Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1935. Heft III

November-Dezember-Sitzung

München 1935

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über die Diskriminante ternärer Formen.

Von K. Petri in Landau.

Vorgelegt in der Sitzung vom 2. November 1935.

In einer früheren Arbeit[1] habe ich gezeigt, daß es für die allgemeine ternäre Form n-ter Ordnung f eine Kontravariante π der Klasse $3n - 6$ und des Grades $3n(n - 2)$ in den Koeffizienten von f gibt, deren identisches Verschwinden die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß die Kurve $f = 0$ eine höhere Singularität hat als einen einfachen Doppelpunkt, und welche im Fall eines Doppelpunktes, gleich Null gesetzt, die $(3n - 6)$te Potenz dieses Punktes darstellt. Der Zusammenhang mit der Diskriminante D von f ist der, daß bis auf einen konstanten Faktor:

$$D = \Delta_\pi^{3n - 6}$$

sein muß, wenn Δ die zu f gehörende Hessesche Form ist.

Im folgenden wird die Form π allgemein ohne überflüssigen Faktor dargestellt, und zwar auf 2 verschiedene Weisen, entsprechend den 2 verschiedenen Diskriminantenformen. Die Darstellung der Diskriminante ohne überflüssigen Faktor hat P. Gordan gegeben.[2] Aber auch die zweite, für $n = 3$ und $n = 4$ bekannte, Sylvestersche Form läßt sich für beliebiges n ohne überflüssigen Faktor darstellen.

Eine besondere Rolle spielt hier eine zuerst beim Problem der Doppeltangenten aufgetretene Kovariante Q,[3] deren Eigenschaften der erste Abschnitt gewidmet ist. Dabei ergibt sich eine weitere Kovariante P, die zur Sylvesterschen Form in derselben Beziehung steht wie Q zur Gordanschen Form.

---

[1] Über eine kovariante Kurve, Sitzungsber. d. Bayer. Ak. d. Wiss. München 1933 S. 49—59.

[2] Über die Bildung der Diskriminante einer ternären Form, Sitzungsber. d. Bayer. Ak. d. Wiss. München 1887.

[3] O. Dersch, Doppeltangenten einer Kurve n-ter Ordnung, Math. Ann. 7 1874, S. 497—511.

Die Scheidung von Formen mit singulären Punkten kann nach Zahl und Grad der Identitäten von der Form:

$$A_1 f_1 + A_2 f_2 + A_3 f_3 = o$$

vorgenommen werden. Wie man dann in den einzelnen Fällen invariante Kriterien erhält, wird am Beispiel der C^4 gezeigt.

1. Die Kovarianten P und Q.

Ich benutze die in der Theorie der Doppeltangenten und bei der invarianten Normierung des Integrals 3. Gattung auftretende Kovariante $Q = Q(x, y)$ von der Form:[4]

$$(1) \qquad Q\,(x, y) = Q_x^{2n-4} q_y^{n-2} = \frac{2}{n\,(n-1)} \sum_{\varkappa+\lambda+\mu=n-2} (a\,b\,c)^2 a_y^\varkappa b_y^\lambda c_y^\mu,$$

wo der konstante Faktor so gewählt sei, daß $Q\,(x, x) = \Delta$ wird.

Für Q besteht die Identität:

$$(2) \qquad Q\,(x, y) \cdot a_x a_y^{n-1} - Q\,(y, x) \cdot a_y a_x^{n-1}$$
$$= -\frac{n-2}{n} \left(a_x^n \cdot P\,(y, x) - a_y^n \cdot P\,(x, y)\right),$$

wo die Form $P = P(x, y)$ gegeben ist durch:

$$(3) \qquad P\,(x, y) = P_x^{2n-3} p_y^{n-3} = \frac{2}{(n-1)\,(n-2)} \sum_{\varkappa+\lambda+\mu=n-3} (a\,b\,c)^2 a_y^\varkappa b_y^\lambda c_y^\mu.$$

