Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1936. Heft I

Januar-April-Sitzung

München 1936
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über eine Schar periodischer Lösungen des ebenen Dreikörperproblems (Mondbahnen).

Von Oskar Perron.

Vorgelegt in der Sitzung vom 1. Februar 1936.

§ 1.

Einleitung.

Drei Massenpunkte mit den Massen m_1, m_2, m_3 mögen sich unter der Wirkung des Newtonschen Anziehungsgesetzes in einer Ebene bewegen. Wir bezeichnen die Massenpunkte als Sonne (m_1), Erde (m_2), Mond (m_3); doch wird über die Massenverhältnisse keinerlei einschränkende Annahme gemacht.

Wenn Erd- und Mondmasse in einem Punkt vereinigt wären, der dann also die Masse $m_2 + m_3$ hätte, so wäre für die Relativbewegung der Sonne in bezug auf den vereinigten Erd- und Mond-Massenpunkt u. a. bekanntlich eine Schar von Kreisbahnen möglich. Einen solchen Kreis greifen wir heraus und wählen seinen Radius als Längeneinheit. Wählen wir außerdem die Einheit der Zeit t so, daß die Gravitationskonstante gleich 1 wird, so lauten die Differentialgleichungen für die Relativbewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\alpha^2 \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}^3},$$

wobei

$$\alpha = \sqrt{m_1 + m_2 + m_3}$$

ist. Unsere Kreisbahn vom Radius 1, durch die sie befriedigt werden, hat die Gleichungen

$$(1) \qquad x = \cos \alpha t, \quad y = \sin \alpha t.$$

Führen wir nun ein im Raum bewegtes Koordinatensystem ein, dessen Nullpunkt die Erde ist und das mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit α rotiert, so daß die X-Achse stets durch die Sonne geht, so ist in diesem Koordinatensystem die Sonne in Ruhe, sie hat die Koordinaten 1, 0.

Diese Verhältnisse werden nun dadurch geändert, daß die Mondmasse in Wahrheit nicht mit der Erdmasse vereinigt ist. Wäre die Sonne gar nicht vorhanden, so wäre für den Mond u. a. eine Schar von Kreisbahnen um die Erde möglich, deren Radien und Umlaufszeiten dem dritten Keplerschen Gesetz folgen. Diese Bahnen sind auch in dem soeben eingeführten rotierenden Koordinatensystem geschlossen (Keplersche Ellipsen, die im Raum fest sind, wären es nicht). Nun ist aber auch die Sonne da; diese wird einerseits die Kreisbahnen des Mondes deformieren, und zwar plausiblerweise um so weniger, je kleiner der Radius ist; anderseits wird aber auch der Mond, weil er nicht mehr mit der Erde vereinigt ist, sondern sich bewegt, die Sonne aus ihrer Ruhelage werfen, ebenfalls um so weniger, je kleiner der Mondbahnradius ist. Wenn die Mondmasse m_3 „unendlich klein" ist, fällt das „anderseits" weg; die Sonne bleibt in Ruhe und Herr E. Hopf hat gezeigt, daß unter den möglichen deformierten Mondbahnen geschlossene vorkommen,[1] und zwar sowohl rechtläufige wie rückläufige, wobei das Wort rechtläufig ausdrücken soll, daß der Umlauf im Drehsinn des rotierenden Koordinatensystems vor sich geht.

Für diesen Satz habe ich kürzlich einen neuen Beweis gegeben[2] und im folgenden soll gezeigt werden, daß durch eine kleine Erweiterung meiner Methode auch der Fall behandelt werden kann, daß m_3 nicht unendlich klein ist. Dabei zeigt sich, daß eine Schar von Bewegungen möglich ist, bei denen die deformierte Mondbahn geschlossen ist und die Sonne ebenfalls eine geschlossene annähernd kreisförmige Bahn um den vorhin betrachteten Ruhepunkt beschreibt; außerdem haben Mond und Sonne gleiche Umlaufszeiten, so daß eine periodische Lösung vorliegt (periodisch natürlich in bezug auf das mit der Winkelgeschwindigkeit α

[1] Eberhard Hopf: Über die geschlossenen Bahnen in der Mondtheorie. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch., phys.-math. Klasse, 1929, S. 401 bis 413.

[2] Neuer Existenzbeweis für periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem. Monatshefte für Mathematik und Physik 43 (1936).

rotierende Koordinatensystem). Dabei verhält sich der Abstand des Mondes von der Erde zum Abstand der Sonne vom Ruhepunkt stets annähernd wie $m_2 + m_3$ zu m_3; außerdem ist die Richtung von der Erde zum Mond stets annähernd gleich der Richtung von dem betrachteten Ruhepunkt zur Sonne. Das Wort „annähernd" ist in diesen Aussagen so zu verstehen, daß der angegebene Tatbestand im Limes für gegen Null abnehmende Mondbahnradien stimmt; es handelt sich ja nicht um eine Mondbahn, sondern um eine ganze Schar mit nach Null abnehmenden Radien.

§ 2.

Die Bewegungsgleichungen und hinreichende Bedingungen für Periodizität einer Lösung.

