeinen wird ein in der oberen Halbebene verlaufender Streckenzug $Q_0\, Q_1\, Q_2 \ldots$ und ein in der unteren Halbebene verlaufender Streckenzug $Q_0'\, Q_1'\, Q_2' \ldots$ entstehen. Diese beiden Streckenzüge können bei Q_0 einen einspringenden Winkel bilden. (In Abweichung vom früheren Text braucht auch im Falle der Lösbarkeit keine durch Q_0 gehende linke Stützgerade vorhanden zu sein; Q_0 braucht überhaupt keine besondere Rolle zu spielen.) Es ist aber in einem solchen Falle leicht zu sehen, daß sich im Falle der Lösbarkeit, d. h. wenn überhaupt eine linke Stützgerade vorhanden ist, ein Punkt Q_λ und ein Punkt Q_μ' so bestimmen lassen, daß durch Einschaltung der Strecke $Q_\mu'\, Q_\lambda$ an Stelle des Streckenzuges $Q_\mu'\, Q_{\mu-1}' \ldots Q_0 \ldots Q_{\lambda-1}\, Q_\lambda$ der gewünschte konvexe Streckenzug entsteht.

Für die Einzelheiten der Konstruktionen und die Diskussion der auftretenden Möglichkeiten gelten die früheren Ausführungen; die Beispiele von S. 365 und S. 366 lassen sich ohne weiteres durch Hinzunahme der zur ρ-Achse spiegelbildlich liegenden Gitterpunkte verallgemeinern.

Als Beispiel einer Gleichung von zweiseitig unendlich hohem Grade mit unendlich vielen formalen Lösungen sei schließlich noch die durch die ebengenannte Verallgemeinerung aus dem früheren 6. Beispiel (S. 368) entstehende Gleichung angeführt:

$$\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} b_\sigma x^{\sigma^2} y^\sigma = 0 \qquad (\text{alle } b_\sigma \neq 0).$$

Das Gitterpunktsgebiet besteht aus allen Gitterpunkten der Parabel $\rho = \sigma^2$.[8] Zu den Punkten Q_λ ($\lambda \geqq 0$) mit $\rho = \lambda^2$, $\sigma = \lambda$ kommen noch die Punkte Q'_λ mit $\rho = \lambda^2$, $\sigma = -\lambda$. Die Stützstrecke $Q'_\lambda Q'_{\lambda+1}$ hat die Steigung $\frac{-1}{2\lambda+1}$; ihre vertikale Komponente hat ebenfalls die Länge 1. Zu den Lösungen der früheren Form

$$y = x^{-(2\lambda+1)}(e_{\lambda 0} + e_{\lambda 1} x + e_{\lambda 2} x^2 + \cdots), \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots, \; e_{\lambda 0} \neq 0\text{[9]}$$

kommen jetzt noch die mit der Potenz $x^{2\lambda+1}$ ($\lambda \geqq 0$) beginnenden Lösungen, welche mittels $\lambda = -1, -2, \ldots$ zu den angeschriebenen Lösungen hinzugenommen werden können.

Die Transformation mittels $y = x^{-(2\lambda+1)} z$ auf eine Gleichung vom Typus (B I) liefert die gegenüber früher (S. 369 Zeile 9 von unten) einfachere Form:

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} x^{\tau^2+\tau} (b_{\lambda-\tau} z^{\lambda-\tau} + b_{\lambda+1+\tau} z^{\lambda+1+\tau}) = 0.$$

Das Anfangspolynom ist wieder $z^\lambda (b_\lambda + b_{\lambda+1} z)$.

Besonderer Fall (alle $b_\sigma = 1$):

Die Gleichung

$$\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} x^{\sigma^2} y^\sigma = 0$$

hat die unendlich vielen Lösungen:

$$y = -x^{2\lambda+1} \qquad (\lambda \gtreqless 0 \text{ ganz}).$$

[8] Man könnte noch alle Gitterpunkte innerhalb dieser Parabel hinzunehmen.

[9] Die $e_{\lambda\nu}$ sind andere Größen als die früheren $d_{\lambda\nu}$.

Korrekturen zu meinen Arbeiten im Jahrgang 1933 dieser Berichte:

S. 114 Zeile 7 von unten: Statt „Zahlen“ muß es heißen „Größen“.
S. 320 letzte Zeile der Fußnote: Statt $\Phi_0(y)$ muß es heißen $\Phi_{\underline{\varrho}}(y)$.
S. 332 Zeile 11: in der eckigen Klammer ist der Buchstabe p wegzulassen.
S. 352 Zeile 19: Statt „zu jedem ρ_μ“ muß es heißen „zu jedem $\rho_\mu \leqq 0$“.