Auch bei P sei der konstante Faktor so gewählt, daß $P(x, x) = \Delta$ wird. Für $n = 3$ hat man die bekannte Salmonsche Identität:

$$o = (a \Delta \widehat{x y})^3 = a_x^3 \Delta_y^3 - a_y^3 \Delta_x^3 + 3\,(\Delta_x^2 \Delta_y \cdot a_x a_y^2 - \Delta_y^2 \Delta_x \cdot a_x^2 a_y).$$

Für $n = 4$ hat die Identität (2) die Form:

$$Q\,(x, y) \cdot a_x a_y^3 - Q\,(y, x) \cdot a_y a_x^3 = -\frac{1}{2}\,(a_x^4 \cdot \Delta_y^5 \Delta_x - a_y^4 \cdot \Delta_x^5 \Delta_y).$$

---

[4] Weitere Literatur zur Form Q bei G. Pick, Zur Theorie der Abelschen Funktionen, Math. Ann. 29. F. Klein, Zur Theorie der Abelschen Funktionen, Math. Ann. 36, 1892, S. 1—83. Die oben angegebene Identität findet sich in diesen Arbeiten nicht explizit, kann aber unmittelbar aus den Entwicklungen von Dersch (aaO. Anm. 7) abgelesen werden.

Für einen Punkt x der Kurve $f = 0$ gibt $Q(x, y)$ eine $C^{n-2}(y)$, welche in den $n-2$ weiteren Schnittpunkten der Tangente in x verschwindet, umgekehrt geht die $C^{2n-4}(x)$ durch die $n(n-1)-2$ Berührungspunkte der Tangenten, die man vom Kurvenpunkt y an die Kurve $f = 0$ ziehen kann. Da diese Punkte zusammen mit dem doppelt gezählten Berührungspunkt der Tangente in y den vollen Schnitt von f mit der Polaren $a_y a_x^{n-1}$ bilden, kann man rein geometrisch auf das Bestehen einer Identität der Art (2) schließen, den Wert von P kann man allerdings nur durch symbolische Rechnung finden. Die Formen P und Q verschwinden unabhängig von y in den singulären Punkten der Kurve, und zwar mit der gleichen Schnittmultiplizität wie das System der ersten Polaren.

Aus der Identität (2) folgt dies zunächst für $a_y^n = 0$, also für Punkte y der Kurve. Nun läßt sich, besondere Kurven mit mehrfacher Überdeckung ausgenommen, durch $\frac{n(n-1)}{2}$ willkürlich zu wählende Punkte y der Kurve keine C^{n-2} legen, woraus folgt, daß jede K^{n-2} u_k^{n-2} sich in der Form darstellen läßt:

$$u_k^{n-2} = u_{y_1}^{n-2} + u_{y_2}^{n-2} + \ldots + u_{y_{\frac{n(n-1)}{2}}}^{n-2},$$

wo die y willkürlich gewählte Punkte der Kurve sind. Es verschwindet daher auch $Q_x^{2n-4} q_k^{n-2}$ für beliebiges k in den singulären Punkten und deshalb auch P.

Auf diese Eigenschaft der Formen Q hat Gordan aaO. die Aufstellung der Diskriminante gegründet. Es muß aber noch gezeigt werden, daß die Formen Q wie P im allgemeinen linear unabhängig sind. Dies gelingt leicht mit Hilfe der Form π, welche der Bedingung genügt:

$$a_\pi^{n-1} = 0,$$

wobei der unbestimmte Zahlenfaktor so festgelegt sei, daß:

$$\Delta_\pi^{3n-6} = D \text{ ist.}$$

Ersetzt man in der Formel (2) die Variabeln y durch Symbole π, so erhält man:

$$-Q_\pi^{2n-4} q_x^{n-2} a_\pi = -\frac{n-2}{n} P_\pi^{2n-3} \cdot f(x)$$

oder: $$\sum_i f_i \left(\pi_i Q_\pi^{2n-4} - \frac{n-2}{n} P_\pi^{2n-3} x_i\right) = 0.$$

