Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1936. Heft III

Sitzungen Oktober bis Dezember

München 1936
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Abschätzung der Bildlänge von Randelementen bei konformer Abbildung auf den Einheitskreis.

Von Helmut Unkelbach in München.

Vorgelegt von Herrn Perron in der Sitzung vom 17. Oktober.

In der vorliegenden Arbeit soll das folgende Problem behandelt werden: Gegeben sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet G der ζ-Ebene und ein Punkt ζ_0 in seinem Innern. $z = g(\zeta)$ sei eine Funktion, welche G auf den Kreis $|z| < 1$ konform abbildet, so daß $g(\zeta_0) = 0$ ist. Der Rand von G möge einen Jordanbogen R mit den Endpunkten ζ_1 und ζ_2 enthalten. Dann entspricht R einem Kreisbogen $z = e^{\psi i}$, wo ψ ein gewisses Interwall $\psi_1 \leqq \psi \leqq \psi_2$ durchläuft. Es soll nun auf Grund der geometrischen Eigenschaften von G und der Lage von ζ_0 innerhalb G die Länge $\alpha = \psi_2 - \psi_1$ unseres Kreisbogens abgeschätzt werden. Besonderes Interesse bietet dabei der Fall, daß G das Äußere eines Polygons, R eine Polygonseite und ζ_0 der unendlich ferne Punkt ist.[1]

Von wesentlicher Bedeutung für unsere Betrachtungen ist ein Satz von Löwner,[2] welcher folgendes aussagt: Wenn für $|z| < 1$ die Funktion $\mathfrak{f}(z)$ regulär und $|\mathfrak{f}(z)| < 1$ ist, wenn $\mathfrak{f}(0) = 0$ ist und wenn $\mathfrak{f}(z)$ auf einem Bogen der Länge α des Kreises $|z| = 1$ stetige Randwerte vom Betrag 1 besitzt, so bildet $\mathfrak{f}(z)$ diesen Bogen auf einen nicht kürzeren ab. Die Länge bleibt nur bei den Drehungen εz erhalten.

Auf Grund der vorhin eingeführten Bezeichnungen können wir den Satz von Löwner auch folgendermaßen aussprechen:

---

[1] Unsere Betrachtungen lassen sich leicht auf den Fall ausdehnen, daß $g(\zeta_0) = z_0$ mit $|z_0| < 1$ ist. Alle Sätze der vorliegenden Arbeit gelten auch für diesen allgemeineren Fall, wenn man die Bildlänge von R durch das mit 2π multiplizierte harmonische Maß des Bildes von R im Punkte z_0 in bezug auf den Einheitskreis ersetzt (s. R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, Berlin 1936).

[2] K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. Math. Ann. 89 (1923).

Liegt G innerhalb des Kreises $|\zeta| \leqq 1$, ist $\zeta_0 = 0$ und fällt R mit einem Bogen der Länge β des Kreises $|\zeta| = 1$ zusammen, so ist

$$\alpha \leqq \beta.$$

Das Gleichheitszeichen kann nur dann stehen, wenn G gleich dem Einheitskreis ist. Es ist nun unsere Aufgabe, den Satz von Löwner von den einschränkenden Voraussetzungen über G, ζ_0 und R weitgehend frei zu machen. Dies gelingt bereits im folgenden

Satz I.

Das Gebiet G möge als Teil einer unbegrenzten Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$ aufgefaßt werden. Die geometrische Konfiguration von $\mathfrak{F}$, G, R und ζ_0 möge so beschaffen sein, daß sich auf $\mathfrak{F}$ drei schlichte Kreisbogen (oder gerade Strecken) k, k_1, k_2 konstruieren lassen, welche den folgenden Bedingungen genügen:

1. Die Kreisbogen k_1 und k_2 bilden ein Kreisbogenzweieck G_1, das ζ_0 im Innern enthält und dessen Ecken mit ζ_1 und ζ_2 zusammenfallen;
2. k soll durch ζ_0, ζ_1 und ζ_2 hindurchgehen;
3. k_2 soll keinen inneren Punkt von G enthalten;
4. k_1 soll so gewählt werden, daß R keinen inneren Punkt von G_1 enthält.