Sind x_ν, y_ν die Koordinaten des Massenpunktes m_ν in bezug auf ein unbewegtes Koordinatensystem, so sind die Differentialgleichungen der Bewegung, wenn die Zeiteinheit wieder so wie in der Einleitung gewählt wird, die folgenden:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = m_2 \frac{x_2 - x_1}{r_{21}^3} + m_3 \frac{x_3 - x_1}{r_{31}^3},$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = m_1 \frac{x_1 - x_2}{r_{12}^3} + m_3 \frac{x_3 - x_2}{r_{32}^3},$$

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} = m_1 \frac{x_1 - x_3}{r_{13}^3} + m_2 \frac{x_2 - x_3}{r_{23}^3},$$

und analog für y_1, y_2, y_3; dabei ist

$$r_{\mu\nu} = r_{\nu\mu} = \sqrt{(x_\mu - x_\nu)^2 + (y_\mu - y_\nu)^2}.$$

Wir setzen nun

$$x_\nu + i y_\nu = z_\nu \quad (i = \sqrt{-1}) \tag{2}$$

und nennen z_ν die komplexe Koordinate des Massenpunktes m_ν. Dann lassen sich die obigen Gleichungen mit den entsprechenden für y_1, y_2, y_3 in folgender Gestalt zusammenfassen:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} = m_2 \dfrac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|^3} + m_3 \dfrac{z_3 - z_1}{|z_3 - z_1|^3}, \\ \dfrac{d^2 z_2}{dt^2} = m_1 \dfrac{z_1 - z_2}{|z_1 - z_2|^3} + m_3 \dfrac{z_3 - z_2}{|z_3 - z_2|^3}, \\ \dfrac{d^2 z_3}{dt^2} = m_1 \dfrac{z_1 - z_3}{|z_1 - z_3|^3} + m_2 \dfrac{z_2 - z_3}{|z_2 - z_3|^3}. \end{cases}$$

Führen wir jetzt die komplexen Relativkoordinaten der Sonne (m_1) und des Mondes (m_3) in bezug auf die Erde (m_2) ein, indem wir

$$(4)\qquad z_1 - z_2 = p, \quad z_3 - z_2 = q$$

setzen, so ergibt sich aus (3)

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 p}{dt^2} = -m_3 \dfrac{q}{|q|^3} - (m_1 + m_2) \dfrac{p}{|p|^3} - m_3 \dfrac{p - q}{|p - q|^3}, \\ \dfrac{d^2 q}{dt^2} = -(m_2 + m_3) \dfrac{q}{|q|^3} - m_1 \dfrac{p}{|p|^3} + m_1 \dfrac{p - q}{|p - q|^3}. \end{cases}$$

Nunmehr setzen wir

$$(6)\qquad p = e^{iat} u, \qquad q = e^{iat} v,$$

wobei wie in der Einleitung

$$(7)\qquad \alpha = \sqrt{m_1 + m_2 + m_3}$$

ist. Dann sind u und v die komplexen Relativkoordinaten der Sonne und des Mondes in bezug auf die Erde in dem in der Einleitung erwähnten rotierenden Koordinatensystem, und die Gleichungen (5) gehen über in

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 u}{dt^2} + 2i\alpha \dfrac{du}{dt} - \alpha^2 u = -m_3 \dfrac{v}{|v|^3} - (m_1 + m_2) \dfrac{u}{|u|^3} - m_3 \dfrac{u - v}{|u - v|^3}, \\ \dfrac{d^2 v}{dt^2} + 2i\alpha \dfrac{dv}{dt} - \alpha^2 v = -(m_2 + m_3) \dfrac{v}{|v|^3} - m_1 \dfrac{u}{|u|^3} + m_1 \dfrac{u - v}{|u - v|^3}. \end{cases}$$

Daneben gelten natürlich auch, wenn man die konjugiert-komplexen Größen in üblicher Weise durch Überstreichen bezeichnet, die folgenden Gleichungen:

$$(8\,a)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\bar{u}}{dt^2} - 2\,i\,\alpha\,\dfrac{d\bar{u}}{dt} - \alpha^2\bar{u} = -m_3\dfrac{\bar{v}}{|v|^3} - (m_1+m_2)\dfrac{\bar{u}}{|u|^3} - m_3\dfrac{\bar{u}-\bar{v}}{|u-v|^3}, \\[2ex] \dfrac{d^2\bar{v}}{dt^2} - 2\,i\,\alpha\,\dfrac{d\bar{v}}{dt} - \alpha^2\bar{v} = -(m_2+m_3)\dfrac{\bar{v}}{|v|^3} - m_1\dfrac{\bar{u}}{|u|^3} + m_1\dfrac{\bar{u}-\bar{v}}{|u-v|^3}. \end{cases}$$

Die Systeme (8) und (8a) sind in Wahrheit völlig gleichbedeutend. Nun handelt es sich um periodische Lösungen des Systems (8) bzw. (8a). Man sieht aber sofort, daß (8) auch dadurch in (8a) übergeht, daß man u, v durch $\bar{u}$, $\bar{v}$ und zugleich t durch $2c-t$ ersetzt, wo c eine beliebige Konstante sein darf, die wir positiv wählen wollen. Wenn also $u = f(t)$, $v = g(t)$ eine Lösung von (8) ist, so ist $u = \overline{f(2c-t)}$, $v = \overline{g(2c-t)}$ ebenfalls eine Lösung von (8). Wenn daher die Lösung $u = f(t)$, $v = g(t)$ für $0 \leqq t \leqq c$ definiert ist und die Eigenschaft hat, daß die Größen

$$(9)\qquad \begin{cases} f(0),\ g(0),\ f(c),\ g(c)\ \text{reell}, \\ f'(0),\ g'(0),\ f'(c),\ g'(c)\ \text{rein imaginär} \end{cases}$$