Die Faktoren der f_i sind hier in x vom Grade $n-2$. Da aber im allgemeinen sicher keine derartige Identität besteht, wo die Faktoren von niedrigerem Grade sind als $n-1$, folgt:

$$Q_\pi^{2n-4} v_\pi = \frac{n-2}{n} P_\pi^{2n-3} v_x.$$ [5]

Durch wiederholte Anwendung des Prozesses $\sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial u_i}$ erhält man hieraus:

$$Q_\pi^{2n-4} = \frac{n-2}{n} Q_\pi^{2n-4} q_\pi u_x$$

$$Q_\pi^{2n-4} q_\pi = \frac{n-3}{n-1} Q_\pi^{2n-4} q_\pi^2 u_x$$

und schließlich:

$$Q_\pi^{2n-4} u_\pi^{n-2} q_x^{n-2} = \frac{2}{n(n-1)} Q_\pi^{2n-4} q_\pi^{n-2} \cdot u_x^{n-2},$$

und da: $Q_x^{2n-4} q_x^{n-2} = \Delta$ ist,

$$(4) \qquad Q_\pi^{2n-4} u_\pi^{n-2} q_x^{n-2} = \frac{2}{n(n-1)} D \cdot u_x^{n-2}$$

und ebenso:

$$(5) \qquad P_\pi^{2n-3} u_\pi^{n-3} p_x^{n-3} = \frac{2}{(n-1)(n-2)} D u_x^{n-3}.$$

Bestünde nun eine Identität von der Form:

$$Q_x^{2n-4} q_a^{n-2} + \sum_i a_i f_i = 0$$

oder: $$P_x^{2n-3} p_\beta^{n-3} + \sum_i a_i' f_i = 0,$$

[5] P_π^{2n-3} kann nicht identisch verschwinden, da $P_\pi^{2n-3} p_\pi^{n-3} = \Delta_\pi^{3n-6} = D$ ist.

wo α, β Formen des Grades $n - 2$ und $n - 3$ sind, so wäre auch:

$$Q_\pi^{2n-4} q_\alpha^{n-2} = 0; \; P_\pi^{2n-3} p_\beta^{n-3} = 0$$

oder:
$$\frac{2}{n(n-1)} D u_\alpha^{n-2} = 0; \; \frac{2}{(n-1)(n-2)} D u_\beta^{n-3} = 0,$$

also $D = 0$. Demnach sind die Formen Q und P für nichtverschwindendes D linear unabhängig.

Aus der Formel (4) folgt zugleich, daß für nicht verschwindendes D die Polaren von π bis zur $(n - 2)$ten einschließlich linear unabhängig sind. Für die $(n - 1)$ten bestehen ja sicher die 3 Relationen: $a_\pi^{n-1} a_i = 0$.

Bestünde nämlich eine Relation: $k_\pi^\varrho = 0$, $\varrho \leqq n - 2$, wo k_x^ϱ eine Form ϱten Grades sei, so wäre auch: $k_\pi^\varrho Q_\pi^{2n-4} = 0$, woraus wieder $D = 0$ folgt.

2. Die Sylvestersche Diskriminante.

Zum leichteren Verständnis werden im folgenden die Überlegungen zumeist für den Fall $n = 4$ geführt. Sie gelten aber durchweg für beliebiges n. Wie bereits nachgewiesen, besteht für $D = 0$ keine Relation der Form: $P_x^{2n-3} p_\alpha^{n-3} + \sum a_i f_i = 0$.

Man hat also $[n - 3] + 3[n - 2] = [2n - 3]$ linear unabhängige Formen des Grades $2n - 3$, wobei unter $[k]$ der Ausdruck $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ verstanden werden möge.

Da sämtliche C^{2n-3} obiger Art in einem Doppelpunkt verschwinden, so muß beim Auftreten eines Doppelpunktes eine lineare Relation bestehen, was nach Elimination der Konstanten zu einer Determinante der Ordnung $[2n - 3]$ führt, welche verschwinden muß. Da diese Determinante in den Koeffizienten von f vom Grade $3[n - 2] + 3[n - 3] = 3(n - 1)^2$ ist, stellt sie die Diskriminante rein dar und werde als Sylvestersche Form bezeichnet. Für $n = 3$ und $n = 4$ gehen nämlich die P in Δ bzw. die Abgeleiteten von Δ über.