Die (auf $\mathfrak{F}$, und zwar innerhalb G_1 gemessenen) Winkel zwischen k_2 und k bzw. k_2 und k_1 mögen mit σ bzw. σ_1 bezeichnet werden. Dann gilt für die durch $z = g(\zeta)$ vermittelte Abbildung:

$$\alpha \leqq 2 \frac{\sigma}{\sigma_1} \pi.$$

Das Gleichheitszeichen kann nur dann gelten, wenn G gleich G_1 und R gleich k_1 ist.

Beweis: Wir konstruieren zunächst eine Funktion $z = g_1(\zeta)$, welche G_1 auf den Kreis $|z| < 1$ konform abbildet, so daß $g_1(\zeta_0) = 0$. Durch

$$u = e^{\tau i} \left(\frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2} \right)^{\frac{\pi}{\sigma_1}}$$

möge G_1 auf die Halbebene $\mathfrak{J}(u) > 0$ bzw. $\mathfrak{J}(u) < 0$ abgebildet werden, so daß k_1 der positiven Halbachse entspricht. Dann ist

$$u_0 = u(\zeta_0) = r \cdot e^{\pm \frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_1} \pi i}.$$

r und τ sind positive Konstanten, die wir nicht näher zu bestimmen brauchen. Die Abbildung auf den Kreis $|z| < 1$ erfolgt dann durch

$$z = \frac{u - u_0}{u - \bar{u}_0}.$$

Dabei ist $z(0) = e^{\pm 2 \frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_1} \pi i}$ und $z(\infty) = 1$. Also entspricht

k_1 einem Bogen mit der Länge $\alpha_1 = 2\pi - 2 \frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_1} \cdot \pi$ oder

$\alpha_1 = 2 \frac{\sigma}{\sigma_1} \pi$, wie in Satz I behauptet wurde.

Ist G von G_1 verschieden, so betrachten wir den Durchschnitt G_2 der Gebiete G und G_1. Auf Grund der Bedingungen 3. und 4. ist G_2 ein einfach zusammenhängendes Gebiet, welches ζ_0 im Innern enthält. Die Funktion $z = g_2(\zeta)$ möge G_2 auf den Kreis $|z| < 1$ abbilden, so daß $g_2(\zeta_0) = 0$ ist. k_1 möge dabei einem Bogen der Länge α_2 entsprechen. Bezeichnet man die Umkehrfunktion von $z = g_2(\zeta)$ mit $\zeta = \bar{g}_2(z)$, so erfüllt die Funktion $z_* = g(\bar{g}_2(z)) = g_*(z)$ die Voraussetzungen des Satzes von Löwner, und zwar bildet sie einen Bogen des Kreises $|z| = 1$ mit der Länge $2\pi - \alpha_2$ auf einen Bogen des Kreises $|z_*| = 1$ mit der Länge $2\pi - \alpha$ ab. Also ist $2\pi - \alpha \geqq 2\pi - \alpha_2$ oder

$$\alpha \leqq \alpha_2. \tag{I}$$

Ebenso erfüllt die Funktion $z_{**} = g_1(\bar{g}_2(z)) = g_{**}(z)$ die Voraussetzungen des Satzes von Löwner. Sie bildet einen Bogen des Kreises $|z| = 1$ mit der Länge α_2 auf einen Bogen des Kreises $|z_{**}| = 1$ mit der Länge α_1 ab. Also ist

$$\alpha_2 \leqq \alpha_1. \tag{II}$$

Wegen $G \neq G_1$ ist G_2 ein echtes Teilgebiet entweder von G oder von G_1. Daher scheidet in (I) oder in (II) das Gleichheitszeichen aus. Also gilt $\alpha < 2\frac{\sigma}{\sigma_1}\pi$, w. z. b. w.

Die Bedingungen 1. bis 4. von Satz I sind für weite Klassen von Gebieten G erfüllbar, falls das Randelement R hinreichend klein ist. Für größere Teile des Randes kann es dagegen leicht vorkommen, daß die Bedingung 4. nicht mehr erfüllbar ist. In diesem Falle ist dann die Abschätzung durch Unterteilung von R vorzunehmen.