sind (der Akzent bedeutet die Ableitung nach t), so muß sich diese Lösung über den Wert $t = c$ hinaus in folgender Weise fortsetzen:

$$(10)\qquad \begin{cases} u = f(t), & v = g(t) & \text{für } 0 \leqq t \leqq c, \\ u = \overline{f(2c-t)}, & v = \overline{g(2c-t)} & \text{für } c \leqq t \leqq 2c, \end{cases}$$

so daß sie periodisch mit der Periode $2c$ ist. Denn die in der zweiten Zeile von (10) stehenden Funktionen sind eine Lösung von (8). Diese stimmt aber nebst Ableitungen an der Stelle $t = c$ mit der in der ersten Zeile von (10) stehenden Lösung wegen (9) überein, ist also wegen der eindeutigen Bestimmtheit wirklich deren Fortsetzung. Anderseits stimmen die Werte der Lösung (10) nebst Ableitungen für $t = 0$ und $t = 2c$ wegen (9) überein, so daß sich die Lösung periodisch mit der Periode $2c$ fortsetzt.

§ 3.

Ansatz für eine Schar periodischer Lösungen; der Scharparameter λ.

Wir machen jetzt in (8) unter Einführung eines reellen Parameters λ die Transformation

$$u = 1 + \lambda^2 U, \quad v = \lambda^2 V, \quad t = \lambda^3 \tau \tag{11}$$

und bezeichnen die Differentiation nach τ durch einen Akzent; dadurch gehen die Gleichungen (8) nach Multiplikation mit λ^4 über in das folgende System:

$$U'' + 2i\alpha\lambda^3 U' - \alpha^2\lambda^4(1+\lambda^2 U) = -m_3 \frac{V}{|V|^3} - (m_1+m_2)\lambda^4 \frac{1+\lambda^2 U}{|1+\lambda^2 U|^3} - m_3\lambda^4 \frac{1+\lambda^2 U - \lambda^2 V}{|1+\lambda^2 U-\lambda^2 V|^3}, \tag{12}$$

$$V'' + 2i\alpha\lambda^3 V' - \alpha^2\lambda^6 V = -(m_2+m_3)\frac{V}{|V|^3} - m_1\lambda^4 \frac{1+\lambda^2 U}{|1+\lambda^2 U|^3} + m_1\lambda^4 \frac{1+\lambda^2 U - \lambda^2 V}{|1+\lambda^2 U-\lambda^2 V|^3}. \tag{13}$$

Setzen wir schließlich

$$\sqrt{m_2+m_3} = \beta, \qquad \text{also } \beta^2 + m_1 = \alpha^2, \tag{14}$$

$$\beta^2 U - m_3 V = \alpha^2 W, \tag{15}$$

so geht das System (12), (13) mit den Unbekannten U, V über in das folgende System mit den Unbekannten V, W:

$$V'' + 2i\alpha\lambda^3 V' - \alpha^2\lambda^6 V = -\beta^2 \frac{V}{|V|^3} - m_1\lambda^4 \frac{1+\lambda^2 U}{|1+\lambda^2 U|^3} + m_1\lambda^4 \frac{1+\lambda^2 U - \lambda^2 V}{|1+\lambda^2 U-\lambda^2 V|^3}, \tag{16}$$

$$W'' + 2i\alpha\lambda^3 W' - \alpha^2\lambda^6 W = \beta^2\lambda^4 - m_2\lambda^4 \frac{1+\lambda^2 U}{|1+\lambda^2 U|^3} - m_3\lambda^4 \frac{1+\lambda^2 U - \lambda^2 V}{|1+\lambda^2 U - \lambda^2 V|^3}; \tag{17}$$

dabei hat U auf der rechten Seite nach (15) die Bedeutung

$$U = \frac{1}{\beta^2}(\alpha^2 W + m_3 V). \tag{18}$$

In den Gleichungen (16) und (17) kann man die rechten Seiten nach Potenzen von λ entwickeln, wodurch sie unter Beachtung von (15) übergehen in:

$$V'' + 2i\alpha\lambda^3 V' = -\beta^2 \frac{V}{|V|^3} + \frac{1}{2}\lambda^6(2\alpha^2 V + m_1 V + 3m_1 \overline{V}) + \sum_{n=8}^{\infty} F_n\lambda^n, \tag{16a}$$

$$W'' + 2i\alpha\lambda^3 W' = \frac{3}{2}\alpha^2\lambda^6(W + \overline{W}) + \sum_{n=8}^{\infty} G_n\lambda^n; \tag{17a}$$

dabei sind die F_n und G_n Polynome von $V, \overline{V}, W, \overline{W}$.

Speziell für $\lambda = 0$ hat dieses Gleichungssystem u. a. die Lösung[1]

$$V_0 = e^{i\beta\tau}, \qquad W_0 = 0,$$

die die Periode $\tau = \frac{2\pi}{\beta}$ hat und deren Anfangswerte für $\tau = 0$ die folgenden sind:

$$V_0(0) = 1, \qquad V_0'(0) = i\beta, \qquad W_0(0) = 0, \qquad W_0'(0) = 0.$$

---

[1] Der Index 0 soll andeuten, daß $\lambda = 0$ ist.