Ersetzt man nun in dieser Determinante die Symbole P durch die Potenzprodukte ternärer Variabeln $u_1, u_2, \ldots u_{[n-3]}$, so erhält man eine Form $F(u_i)$, deren identisches Verschwinden aussagt, daß mindestens eine Identität besteht der Form: $\sum A_i f_i = 0$, wo die A_i vom Grade $(n-2)$ in x sind.

Zu der gleichen Form kommt man aber durch die Aufgabe, eine K^{2n-3} zu bestimmen, welche zu sämtlichen ersten Abgeleiteten von f apolar ist. Daraus folgt:

Verschwindet die Form F nicht identisch in den u, so stellt sie in einer dieser Variabeln, die übrigen als Parameter aufgefaßt, das System der apolaren K^{2n-3} dar.

Für $n=4$ hat man 3 linear unabhängige K^5 in der Form $F(u_1, u_2, u_3)$. Seien $\Delta_{1i} = \Delta_{2i} = \Delta_{3i}$ die ersten Abgeleiteten von Δ, so hat man für D die Form: $D = F(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)\, \Delta_{11}\, \Delta_{22}\, \Delta_{33}$ $= \frac{1}{6} F(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)\, (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3)$. Die letzte Form entsteht, wenn man in F die Symbole Δ vertauscht und die so entstehenden Formen mit geändertem Vorzeichen addiert. Nun sind die 3 linear unabhängigen K^5 bei nichtverschwindendem D auch gegeben durch die ersten Polaren von π. Daraus folgt, daß bis auf eine Potenz der Diskriminante sein muß:

$$D^{\lambda} F(u_1, u_2, u_3) = c.\ (\pi_1 \pi_2 \pi_3)\, u^5_{1\,\pi_1}\, u^5_{2\,\pi_2}\, u^5_{3\,\pi_3},$$

wo c eine numerische Konstante bedeutet. Durch Abzählen der Grade in den Koeffizienten rechts und links folgt $\lambda = 2$.

Den Wert von c findet man, indem man für die u wieder Symbole Δ einträgt:

$$D^2 F(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)\, (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3) = c\, (\pi_1 \pi_2 \pi_3)\, (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3)\, \Delta^5_{1\,\pi_1}\, \Delta^5_{2\,\pi_2}\, \Delta^5_{3\,\pi_3},$$

was nach Ausmultiplizieren der beiden Determinanten unter Berücksichtigung von (5): $\Delta^5_{\pi} = \frac{1}{3} D\, u_x$

ergibt: $$6\, D^3 = c\, \frac{2}{9}\, D^3,$$

woraus dann folgt: $$c = 27.$$

Ersetzt man in der Formel:

$$D^2 F(u_1, u_2, u_3) = 27\, (\pi_1 \pi_2 \pi_3)\, u^5_{1\,\pi_1}\, u^5_{2\,\pi_2}\, u^5_{3\,\pi_3}$$

nur u_2 und u_3 durch Symbole Δ, so erhält man:

$$D^2 F(u, \Delta_2, \Delta_3)(u\Delta_2\Delta_3) = 27(\pi_1\pi_2\pi_3)(u\Delta_2\Delta_3)\, u^5_{1\pi}\,\Delta^5_{2\pi_2}\,\Delta^5_{3\pi_3},$$

woraus folgt:

$$F(u, \Delta_2, \Delta_3)(u\Delta_2\Delta_3) = 6\pi.$$

Die Überlegungen lassen sich unmittelbar für den Fall n verallgemeinern (für $n = 3$ kann man sie leicht bestätigen). Für D hat man den Ausdruck:

$$(6)\qquad D = F(P_1, \ldots P_{[n-3]})\, p_{11}^{n-3} \cdots p_{[n-3]\,3}^{n-3}$$

$$= \frac{1}{[n-3]!} F(P_1, \ldots P_{[n-3]})(p_1 \cdots p_{[n-3]})^{n-3}.$$

Für π folgt dann:

$$(7)\qquad \pi = \frac{1}{[n-3]!} F(u, P_2, \ldots P_{[n-3]})(u p_2 \cdots p_{[n-3]})^{n-3}.$$