Wir wollen nun wieder zur Betrachtung solcher Funktionen zurückkehren, welche auf einem Bogen der Länge α stetige Randwerte vom Betrag Eins annehmen. Dabei beschränken wir uns jetzt auf solche Funktionen $\zeta = h(z)$, welche den Kreis $|z| < 1$ auf ein schlichtes Gebiet abbilden; für $|h(z)|$ wollen wir jedoch im Gegensatz zum Satz von Löwner keine obere Schranke festsetzen. Auch in diesem Falle kann man zu einer einfachen Abschätzung von α gelangen, wenn man statt der Normierung $\mathfrak{f}(0) = 0$ eine beliebige Normierung mit $|h(0)| \geqq 1$ betrachtet. Es gilt nämlich der nachstehende

Satz II

Die Funktion $\zeta = h(z)$ möge die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $\zeta = h(z)$ vermittelt eine schlichte konforme Abbildung des Kreises $|z| < 1$;
2. $h(z)$ besitzt auf einem Bogen der Länge α des Kreises $|z| = 1$ stetige Randwerte vom Betrag Eins;
3. der Bildbogen β von α möge in positivem Sinn durchlaufen werden, wenn α in positivem Sinn durchlaufen wird;[1]
4. $|h(0)| \geqq 1$.

Dann ist notwendig

$$\alpha \leqq \pi.$$

[1] Dieser Sachverhalt braucht beim Satz von Löwner nicht vorausgesetzt zu werden, da er dort aus $|\mathfrak{f}(z)| \leqq 1$ folgt.

Das Gleichheitszeichen gilt nur für solche Funktionen $\zeta = h_1(z)$, welche den Kreis $|z| < 1$ auf die längs eines Teiles von $|\zeta| = 1$ aufgeschlitzte ζ-Ebene so abbilden, daß $|h(0)| = 1$ ist.

Satz II ist lediglich ein Spezialfall von Satz I. Um das einzusehen, denkt man sich das durch β überdeckte Stück des Kreises $|\zeta| = 1$ durch einen Schlitz s aufgeschlitzt, wobei β als inneres Ufer von s aufzufassen ist. Dann dürfen wir k_1 gleich β wählen. Da das Gebiet G wegen der Schlichtheit den Schlitz s von außen her nicht überschreiten kann, dürfen wir das äußere Ufer von s als k_2 auffassen. Ist $|h(0)| = 1$, so ergänzt k den Schlitz s zum vollen Einheitskreis. G_1 ist in diesem Fall die durch s aufgeschlitzte ζ-Ebene und es ist $\sigma = \pi$ und $\sigma_1 = 2\pi$. Daraus folgt bereits $\alpha \leqq \pi$. Ist $|h(0)| > 1$, so ist $\sigma < \pi$ und daher $\alpha < \pi$, w. z. b. w.

Wir wollen nun den Satz II auf die konforme Abbildung des Äußeren eines schlichten Polygons auf den Einheitskreis anwenden. Dabei verstehen wir unter dem Äußeren $\mathfrak{P}$ eines schlichten Polygons ein einfach zusammenhängendes, schlichtes Gebiet, welches den Punkt ∞ im Innern enthält und dessen Rand sich aus endlich vielen geraden Strecken zusammensetzt. Diese Definition umfaßt z. B. auch solche Gebiete, welche aus der längs einer ganz im Endlichen verlaufenden, stückweise geraden Linie aufgeschlitzten Ebene bestehen. Man wird die Abbildung naturgemäß so normieren, daß der Punkt $\zeta = \infty$ dem Nullpunkt des z-Einheitskreises entspricht. Dann gilt der folgende

Satz III.

Bildet die Funktion $\zeta = p(z)$ das Äußere $\mathfrak{P}$ eines schlichten Polygons so auf den Kreis $|z| < 1$ ab, daß der Punkt $\zeta = \infty$ dem Punkt $z = 0$ entspricht, so gilt für die Bildlänge λ einer beliebigen Polygonseite l

$$\lambda \leqq \pi.$$

Das Gleichheitszeichen steht nur dann, wenn $\mathfrak{P}$ die längs einer geraden Strecke aufgeschlitzte Ebene ist.

Beweis: Wir transformieren die ζ-Ebene durch eine lineare Transformation $\zeta_* = \mathfrak{L}(\zeta)$; dabei möge diejenige Halbebene, welche mit $\mathfrak{P}$ das Randstück l (d. h. das äußere Ufer von l) gemeinsam hat, in den Kreis $|\zeta_*|<1$ übergehen. Dann erfüllt die Funktion $\zeta_* = \mathfrak{L}\,(p(z)) = h_*\,(z)$ die Voraussetzungen von Satz II; insbesondere ist $|h_*\,(0)| = 1$. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung von Satz III.