Nun läßt sich die Lösung von (16a), (17a), also von (16), (17) mit den modifizierten Anfangswerten

$$V(0) = 1 + \varepsilon_1, \qquad V'(0) = i\beta + \varepsilon_2, \qquad W(0) = \varepsilon_3, \qquad W'(0) = \varepsilon_4$$

bekanntlich[1] in Reihen nach Potenzen der ε_ν und λ entwickeln, die für hinreichend kleine Werte von $|\varepsilon_\nu|$ und $|\lambda|$ absolut konvergieren; und zwar gilt das für ein beliebig langes Intervall von τ, gewiß etwa im Intervall $0 \leqq \tau \leqq \frac{\pi}{\beta}$. Wählen wir daher speziell die Anfangswerte[2]

$$(19) \qquad \begin{cases} V(0) = 1 + a\lambda^3, & V'(0) = i\beta + i\beta b\lambda^3, \\ W(0) = c\lambda, & W'(0) = i\beta d\lambda^7, \end{cases}$$

wo a, b, c, d beliebige reelle Konstanten sind, so läßt sich die Lösung für hinreichend kleine Werte von $|\lambda|$ nach Potenzen von λ entwickeln:

$$(20) \qquad V = e^{i\beta\tau}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau)\lambda^n\right),$$

$$(21) \qquad W = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\tau)\lambda^n.$$

Die Anfangswerte der Funktionen f_n, g_n sind dabei wegen (19) die folgenden:

$$(22) \qquad \begin{cases} f_3(0) = a, & f_3'(0) = i\beta\,(b - a), \\ f_n(0) = 0, & f_n'(0) = 0 \quad \text{für } n \neq 3; \end{cases}$$

$$(23) \qquad \begin{cases} g_1(0) = c, & g_7'(0) = i\beta d, \\ g_n(0) = 0, & g_m'(0) = 0 \quad \text{für } n \neq 1,\ m \neq 7. \end{cases}$$

---

[1] Vgl. J. Horn: Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Leipzig 1905, § 67.

[2] In (19) ist die Wahl der Exponenten von λ bei V und V' nach dem Bau der Gleichung (16a) naheliegend. Bei W und W' wird man durch Versuche auf die zweckmäßigste Wahl geführt; auch einige andere Annahmen würden zum

Mit Rücksicht auf diese Anfangswerte erkennt man sofort, daß bei Einsetzen des Ansatzes (20), (21) in die Gleichungen (16a), (17a) die $f_n(\tau)$, $g_n(\tau)$ Polynome von a, b, c, d werden.

Bei unserer Wahl der Anfangswerte ist gewiß

$$\begin{array}{lll} V(0), & W(0) & \text{reell,} \\ V'(0), & W'(0) & \text{rein imaginär,} \end{array}$$

also nach (18) auch

$$\begin{array}{ll} U(0) & \text{reell,} \\ U'(0) & \text{rein imaginär.} \end{array}$$

Wenn es nun gelingt, die reellen Konstanten a, b, c, d so zu wählen, daß

$$(24) \qquad \begin{cases} V\left(\dfrac{\pi}{\beta}\right), \quad W\left(\dfrac{\pi}{\beta}\right) & \text{reell,} \\[2ex] V'\left(\dfrac{\pi}{\beta}\right), \quad W'\left(\dfrac{\pi}{\beta}\right) & \text{rein imaginär,} \end{cases}$$

also nach (18) auch

$$(25) \qquad \begin{cases} U\left(\dfrac{\pi}{\beta}\right) & \text{reell,} \\[2ex] U'\left(\dfrac{\pi}{\beta}\right) & \text{rein imaginär} \end{cases}$$

wird, so gilt Analoges nach (11) auch für u, v, so daß die Lösung nach § 2 die Periode $\tau = \dfrac{2\pi}{\beta}$, also $t = \dfrac{2\pi\lambda^3}{\beta}$ haben wird. Die Bedingungen (24) nennen wir daher die **Periodizitätsbedingungen**; es sind das augenscheinlich vier Gleichungen für die vier reellen Unbekannten a, b, c, d. Wir werden sehen, daß sie für genügend kleine Werte von $|\lambda|$ eine Auflösung haben, und damit wird die Schar periodischer Lösungen nachgewiesen sein.

Ziel führen; doch gestaltet sich bei der Wahl des Textes die Rechnung am einfachsten. Bemerkt sei übrigens, daß der naheliegende Versuch, alle Exponenten gleich 3 zu wählen, nicht zum Ziel führt.

§ 4.

Ausführung der Integration.

Wir wollen jetzt die Koeffizienten $f_n(\tau)$, $g_n(\tau)$ in (20), (21), soweit für unsere Zwecke nötig, wirklich berechnen. Ganz leicht ist die Berechnung der $g_n(\tau)$ für $n \leqq 7$. Setzt man nämlich die Reihe (21) in die Gleichung (17a) ein, so ergibt sich durch Vergleich der Koeffizienten von $\lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^7$ der Reihe nach:

$$(26)\quad \begin{cases} g_1'' = 0, \quad g_2'' = 0, \quad g_3'' = 0, \quad g_4'' + 2i\alpha g_1' = 0, \\ g_5'' + 2i\alpha g_2' = 0, \quad g_6'' + 2i\alpha g_3' = 0, \\ g_7'' + 2i\alpha g_4' = \frac{3}{2}\alpha^2 (g_1 + \bar{g}_1). \end{cases}$$

Hieraus folgt durch Integration mit Rücksicht auf die durch (23) vorgeschriebenen Anfangswerte:

$$(27)\quad \begin{cases} g_1 = c, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = 0, \quad g_4 = 0, \quad g_5 = 0, \\ g_6 = 0, \quad g_7 = \frac{3}{2}\alpha^2 c \tau^2 + i\beta d \tau. \end{cases}$$

Somit ist

$$(28)\quad \begin{cases} W\left(\frac{\pi}{\beta}\right) = c\lambda + \left(\frac{3\alpha^2}{2\beta^2} c\pi^2 + i d\pi\right)\lambda^7 + \sum_{n=8}^{\infty} (A_{n0} + iB_{n0})\lambda^n, \\ W'\left(\frac{\pi}{\beta}\right) = \left(\frac{3\alpha^2}{\beta} c\pi + i\beta d\right)\lambda^7 + \sum_{n=8}^{\infty} (C_{n0} + iD_{n0})\lambda^n, \end{cases}$$

wo die A_{n0}, B_{n0}, C_{n0}, D_{n0} Polynome von a, b, c, d mit reellen Koeffizienten sind, auf die es nicht weiter ankommen wird.