3. Die Gordansche Diskriminante.

Da, wie bewiesen, für nichtverschwindendes D keine Relation der Form besteht:

$$Q_x^{2n-4} q_a^{n-2} + \sum_i A_i f_i = 0,$$

so erhält man die Diskriminante auch in Gestalt einer Determinante der Ordnung $[2n-4]$, welche ich die Gordansche Diskriminante nenne. Sie enthält die Koeffizienten von f zur Ordnung

$$3[n-2] + 3[n-3] = 3(n-1)^2,$$

enthält also ebenfalls keinen überflüssigen Faktor. Sie unterscheidet sich also von der Sylvesterschen Diskriminante nur um einen Zahlenfaktor, den man mit einer besonderen Form, z. B. der Form:

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n$$

bestimmen kann. Für $n = 4$ findet man:

$$\text{Gordansche Diskr.} = \binom{5}{48}^3 \text{ Sylvestersche Diskr.}$$

Ersetzt man auch hier wieder die Symbole Q durch Potenzprodukte u, so erhält man eine Form:

$$G(u_1, u_2, \ldots u_{[n-2]}),$$

deren identisches Verschwinden besagt, daß eine Identität der Form besteht:

$$\sum_i A_i f_i = 0,$$

wo die Faktoren A vom Grade $n-3$ sind. Ähnlich wie in (2) kommt man aber auch zur Form G, wenn man die zum System der ersten Abgeleiteten von f apolaren K^{2n-4} sucht. Diese ganze Schar apolarer Kurven ist aber für nichtverschwindendes D auch gegeben durch das System der $(n-2)$ten Polaren von π.

Für $n = 4$ hat man eine Form $G(u_1, u_2, \ldots u_6)$. Seien Q_i allgemein Symbole für Q, so ist:

$$D = G(Q_1, \ldots Q_6)\, q_{11}^2 \ldots q_{63}^2 = \frac{1}{6!} G(Q_1 \ldots Q_6)\,(q_1 \ldots q_6)^2.$$

Für G folgt:

$$D^5 G(u_1, \ldots u_6) = c\,(\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_6)^2\, u_{1\pi_1}^4 u_{2\pi_2}^4 \ldots u_{6\pi_6}^4,$$

wo c ein Zahlenfaktor ist, den man durch nachträgliches Eintragen der Symbole Q wieder bestimmen kann.

Man findet so:

$$6!\, D^6 = c \sum \pm q_{1\pi_1}^2 q_{2\pi_2}^2 \ldots q_{6\pi_6}^2 Q_{1\pi_1}^4 Q_{2\pi_2}^4 \ldots Q_{6\pi_6}^4.$$

Die Determinante hat 720 Glieder, jedes hat den Faktor D^6; da nun nach (4)

$$Q_{1\pi_1}^4 q_{1\pi_1}^2 = D;\; Q_{1\pi_1}^4 Q_{2\pi_2}^4 q_{1\pi_2}^2 q_{2\pi_1}^2 = \frac{1}{6} D^2$$

ist, usf., hängt der Zahlenfaktor des Gliedes ab von den Zyklen, in die man die zugehörige Permutation auflösen kann. So liefert z. B. eine Permutation, die sich in einen Dreierzyklus und eine Transposition auflösen läßt, den Beitrag:

$$-\frac{1}{36} D^3 \cdot \frac{1}{6} D^2 \cdot D^3,$$

und es gibt 120 solcher; auf diese Weise erhält man:

$$D^5 G = \frac{6!\,6^3}{230}\,(\pi_1\pi_2\ldots\pi_6)^2\,u_{1\,\pi_1}^4\,u_{2\,\pi_2}^4\ldots u_{6\,\pi_6}^4.$$

Ersetzt man dagegen nur 5 der Größen u durch Symbole Q, so hebt sich der Faktor D^5 gerade weg, und man erhält:

$$G(u, Q_2, \ldots Q_6)\,(u\,q_2\ldots q_6)^2 = 6!\,\pi.$$

Diese zweite Form von π unterscheidet sich also von der in (2) gegebenen nur durch den Faktor $\left(\frac{5}{48}\right)^3$.