Für die Summe $\lambda_1+\lambda_2$ der Bildlängen zweier aufeinanderfolgender Polygonseiten l_1 und l_2 liefert Satz III lediglich die triviale Ungleichung $\lambda_1+\lambda_2 \leqq 2\pi$. Diese Abschätzung läßt sich jedoch gemäß Satz IV für den Fall verbessern, daß l_1 und l_2 als Seiten von $\mathfrak{P}$ aufgefaßt eine Ecke bilden, deren Winkel kleiner als 2π ist.

Satz IV

Bilden die aufeinanderfolgenden Polygonseiten l_1 und l_2 einen innerhalb $\mathfrak{P}$ gemessenen Winkel φ mit $\pi < \varphi < 2\pi$, so gilt für die Summe $\lambda_1+\lambda_2$ ihrer Bildlängen bei der durch $\zeta = p\,(z)$ vermittelten Abbildung

$$\text{a)}\ \lambda_1+\lambda_2<\varphi;$$

ist dagegen $\varphi<\pi$, so gilt

$$\text{b)}\ \lambda_1+\lambda_2<\pi.$$

Beweis: Wir bezeichnen die an l_1 und l_2 liegenden Polygonecken fortlaufend mit ζ_1, ζ_3, ζ_2 und den von ζ_1 über ζ_3 nach ζ_2 führenden Kreisbogen mit K. Nun können wir für $\pi<\varphi<2\pi$ Satz I unmittelbar zur Anwendung bringen: k_1 sei das äußere und k_2 das innere Ufer von K; k ist dann die von ζ_1 über ∞ nach ζ_2 verlaufende gerade Linie. $\mathfrak{F}$ sei die Riemannsche Fläche von $\sqrt{\frac{\zeta-\zeta_1}{\zeta-\zeta_2}}$. k_1 bzw. k mögen dem gleichen Blatt von $\mathfrak{F}$ angehören wie der über k_1 bzw. k gelegene Teil von $\mathfrak{P}$; dagegen möge k_2 einem andern Blatt von $\mathfrak{F}$ als k_1 angehören. Dann sind alle Voraussetzungen von Satz I erfüllt; es ist $\sigma_1 = 2\pi$, und eine leichte elementar-geometrische Betrachtung ergibt $\sigma = \varphi$. Daraus folgt die Behauptung a). Ganz analog verläuft der Beweis der Behauptung b); dabei spielt die gerade Strecke $\zeta_1\,\zeta_2$ die Rolle von K.

Nach Satz IV besteht ein gewisser Zusammenhang zwischen den Bildlängen der Polygonseiten und den Winkeln des Polygons. Dies legt die Frage nahe, ob es in manchen Fällen nicht möglich ist, die Bildlängen explizit durch die Polygonwinkel auszudrücken. Ich will im folgenden zeigen, daß dies in zwei Fällen wirklich zutrifft: wenn das Polygon ein Dreieck und wenn es ein Deltoid[1] ist. Von dem trivialen Fall des regulären n-Ecks $\left(\lambda = \frac{2\pi}{n}\right)$ können wir dabei absehen. Die Berechnung der Bildlängen der Dreiecksseiten führt zu einer bemerkenswerten Analogie mit den Sätzen der elementaren Dreiecks-Geometrie. Es gilt nämlich der folgende

Satz V.

Bildet die Funktion $\zeta = p_3(z)$ das Äußere des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ mit den Außenwinkeln χ_ν $(\nu = 1, 2, 3)$[2] so auf den Kreis $|z| < 1$ ab, daß der Punkt $\zeta = \infty$ dem Punkt $z = 0$ entspricht, so bestehen zwischen den Bildlängen λ_ν der Dreiecksseiten l_ν und den Außenwinkeln χ_ν die folgenden Beziehungen:

a) Sinus-Satz:

$$\chi_1 : \chi_2 : \chi_3 = \sin \lambda_1 : \sin \lambda_2 : \sin \lambda_3;$$[3]

b) Cosinus-Satz:

$$\chi_3^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + 2\, \chi_1 \chi_2 \cos \lambda_3.$$

Die Beziehungen zwischen χ_ν und λ_ν bleiben also richtig, wenn wir χ_ν durch l_ν und λ_ν durch χ_ν ersetzen.