Umständlicher ist die Berechnung der Funktionen $f_n(\tau)$, die wir bis zum Index $n = 6$ benötigen werden, wobei sich aber auch $f_7(\tau)$ gleich mit ergeben wird. Wir machen zunächst die Transformation

$$V = e^{i\beta\tau} P, \tag{29}$$

wobei dann nach (20)

$$P = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau)\lambda^n \tag{30}$$

ist. Dadurch geht die Gleichung (16a) über in

$$\begin{aligned} P'' + 2i\beta P' - \beta^2 P \quad + 2i\alpha\lambda^3 (P' + i\beta P) = -\beta^2 \frac{P}{|P|^3} \\ + \frac{1}{2}\lambda^6 (2\alpha^2 P + m_1 P + 3 m_1 e^{-2i\beta\tau} \overline{P}) + e^{-i\beta\tau} \sum_{n=8}^{\infty} F_n \lambda^n. \end{aligned} \tag{31}$$

Setzt man jetzt die Reihe (30) in (31) ein, so ergibt der Koeffizientenvergleich von λ:

$$f_1'' + 2i\beta f_1' - \beta^2 f_1 = \frac{1}{2}\beta^2 (f_1 + 3\overline{f_1}).$$

Mit Rücksicht auf die in (22) vorgeschriebenen Anfangswerte folgt hieraus

$$f_1(\tau) = 0. \tag{32}$$

Alsdann liefert der Koeffizientenvergleich von λ^2 für f_2 genau dieselbe Differentialgleichung, die sich soeben für f_1 ergab, und mit Rücksicht auf die Anfangswerte ist auch wieder

$$f_2(\tau) = 0. \tag{33}$$

Genau so liefert alsdann auch der Koeffizientenvergleich von λ^4, λ^5, λ^7 der Reihe nach die Formeln

$$f_4(\tau) = 0, \quad f_5(\tau) = 0, \quad f_7(\tau) = 0. \tag{34}$$

Der Koeffizientenvergleich von λ^3 ergibt dagegen:

$$f_3'' + 2i\beta f_3' - \beta^2 f_3 - 2\alpha\beta = \frac{1}{2}\beta^2 (f_3 + 3\overline{f_3}), \tag{35}$$

und schließlich der von λ^6:

$$(36)\qquad f_6'' + 2i\beta f_6' - \beta^2 f_6 + 2i\alpha(f_3' + i\beta f_3)$$
$$= \frac{1}{2}\beta^2\left(f_6 + 3\bar{f}_6 - \frac{3}{4}f_3^2 - \frac{3}{2}f_3\bar{f}_3 - \frac{15}{4}\bar{f}_3^2\right)$$
$$+ \alpha^2 + \frac{m_1}{2} + \frac{3m_1}{2}e^{-2i\beta\tau}.$$

Die Gleichung (35) stellt sich, wenn man f_3 in den reellen und imaginären Bestandteil zerlegt, als ein System inhomogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten heraus und kann in bekannter Weise integriert werden. Wir schreiben gleich das den Anfangsbedingungen (22) entsprechende Integral hin, das sich dann ohne weiteres als solches verifizieren läßt:

$$(37)\qquad f_3(\tau) = L_1 + L_2(e^{i\beta\tau} - 3e^{-i\beta\tau}) - i\beta L_3\tau,$$

wobei L_1, L_2, L_3 Polynome von a, b mit reellen Koeffizienten sind, und zwar

$$(38)\qquad \begin{cases} L_1 = \dfrac{2\alpha}{\beta} + 2a + 2b, \quad L_2 = \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{1}{2}a + b, \\ L_3 = \dfrac{4\alpha}{\beta} + 3a + 3b. \end{cases}$$

Speziell ist also

$$(39)\qquad \begin{cases} f_3\left(\dfrac{\pi}{\beta}\right) = L_1 + 2L_2 - iL_3\pi, \\ f_3'\left(\dfrac{\pi}{\beta}\right) = -i\beta(4L_2 + L_3). \end{cases}$$

Die Gleichung (36) lautet nun, etwas anders geschrieben:

$$(40)\qquad f_6'' + 2i\beta f_6' - \frac{3}{2}\beta^2(f_6 + \bar{f}_6) = p,$$

wobei

$$(41) \qquad p = -\frac{3\beta^2}{8}(f_3^2 + 2 f_3 \bar{f}_3 + 5 \bar{f}_3^2) - 2 i \alpha (f_3' + i \beta f_3)$$
$$+ \alpha^2 + \frac{m_1}{2}(1 + 3 e^{-2 i \beta \tau}).$$