Diese Resultate sind wieder der Verallgemeinerung fähig; es findet sich:

$$(8)\quad G\,(u, Q_2, \ldots Q_{[n-2]})\,(u q_2\ldots q_{[n-2]})^{n-2} = [n-2]!\,\pi.$$

4. Singuläre Fälle.

Verschwindet D nicht, so gibt es nur eine zum System der ersten Polaren von f apolare K^{3n-6}, nämlich π, und ihre Polaren geben das ganze System apolarer Formen des betr. Grades. Die Bestimmung einer apolaren K^r hängt ab von der Erfüllung der Gleichungen:

$$a_K^{n-1}\,u_K^{r-n+1}\,a_x = 0,$$

identisch in x und u. Für die $[r]$ homogenen Konstanten von K hat man demnach $3\,[r-n+1]-j$ lineare Bedingungen, wenn j die Zahl der linear unabhängigen Identitäten von der Form:

$$A_1 f_1 + A_2 f_2 + A_3 f_3 = 0$$

bedeutet, wo die A vom Grade $r-n+1$ sind. Da ich aaO. bewiesen habe, daß für nicht verschwindendes D und auch im Falle eines einfachen Doppelpunktes das ganze System derartiger Identitäten gegeben ist durch:

$$P_1(f_2 f_3 - f_3 f_2) + P_2(f_3 f_1 - f_1 f_3) + P_3(f_1 f_2 - f_2 f_1) = 0,$$

wo die P allgemeine Formen des Grades $r-2n+2$ sind, so beträgt die Zahl der linear unabhängigen K^r für Kurven f ohne singulären Punkt oder mit höchstens einem Doppelpunkt:

für $r \geqq 2n-2: [r]-3[r-n+1]+3[r-2n+2]=[3n-6-r]$

für $r < 2n-2$, aber $\geqq n-1: [r]-3[r-n+1]$.

Für $r = 2n-3$ und $r = 2n-4$ stimmen beide Ausdrücke überein. Für nichtverschwindendes D bilden:

$$\Delta, \ A_i f_i \quad i = 1, 2, 3$$

zusammen $[3n-6]$ linear unabhängige C^{3n-6}, weil sonst Δ_π^{3n-6} gleich Null sein müßte. Für den Fall eines Doppelpunktes dagegen ist:

$$\Delta = A_1 f_1 + A_2 f_2 + A_3 f_3.$$

Außerdem sind im letzten Falle die Polaren von π nicht mehr linear unabhängig.

Auch im Falle beliebiger Singularitäten ist das System der zu den f_i apolaren K^{3n-6} vor allen anderen apolaren K^r bevorzugt.

Zur Vereinfachung des Beweises setze ich voraus, daß die in Abschnitt (2) definierte Form $F(u_1, u_2, \ldots u_{[n-3]})$ nicht identisch verschwinde. Damit sind alle zerfallenden Formen f ausgeschlossen. Denn durch den Ansatz: $f = g \cdot h$ sieht man leicht, daß für eine zerfallende Form f immer eine Identität besteht:

$$A_1 f_1 + A_2 f_2 + A_3 f_3 = 0,$$

wo die A vom Grade $n-2$ sind.

Das Netz der ersten Polaren schneidet auf der Kurve f Punktsysteme aus, welche einen festen Bestandteil enthalten. Dieser entspricht dem Doppelpunktsdivisor $\mathfrak{D}$ und dem größten gemeinsamen Teiler der Verzweigungsdivisoren der Schar.[6]

Die C^{2n-4}: $Q_x^{2n-4} q_a^{n-2} + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$ dagegen, welche die gleichen festen Bestandteile in ihrem Schnittsystem haben, schneiden, weil sie alle adjungierten Kurven des gleichen

[6] Vgl. für die Sprechweise: Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln von Dr. K. Hensel und Dr. G. Landsberg, Leipzig 1902, 25. Vorlesung.