Beweis: Wir können die Abbildung so normieren, daß $A_1 = p_3(1)$ ist. Nach der Schwarz-Christoffelschen Formel hat dann die Funktion $\zeta = p_3(z)$ (abgesehen von einer Ähnlichkeits-

---

[1] D. i. ein Viereck, welches bezüglich einer Diagonalen symmetrisch ist.

[2] Bezeichnet man die Winkel des im Endlichen gelegenen Dreiecks mit χ'_ν, so ist $\chi_\nu = \pi - \chi'_\nu$.

[3] Aus dem Sinus-Satz und aus $\sum_{\nu=1}^{3} \lambda_\nu = 2\pi$ folgt leicht $\lambda_\nu \leqq \pi$, d. i. die Aussage von Satz III für den Spezialfall des Dreiecks. Auf diesem Wege habe ich ursprünglich Satz III bewiesen. Den Hinweis auf den einfacheren und weitertragenden Beweis mit Hilfe des Satzes von Löwner verdanke ich einer mündlichen Mitteilung von Herrn Professor Dr. Carathéodory.

Transformation der Variablen ζ) notwendig die folgende Gestalt:

$$\zeta = p_3(z) = \int_{z_0}^{z} (t-1)^{\frac{\chi_1}{\pi}} \left(t - e^{\lambda_3 i}\right)^{\frac{\chi_2}{\pi}} \left(t - e^{-\lambda_2 i}\right)^{\frac{\chi_3}{\pi}} \cdot \frac{dt}{t^2}. \tag{III}$$

Dabei ist z_0 irgendein Wert mit $0 < |z_0| < 1$; die Ecken A_2 und A_3 entsprechen den Punkten $z = e^{\lambda_3 i}$ und $z = e^{-\lambda_2 i}$ des Kreises $|z| = 1$. Den Integranden $p_3'(t)$ kann man für $|t| < 1$ folgendermaßen entwickeln:

$$p_3'(t) = \frac{a_{-2}}{t^2} + \frac{a_{-1}}{t} + a_0 + a_1 t + \ldots$$

Also ist $\quad p_3(z) = -\frac{a_{-2}}{z} + a_{-1} \log z + a_0 z + \ldots + C.$

Da $z = 0$ ein Pol 1. Ordnung von $p_3(z)$ sein muß, ist das Residuum a_{-1} des Integranden gleich Null,[1] d. h.

$$\left[\frac{d}{dt} t^2 \cdot p_3'(t)\right]_{t=0} = 0$$

oder $\quad \chi_1 + \chi_2 e^{-\lambda_3 i} + \chi_3 e^{\lambda_2 i} = 0,$[2] $\quad$ (IV)

d. h. $\quad \chi_1 + \chi_2 \cos \lambda_3 + \chi_3 \cos \lambda_2 = 0$

und $\quad \chi_2 \sin \lambda_3 - \chi_3 \sin \lambda_2 = 0.$

---

[1] Durch Betrachtung der Residuen des Integranden gelingt es oft, die Konstanten in den Schwarz-Christoffelschen Formeln so zu bestimmen, daß sich die Abbildungsfunktion eines vorgegebenen polygonalen Bereiches ergibt; dies trifft auch in solchen Fällen zu, wo es sich nicht um die Abbildung des Äußeren eines Polygons handelt. Eine ausführlichere Arbeit über diesen Gegenstand habe ich in Vorbereitung.

[2] Ist diese Bedingungsgleichung nicht erfüllt, so vermittelt die Funktion (III) nicht die konforme Abbildung des z-Einheitskreises auf das Äußere eines Dreiecks. Diese Tatsache ist in der neueren Literatur zum Teil übersehen worden. Dagegen findet sich, wie ich nachträglich feststellen konnte, in einer schon längst vergessenen Arbeit von J. C. Kluyver („Konforme Abbildungen, welche von der ζ-Funktion vermittelt werden"; Zeitschr. f. Math. u. Phys., Leipzig 1895. S. 132) eine ähnliche Bedingungsgleichung für die konforme Abbildung des Äußeren eines beliebigen Polygons auf die Halbebene; die in Satz V ausgesprochenen Zusammenhänge werden allerdings durch die Abbildung auf die Halbebene etwas verschleiert.