Nachdem aus (37) die Funktion f_3 und damit auch die konjugiert-komplexe Größe $\bar{f}_3$ bekannt ist, kennt man p, und zwar ist

$$(42) \quad p = -3\beta^2 \Big[L_1^2 - 4 L_1 L_2 e^{i\beta\tau} + L_2^2 (5 e^{2 i \beta \tau} - 2 + e^{-2 i \beta \tau})$$
$$+ i\beta L_1 L_3 \tau - i \beta L_2 L_3 \tau (3 e^{i\beta\tau} - e^{-i\beta\tau}) - \frac{1}{2}\beta^2 L_3^2 \tau^2 \Big]$$
$$+ 2\alpha\beta (L_1 - L_3 + 2 L_2 e^{i\beta\tau} - i \beta L_3 \tau)$$
$$+ \alpha^2 + \frac{m_1}{2}(1 + 3 e^{-2 i \beta \tau}).$$

Die lineare Differentialgleichung (40) kann nun unter Berücksichtigung der Anfangswerte $f_6(0) = 0$, $f_6'(0) = 0$ wieder vollständig integriert werden. Doch ist das nur zum Teil nötig. Schreibt man neben (40) die Gleichung für die konjugiert-komplexen Größen hin, so ergibt sich durch Addition und Subtraktion

$$(43) \qquad (f_6 + \bar{f}_6)'' + 2 i \beta (f_6 - \bar{f}_6)' - 3\beta^2 (f_6 + \bar{f}_6) = p + \bar{p},$$

$$(44) \qquad (f_6 - \bar{f}_6)'' + 2 i \beta (f_6 + \bar{f}_6)' = p - \bar{p}.$$

Aus (44) folgt durch Integration von 0 bis τ

$$(f_6 - \bar{f}_6)' + 2 i \beta (f_6 + \bar{f}_6) = \int_0^\tau (p - \bar{p})\, d\tau,$$

und wenn man diese Gleichung nach Multiplikation mit $2 i \beta$ von (43) subtrahiert, erhält man weiter

$$(45) \quad (f_6 + \bar{f}_6)'' + \beta^2 (f_6 + \bar{f}_6) = p + \bar{p} - 2 i \beta \int_0^\tau (p - \bar{p})\, d\tau = q.$$

Dabei ergibt sich, wenn man p und $\bar{p}$ aus (42) entnimmt, für q der Ausdruck

$$q = M_1 \tau^2 + M_2 \cos \beta \tau + M_3 \cos 2 \beta \tau + M_4, \tag{46}$$

wobei

$$\begin{aligned} M_1 &= \beta^3 L_3 (3 \beta L_3 - 6 \beta L_1 - 4 \alpha), \\ M_2 &= 8 \beta L_2 (3 \beta L_3 - 3 \beta L_1 - \alpha), \end{aligned} \tag{47}$$

während es auf die Werte M_3 und M_4 nicht ankommen wird. Natürlich sind alle M_ν wieder Polynome von a, b mit reellen Koeffizienten. Aus (45) folgt

$$\int q \cos \beta \tau \, d\tau = (f_6 + \bar{f}_6)' \cos \beta \tau + \beta (f_6 + \bar{f}_6) \sin \beta \tau$$

und folglich ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{\beta}} q \cos \beta \tau \, d\tau = -\left[f_6'\left(\frac{\pi}{\beta}\right) + \overline{f_6'\left(\frac{\pi}{\beta}\right)} \right].$$

Setzt man hier für q den Ausdruck (46) ein und führt die Quadratur aus, so erhält man:

$$f_6'\left(\frac{\pi}{\beta}\right) + \overline{f_6'\left(\frac{\pi}{\beta}\right)} = M_1 \frac{2\pi}{\beta^3} - M_2 \frac{\pi}{2\beta}.$$

Daher ist schließlich

$$f_6'\left(\frac{\pi}{\beta}\right) = M_1 \frac{\pi}{\beta^3} - M_2 \frac{\pi}{4\beta} + iN, \tag{48}$$

wo auch N natürlich ein Polynom von a, b mit reellen Koeffizienten ist.

Setzt man jetzt die gefundenen Werte für $f_n\left(\frac{\pi}{\beta}\right)$ und $f_n'\left(\frac{\pi}{\beta}\right)$ in die Gleichung (20) ein, so kommt

$$(49)\quad \begin{cases} V\left(\frac{\pi}{\beta}\right) = -1-(L_1+2L_2-iL_3\pi)\lambda^3+\sum\limits_{n=6}^{\infty}(A_{n1}+iB_{n1})\lambda^n, \\ V'\left(\frac{\pi}{\beta}\right)-i\beta V\left(\frac{\pi}{\beta}\right) = i\beta\,(4L_2+L_3)\lambda^3 \\ \qquad -\left(M_1\frac{\pi}{\beta^3}-M_2\frac{\pi}{4\beta}+iN\right)\lambda^6+\sum\limits_{n=8}^{\infty}(C_{n1}+iD_{n1})\lambda^n, \end{cases}$$

wobei die A_{n1}, B_{n1}, C_{n1}, D_{n1} Polynome von a, b, c, d mit reellen Koeffizienten sind.