Grades mit diesem festen Bestandteil sind, eine nichtspeziale Vollschar aus. Es gibt demnach nach dem Riemann-Rochschen Satze modulo f genau:

$$(2n-4)n-2d-v-p+1=[n-2]+3[n-3]-[n-4]-k$$

linear unabhängige, wenn $p=[n-2]-d$ das Geschlecht der Kurve f und k die Zahl der linear unabhängigen Relationen bezeichnet von der Form:

$$Q_x^{2n-4}\,q_a^{n-2}+a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3=0.$$

Ebenso schneiden die Kurven C^{3n-6}: $A_1f_1+A_2f_2+A_3f_3$ für verschwindendes D eine nichtspeziale Vollschar aus, und es gibt somit linear unabhängige:

$$(3n-6)n-2d-v-p+1+[2n-6]=[3n-6]-k.$$

Weiter folgt aus der Formel für das Geschlecht p:

$$k=d+v$$

Da es für nichtverschwindendes D $[3n-6]-1$ linear unabhängige Formen C^{3n-6} der Art:

$$A_1f_1+A_2f_2+A_3f_3$$

gibt, bestehen also als Äquivalent der singulären Punkte $k-1$ Identitäten dieser Art.

Es gibt k Formen K^{3n-6}, welche zur Schar dieser C^{3n-6} apolar sind. Diese Formen sind aber wegen der Willkürlichkeit der Formen A gleichzeitig zu den Formen f_i apolar. Da umgekehrt zu den f_i apolare K^{3n-6} auch zur Schar der C^{3n-6} apolar sind, decken sich beide Scharen von Formen K vollständig.

Weiter zeigt man durch das gleiche Schlußverfahren wie in Abschnitt (1), daß:

$$Q_K^{2n-4}=0,\ P_K^{2n-3}=0,$$

wenn K eine apolare K^{3n-6} ist.

Denn wie dort liefert die Identität (2):

$$Q_K^{2n-4}\,v_K=\frac{n-2}{n}\,P_K^{2n-3}\,v_x.$$

Entweder ist hier P_K^{2n-3} gleich Null, dann ist die Behauptung erwiesen, oder man kann weiterschließen, bis entweder $P_K^{2n-3} p_K^m$ gleich Null wird, oder schließlich:

$$Q_K^{2n-4} = \frac{2}{n(n-1)} \Delta_K^{3n-6} u_x^{n-2}.$$

Aber Δ_K^{3n-6} muß verschwinden, wenn auch nur eine Relation der Form:

$$Q_x^{2n-4} q_a^{n-2} + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 = 0$$

besteht, wie man sieht, wenn man an Stelle der x Symbole K setzt.

Für Formen K^r, wo r kleiner als $3n-6$ ist, bestehen diese Beziehungen im allgemeinen nicht mehr. Sie gelten nur für diejenigen Formen K^r, welche lineare Kombinationen von Polaren der Formen K^{3n-6} sind. Da es aber gerade k apolare K^{3n-6} und genau k Relationen der Form:

$$Q_x^{2n-4} q_a^{n-2} + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 = 0$$

gibt, so ist das System der K^{3n-6} dadurch ausgezeichnet, daß die k Formen K zusammen genau k linear unabhängige Polaren, bis zur $(n-2)$ten eingeschlossen, haben.

Die Formen K^{3n-6} haben in vielen Fällen leicht angebbare Gestalt. Sie verteilen sich auf die einzelnen singulären Punkte. Einem k-fachen Punkt ξ mit getrennten Tangenten ($d = [k-2]$, $v = 0$) entsprechen die $[k-2]$ Formen:

$$u_\xi^{3n-4-k} u_\eta^{k-2},$$

wo η beliebig gewählt werden kann. Einer einfachen Spitze ($d = 1$, $v = 1$) die beiden Formen:

$$u_\xi^{3n-6}, \; u_\xi^{3n-7} u_\eta,$$

wenn ξ der Rückkehrpunkt und $\widehat{\xi\eta}$ die Rückkehrtangente bedeutet. Ich gehe nicht näher hierauf ein und will nur zeigen, daß den Formen F und G eine einfache Bedeutung zukommt. Der Kürze halber werde der Fall der C^4 mit 2 getrennten Doppelpunkten genannt. Hier sind die apolaren K^6 gegeben durch: $u_{\xi_1}^6$, $u_{\xi_2}^6$, wo