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt unmittelbar die Behauptung von Satz V. Durch Satz V b) ist λ_ν eindeutig bestimmt, da nach Satz III $\lambda_\nu \leqq \pi$ ist. Wegen $\sum_{\nu=1}^{3} \chi_\nu = 2\pi$ kann man auch schreiben: $\lambda_3 = \arccos\left(1 - 2\pi \cdot \frac{\chi_1 + \chi_2 - \pi}{\chi_1 \cdot \chi_2}\right) \leqq \pi$.

Auf analoge Weise erhält man den folgenden

Satz VI.

Bildet die Funktion $\zeta = p_D(z)$ das Äußere des Deltoids $A_1 A_2 A_3 A_2'$ mit der Symmetrielinie $A_1 A_3$ und den Außenwinkeln χ_ν ($\nu = 1, 2, 3$) so auf den Kreis $|z| < 1$ ab, daß der Punkt $\zeta = \infty$ dem Punkt $z = 0$ entspricht, so sind die Bildlängen λ_1 und λ_2 der Deltoidseiten $l_1 = A_1 A_2 = A_1 A_2'$ und $l_2 = A_2 A_3 = A_2' A_3$ bestimmt durch

$$\cos \lambda_1 = \frac{\chi_3 - \chi_1}{2\chi_2} \qquad \cos \lambda_2 = \frac{\chi_1 - \chi_3}{2\chi_2}.$$

Beweis: Wir können aus Symmetriegründen die Abbildung so normieren, daß $A_1 = p_D(1)$ und $A_3 = p_D(-1)$. Nach der Schwarz-Christoffelschen Formel hat dann die Funktion $\zeta = p_D(z)$ (abgesehen von einer Ähnlichkeits-Transformation) notwendig die folgende Gestalt:

$$\zeta = p_D(z) = \int_{z_0}^{z} (t-1)^{\frac{\chi_1}{\pi}} (t^2 - 2t\cos\lambda_1 + 1)^{\frac{\chi_2}{\pi}} (t+1)^{\frac{\chi_3}{\pi}} \cdot \frac{dt}{t^2}. \qquad \text{(V)}$$

Dabei entsprechen die Ecken A_2 und A_2' den Punkten $z = e^{\lambda_1 i}$ und $z = e^{-\lambda_1 i}$ des Kreises $|z| = 1$. Ebenso wie im Falle des Dreiecks folgt jetzt wieder

$$\left[\frac{d}{dt} t^2 \cdot p_D'(t)\right]_{t=0} = 0$$

oder

$$\chi_1 + 2\chi_2 \cos\lambda_1 - \chi_3 = 0. \qquad \text{(VI)}$$

Dies ist bereits die Behauptung.

Satz VI gilt natürlich auch dann, wenn A_1 oder A_3, als Ecke des im Endlichen liegenden Deltoids betrachtet, einspringend ist; χ_1 bzw. χ_3 ist dann negativ. Insbesondere erhalten wir für $\chi_2 = \pi$ und $\chi_1 = -\chi_3$ den folgenden Spezialfall von Satz VI:

Satz VIa

Die Funktion $\zeta = p_\varphi(z)$ möge die längs S aufgeschlitzte Ebene so auf den Kreis $|z| < 1$ abbilden, daß der Punkt $\zeta = \infty$ dem Punkt $z = 0$ entspricht; S möge sich aus zwei gleich langen, geraden Strecken zusammensetzen, welche den Winkel φ bilden. Dann gilt für die Bildlänge λ_φ desjenigen Ufers von S, auf welchem φ gemessen ist:

$$\cos\frac{\lambda_\varphi}{2} = 1 - \frac{\varphi}{\pi}.$$

Die Sätze V, VI und VI a sind auch von Bedeutung für das allgemeine Problem der Abschätzung der Bildlänge von Randelementen. Satz V gibt uns die Möglichkeit, statt dem Kreisbogenzweieck G_1 von Satz I ein Kreisbogendreieck als Vergleichsgebiet einzuführen, wodurch die Abschätzung in vielen Fällen verbessert wird. Wir können dann in Analogie zu Satz I folgendes aussagen:

Satz VII

Das Gebiet G möge als Teil einer unbegrenzten Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$ aufgefaßt werden. Die geometrische Konfiguration von $\mathfrak{F}$, G, R und ζ_0 möge so beschaffen sein, daß sich auf $\mathfrak{F}$ drei Kreisbogen (oder gerade Strecken) k_1', k_2', k_3' konstruieren lassen, welche den folgenden Bedingungen genügen:

1. Die Kreisbogen bilden ein schlichtes Kreisbogendreieck G_1', das ζ_0 im Innern enthält und von den zwei Ecken mit ζ_1 und ζ_2 zusammenfallen;
2. die drei Kreise, denen die Kreisbogen angehören, sollen sich in ζ_0 schneiden;
3. k_1' und k_2' sollen keinen inneren Punkt von G enthalten;
4. k_3' soll so gewählt werden, daß R keinen inneren Punkt von G_1' enthält.