Führt man nun die Ausdrücke (49) und (28) in die Periodizitätsbedingungen (24) ein, so gehen letztere über in

$$(50)\quad \begin{cases} L_3\pi\lambda^3+\sum\limits_{n=6}^{\infty}B_{n1}\lambda^n = 0, \\ -\left(M_1\frac{\pi}{\beta^3}-M_2\frac{\pi}{4\beta}\right)\lambda^6+\sum\limits_{n=8}^{\infty}C_{n1}\lambda^n = 0, \end{cases}$$

$$(51)\quad \begin{cases} d\pi\lambda^7+\sum\limits_{n=8}^{\infty}B_{n0}\lambda^n = 0, \\ \frac{3\alpha^2}{\beta}c\pi\lambda^7+\sum\limits_{n=8}^{\infty}C_{n0}\lambda^n = 0, \end{cases}$$

oder nach Unterdrückung überflüssiger Faktoren und mit etwas geänderter Bezeichnung der $B_{n\nu}$, $C_{n\nu}$:

$$(52)\quad \begin{cases} L_3+\sum\limits_{n=3}^{\infty}B'_{n1}\lambda^n = 0, \\ 4M_1-\beta^2M_2+\sum\limits_{n=2}^{\infty}C'_{n1}\lambda^n = 0, \end{cases}$$

$$(53)\quad \begin{cases} c+\sum\limits_{n=1}^{\infty}C^*_{n0}\lambda^n = 0, \\ d+\sum\limits_{n=1}^{\infty}B^*_{n0}\lambda^n = 0. \end{cases}$$

Nun ist nach (47)

$$4 M_1 - \beta^2 M_2 = \beta^3 L_3 (12 \beta L_3 - 24 \beta L_1 - 16 \alpha)$$
$$- 8 \beta^3 L_2 (3 \beta L_3 - 3 \beta L_1 - \alpha)$$
$$= \beta^3 L_3 (12 \beta L_3 - 24 \beta L_1 - 16 \alpha - 24 \beta L_2)$$
$$+ 8 \beta^3 L_2 (3 \beta L_1 + \alpha),$$

und, da $3 \beta L_1 + \alpha$ nach (38) gleich $2 \beta L_3 - \alpha$ ist,

$$4 M_1 - \beta^2 M_2 = \beta^3 L_3 (12 \beta L_3 - 24 \beta L_1 - 16 \alpha - 24 \beta L_2)$$
$$+ 8 \beta^3 L_2 (2 \beta L_3 - \alpha)$$
$$= \beta^3 L_3 (12 \beta L_3 - 24 \beta L_1 - 16 \alpha - 8 \beta L_2) - 8 \alpha \beta^3 L_2.$$

Daher geht die zweite Gleichung (52), wenn man die mit

$$\beta^3 (12 \beta L_3 - 24 \beta L_1 - 16 \alpha - 8 \beta L_2)$$

multiplizierte erste davon abzieht und dann den Faktor $-8 \alpha \beta^3$ streicht, über in

$$L_2 + \sum_{n=2}^{\infty} C''_{n1} \lambda^n = 0. \tag{54}$$

Schließlich kann man die erste Gleichung (52) und die Gleichung (54), wenn man für L_3 und L_2 die Werte aus (38) einsetzt, durch geeignete Linearkombinationen ersetzen, derart, daß in der einen vor dem Summenzeichen nur a, in der andern nur b vorkommt. So erhält man

$$a + \frac{2 \alpha}{3 \beta} + \sum_{n=2}^{\infty} B^*_{n1} \lambda^n = 0.$$

$$b + \frac{2 \alpha}{3 \beta} + \sum_{n=2}^{\infty} C^*_{n1} \lambda^n = 0.$$

Die Periodizitätsbedingungen lauten daher endgültig:

$$(55)\qquad \begin{cases} a + \dfrac{2\alpha}{3\beta} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} B_{n1}^{*}\lambda^{n} = 0, \\ b + \dfrac{2\alpha}{3\beta} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} C_{n1}^{*}\lambda^{n} = 0, \end{cases}$$

$$(56)\qquad \begin{cases} c + \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_{n0}^{*}\lambda^{n} = 0, \\ d + \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_{n0}^{*}\lambda^{n} = 0, \end{cases}$$

wo die $B_{n\nu}^{*}$, $C_{n\nu}^{*}$ Polynome von a, b, c, d mit reellen Koeffizienten sind.

Speziell für $\lambda = 0$ haben diese Gleichungen die Auflösung

$$a = -\frac{2\alpha}{3\beta}, \qquad b = -\frac{2\alpha}{3\beta}, \qquad c = 0, \qquad d = 0$$

und die Funktionaldeterminante ist gleich 1. Daher sind für positive und negative, aber absolut hinreichend kleine Werte von λ eindeutig bestimmte benachbarte Auflösungen a, b, c, d vorhanden, die natürlich reell sind. Damit sind die periodischen Lösungen nachgewiesen.

§ 5.

Interpretation im Sinne der Einleitung.

Man sieht leicht, daß die nachgewiesenen periodischen Lösungen den in der Einleitung geschilderten Charakter haben. Wie bereits auf S. 160 erwähnt, sind nämlich u und v die komplexen Relativkoordinaten der Sonne und des Mondes in bezug auf die Erde in dem rotierenden Koordinatensystem. In diesem System ist aber die Koordinate des in der Einleitung erwähnten ruhenden Punktes in bezug auf die Erde gleich 1; denn dieser Ruhepunkt hat in dem im Raum festen System in bezug auf die Erde nach (1) die komplexe Koordinate

$$\cos\alpha t + i\sin\alpha t = e^{i\alpha t},$$

im rotierenden System also die komplexe Koordinate 1. Daher sind die komplexen Koordinaten der Sonne in bezug auf den Ruhepunkt und des Mondes in bezug auf die Erde gleich $u - 1$ und v, also nach (11) gleich

$$\lambda^2 U \text{ und } \lambda^2 V. \tag{57}$$

Dabei hat V die Entwicklung

$$V = e^{i\beta\tau}\left(1 + f_3(\tau)\lambda^3 + \cdots\right). \tag{58}$$

Ferner ist nach (18)

$$\begin{aligned} (59)\quad U &= \frac{m_3}{\beta^2} V + \frac{\alpha^2}{\beta^2} W \\ &= \frac{m_3}{\beta^2} e^{i\beta\tau}\left(1 + f_3(\tau)\lambda^3 + \cdots\right) + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(g_1(\tau)\lambda + g_2(\tau)\lambda^2 + \cdots\right). \end{aligned}$$