ξ die Koordinaten der Doppelpunkte seien, die K^5 dagegen durch: $u^5_{\xi_1}$, $u^5_{\xi_2}$, K, und es kann *nicht* Δ^5_K gleich Null sein, weil sonst K eine lineare Kombination der beiden ersten Formen wäre.

Dann ist aber:

$$F(u, v, w) = \Sigma \pm u^5_{\xi_1} v^5_{\xi_2} w^5_K;$$

denn F ist ja diejenige Kombination der $3 K^5$, welche für u gleich v und u gleich w verschwindet. Ersetzt man jetzt v und w beide durch Formen P, so muß die Determinante verschwinden, ersetzt man aber nur w durch P, so erhält man

$$F(u, v, \Delta)\, \Delta_x = \Delta^5_K \cdot [u^5_{\xi_1} v^5_{\xi_2} - u^5_{\xi_2} v^5_{\xi_1}].$$

Die Form $F(u, v, \Delta)$ stellt also die Fundamentalkombinante der beiden Doppelpunkte dar. Für eine Spitze hätte man erhalten:

$$F(u, v, \Delta) = \Delta^5_K\, [u_\xi v_\zeta - u_\zeta v_\xi]\, u^4_\xi v^4_\xi.$$

Der Prozeß $\Omega = \Sigma\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial u_1\, \partial v_2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial u_2\, \partial v_1}\right) y_3$, auf die letzte Form zweimal angewendet, gibt Null; dies gilt dagegen nicht für die erste.

Für eine Spitze lassen sich für $n > 3$ weitere Invarianten angeben, die neben D verschwinden müssen, wie ich für $n = 4$ zeigen will.

Da nämlich die Hessesche Kurve in einer Spitze einen dreifachen Punkt hat, verschwinden die zweiten Abgeleiteten in der Spitze, und es ist:

$$I^{27} = G\,(\Delta_1, \ldots \Delta_6)\,(\Delta_1 \ldots \Delta_6)^2 = 0.$$

Diese Invariante entsteht, wenn man in der Gordanschen Form von D die Formen $Q^4_x\, q^2_y$ durch Δ^2_y ersetzt.

Sie verschwindet nicht identisch, da sie für die Kleinsche C^4, für welche D nicht verschwindet, in D übergeht.[7]

Weiter verschwinden in der Spitze die C^{2n-4}:

$$\Theta = (a\,b\,u)^2\, a^{n-2}_x\, b^{n-2}_x$$

[7] $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$, Formensystem bei P. Gordan, Math. Ann. 17.

identisch in u; denn dies ist die Bedingung, daß der Polarkegelschnitt zur Doppelgeraden wird. Man hat also:

$$I^{21} = G\,(\Theta_1, \ldots \Theta_6)\,(\vartheta_1 \ldots \vartheta_6)^2 = 0.$$

Auch diese Invariante verschwindet nicht identisch, weil sie mit der für die Kleinsche Kurve nicht verschwindenden Invariante 6. Ordnung A von der symbolischen Schreibweise:

$$A = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_6)^2\,(a_1\, a_2\, \ldots\, a_6)^2$$

multipliziert, für die Kleinsche Kurve in D übergeht. Für die allgemeine C^4 hat aber I^{27} die Invariante I^{21} nicht einmal modulo D zum Faktor.

Die in der Diskriminantenmannigfaltigkeit enthaltenen, singulären Bildungen entsprechenden Mannigfaltigkeiten lassen sich im allgemeinen nicht als Vollschnitt von Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension darstellen. Dies scheint für $n > 3$ schon für eine Spitze zu gelten.