Die Winkel zwischen k_1' und k_3' bzw. k_2' und k_3' mögen mit σ_1' und σ_2' bezeichnet werden. Dann gilt für die durch $z = g(\zeta)$ vermittelte Abbildung:

$$\alpha \leqq \arccos\left(1 - 2\pi \frac{\sigma_1' + \sigma_2' - \pi}{\sigma_1' \cdot \sigma_2'}\right) < \pi.$$

Das Gleichheitszeichen kann nur gelten, wenn $G = G_1'$ und $R = k_3'$ ist.

Beweis: Daß für G $= G_1'$ das Gleichheitszeichen gilt, folgt einfach daraus, daß G_1' durch eine lineare Transformation, welche den Punkt ζ_0 ins Unendliche überführt, in das Äußere eines geradlinigen Dreiecks transformiert wird. Im übrigen verläuft der Beweis von Satz VII ganz analog zum Beweis von Satz I.

Statt dem Kreisbogendreieck G_1' kann man auf Grund von Satz VI auch ein symmetrisches Kreisbogenviereck als Vergleichsgebiet einführen. Wir brauchen darauf nicht näher einzugehen. Auch Satz VI a läßt sich mit Erfolg auf allgemeinere Probleme anwenden, insbesondere auf die konforme Abbildung des Äußeren $\mathfrak{P}$ eines beliebigen Polygons. Man kann nämlich auf Grund von Satz VI a folgendes aussagen:

Satz VIII

Bilden die aufeinanderfolgenden Polygonseiten l_1 und $l_2 \geqq l_1$ den (innerhalb $\mathfrak{P}$ gemessenen) Winkel $\varphi < 2\pi$, so gilt für die Bildlänge λ_1 von l_1 bei der durch $\zeta = p(z)$ vermittelten Abbildung

$$\lambda_1 \leqq \arccos\left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right) < \pi.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn $\mathfrak{P}$ die gemäß Satz VI a aufgeschlitzte Ebene ist.

Beweis: Wir betrachten eine Funktion $\zeta = p_\varphi(z)$, welche so beschaffen ist, daß S sich mit l_1 und einem Teil von l_2 deckt; die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit $z = \bar{p}_\varphi(\zeta)$. Dann erfüllt die Funktion $\bar{p}_\varphi(p(z))$ die Voraussetzungen des Satzes von Löwner, und zwar führt sie den Bogen λ_1 in einen Bogen der Länge

$\arccos\left(1-\frac{\varphi}{\pi}\right) < \pi$ über. Daraus folgt die Behauptung. — Aus Satz VIII folgt insbesondere $\lim\limits_{\varphi \to 0} \lambda_1 = 0$.

Es erhebt sich nun die Frage, ob nicht auch in allgemeineren Fällen die Bildlängen der Polygonseiten bei konformer Abbildung des Äußeren eines Polygons auf den Einheitskreis sich explizit durch geometrische Größen ausdrücken lassen. Dies ist allem Anschein nach nicht der Fall. Wohl läßt sich auch für beliebiges $\mathfrak{P}$ eine zu (IV) und (VI) analoge Gleichung angeben, die jedoch, soweit ich sehe, in keinem Fall mehr zu einer expliziten Darstellung der λ_ν führt. In einigen Fällen lassen sich noch numerische Methoden zur Bestimmung der Konstanten der Schwarz-Christoffelschen Formel angeben. Die Rechnungen sind jedoch sehr langwierig und umständlich.

Dagegen lassen sich statt dem Äußeren von Polygonen mit Vorteil auch andere Gebiete als Vergleichsgebiete zur Abschätzung der Bildlänge von Randelementen heranziehen. Beispiele hierfür finden sich in meiner demnächst erscheinenden Dissertation („Über beschränkte Funktionen, deren Wertevorrat gewisse Lücken aufweist"), in welcher die Aussage des Satzes von Löwner für spezielle Funktionenklassen verschärft wird.