Daraus ersieht man, daß die den komplexen Koordinaten (57) entsprechenden Vektoren für kleine $|\lambda|$ stets annähernd gleich gerichtet sind und sich ihrer Größe nach annähernd wie m_3 zu $m_2 + m_3$ verhalten. Denn während die Entwicklungen von $\lambda^2 U$ und $\lambda^2 V$ nach (58) und (59) wirklich mit der zweiten Potenz von λ anfangen, ist

$$\begin{aligned} (m_2 + m_3)\lambda^2 U - m_3\lambda^2 V = \beta^2\lambda^2 U - m_3\lambda^2 V &= \alpha^2\lambda^2 W \\ &= \alpha^2 g_1(\tau)\lambda^3 + \alpha^2 g_2(\tau)\lambda^4 + \ldots \\ &= \alpha^2 c\lambda^3 + \alpha^2 g_7(\tau)\lambda^9 + \ldots; \end{aligned}$$

diese Entwicklung beginnt also erst mit einer höheren als der zweiten Potenz von λ. Wir wollen noch zeigen, daß es die vierte Potenz ist, weil die Entwicklung von c mit der ersten Potenz beginnt.

Die durch Auflösung der Gleichungen (55), (56) sich ergebenden Größen a, b, c, d lassen sich bekanntlich nach Potenzen von

λ entwickeln. Dabei zeigt die erste Gleichung (56), daß die Entwicklung von c kein konstantes Glied hat. Um einzusehen, daß sie genau mit der ersten Potenz von λ beginnt, muß gezeigt werden, daß $C^*_{1,0} \neq 0$ ist oder, was dasselbe sagt[1]: $C_{8,0} \neq 0$. Nun ist aber (vgl. (28) und (21))

$$C_{8,0} + i\, D_{8,0} = g_8'\left(\frac{\pi}{\beta}\right).$$

Um g_8' zu berechnen, braucht man in (17a) die Größe G_8. Aus (17) ergibt sich aber, wenn man die Entwicklung weiter fortsetzt:

$$G_8 = -m_2\left[\frac{3}{8}U^2 + \frac{3}{4}U\bar{U} + \frac{15}{8}\bar{U}^2\right]$$

$$-m_3\left[\frac{3}{8}(U-V)^2 + \frac{3}{4}(U-V)(\bar{U}-\bar{V}) + \frac{15}{8}(\bar{U}-\bar{V})^2\right].$$

Da nun

$$V_{\lambda=0} = e^{i\beta\tau}, \quad W_{\lambda=0} = 0,$$

also mit Rücksicht auf (14) und (15)

$$U_{\lambda=0} = \frac{m_3}{\beta^2}e^{i\beta\tau}, \qquad (U-V)_{\lambda=0} = -\frac{m_2}{\beta^2}e^{i\beta\tau},$$

so ergibt sich

$$(G_8)_{\lambda=0} = -\frac{3\,m_2 m_3}{8\,\beta^2}\left(e^{2i\beta\tau} + 2 + 5\,e^{-2i\beta\tau}\right).$$

Beim Einsetzen der Reihe (21) in (17a) liefert also der Koeffizientenvergleich von λ^8 die Gleichung

$$g_8'' + 2\,i\,\alpha\, g_5' = \frac{3}{2}\alpha^2(g_2 + g_2) - \frac{3\,m_2 m_3}{8\,\beta^2}\left(e^{2i\beta\tau} + 2 + 5\,e^{-2i\beta\tau}\right).$$

---

[1] Man beachte, daß die erste Gleichung (56) ja nichts anderes ist als die von einem überflüssigen Faktor befreite zweite Gleichung (51).

Hieraus folgt, da g_5 und g_2 nach (27) verschwinden, durch Integration von o bis τ:

$$g_8'(\tau) = -\frac{3\,m_2 m_3}{8\,\beta^2}\left(\frac{e^{2i\beta\tau}-1}{2\,i\,\beta} + 2\tau + 5\,\frac{e^{-2i\beta\tau}-1}{-2\,i\,\beta}\right).$$

Also speziell

$$C_{8,0} + i\,D_{8,0} = g_8'\left(\frac{\pi}{\beta}\right) = -\frac{3\,m_2 m_3}{8\,\beta^2}\cdot\frac{2\,\pi}{\beta};$$

daher ist $C_{8,0} \neq 0$; w. z. b. w.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die gefundenen periodischen Bahnen für $\lambda > 0$ rechtläufige, für $\lambda < 0$ rückläufige Bahnen sind, die sich bereits nach e i n e m Umlauf schließen. Das erkennt man sofort aus den Formeln (58), (59), wenn man bedenkt, daß $\tau = \lambda^{-3} t$ ist.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1936

Band/Volume: 1936

Autor(en)/Author(s): Perron Oskar

Artikel/Article: Über eine Schar periodischer Lösungen des ebenen Dreikörperproblems (Mondbahnen) 157-176