Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1937. Heft I

Januar-April-Sitzung

München 1937
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Zur Axiomatik der reellen ebenen projektiven Geometrie:

Die Unabhängigkeit des Vertauschungsaxioms V_2 von den Verknüpfungsaxiomen.

Von Max Steck, München.

Vorgelegt von R. Baldus in der Sitzung vom 9. Januar 1937.

§ 1. Fragestellung und Voraussetzungen.

1. In meiner Dissertation[1] habe ich gezeigt, daß zur lückenlosen Begründung der tragenden Aussagen der reellen, *ebenen*, projektiven Geometrie neben den reinen ebenen Verknüpfungsaxiomen I. 1, I. 2, I. 3 (etwa in der *Hilbert*schen Fassung)[2] und I. 9* (in der *Liebmann*schen Fassung, s. Anm. 3 S. 4) ein, eine geometrische Inzidenzforderung in Evidenz setzendes sog. Vertauschungsaxiom eingeführt werden kann, das zusammen mit den Verknüpfungsaxiomen die Hauptsätze dieser Disziplin begründet. Dieses Axiom wurde dann in der unter meiner Mitarbeit entstandenen „Synthetischen Geometrie"[3] von *H. Liebmann* in zwei Axiome $\mathbf{V}_1$ und $\mathbf{V}_2$ (das „kleine" bzw. „große" Vertauschungsaxiom) aufgespalten. Beide Axiome wurden in diesem Werke auf ihre Tragweite als Begründungsträger der Hauptsätze der projektiven Geometrie untersucht.

In zwei weiteren Arbeiten[4] konnte ich zeigen, daß jedes der beiden Axiome einen sog. Vertauschungskalkül ermöglicht, wonach mit den unter $\mathbf{V}_1$ fallenden sechs „kleinen" Vertauschungen $\Phi_1^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, 6$) und mit den neun unter $\mathbf{V}_2$ fallenden „großen" Vertauschungen $\Psi_1^{(\mu)}$ ($\mu = 1, 2, \ldots, 9$) nach bestimm-

[1] Das Zeuthensche Postulat und das Prinzip der Vertauschung zur Begründung der projektiven Geometrie, Heidelberg 1932, insb. § 12 S. 46.

[2] Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl., Leipzig-Berlin 1930, S. 3.

[3] Leipzig-Berlin 1934, S. 9 und 14.

[4] Zur Struktur der Vertauschungsaxiome V_1 und V_2 (Vertauschungskalkül), Sitz.Ber. d. Heidelb. Akad. d. Wiss. (Math.-nat. Kl.) 1934, 16. Abh., und: Der Ψ_1-Vertauschungs-Kalkül, ebd. 1935, 5. Abh.

ten (dort bewiesenen) Regeln formallogisch und geometrisch widerspruchsfrei operiert und „gerechnet" werden kann. Dabei können die bezüglichen Aussagen der projektiven Geometrie systematisch als zwischen den Vertauschungen bestehende Gleichheitsbeziehungen abgeleitet werden. In diesen beiden Arbeiten wurde (implizit) ferner auch gezeigt: *Alle Pascalanordnungen von 6 Punkten der Ebene verhalten sich in der (reellen) projektiven Geometrie, die Hilbertschen Verknüpfungsaxiome I. 1 und I. 2 vorausgesetzt, in bezug auf Vertauschungen gleich.*

Endlich konnte ich mit Hilfe der ebenen Verknüpfungsaxiome zeigen,[1] daß das kleine Vertauschungsaxiom V_1 dem *Desargues*schen-, das große Vertauschungsaxiom V_2 dem *Pappus-Pascal*schen Satze, als den beiden Grundpfeilern bei der Begründung der Aussagen der projektiven Geometrie, äquivalent ist. Darüber hinaus ergab sich aus diesen Äquivalenzbeweisen das sog. *Hessenberg*sche Ergebnis, d. h. die Ableitung des *Desargues*schen Satzes aus dem *Pappus-Pascal*schen Satze (*Beweisbarkeit von* V_1 *aus* V_2). Infolgedessen sprechen wir jetzt von der „kleinen Vertauschungs*aussage* V_1", dagegen vom Vertauschungs*axiom* V_2. Damit ist der *Hilbert*sche Satz **61** (s. Anm. 2 S. 1) S. 111, auf anderem Wege und wesentlich kürzer, *rein geometrisch* neu bewiesen. Im Anschluß hieran gelang es, das axiomatisch wichtige Ergebnis zu gewinnen, daß jede Gleichheitsbeziehung zwischen Vertauschungen eine gruppentheoretische Transpositionsgleichung darstellt. Damit sind die auf V_1 und V_2 beruhenden, d. h. mit V_1 und V_2 axiomatisch begründbaren Aussagen der projektiven Geometrie als *Aussagen aus der Theorie der Permutationsgruppen* erkannt. Man kann also mit den beiden Vertauschungstatsachen und mit den unter sie fallenden Vertauschungen „geometrische Axiomatik als Gruppentheorie" treiben und so diesen Teil der geometrisch-axiomatischen Forschungsdisziplin als eine bestimmte Anwendung der Theorie der Permutationsgruppen auffassen; umgekehrt läßt sich diese letztere Theorie durch V_1 und V_2 auch mit geometrischem Sinngehalt erfüllen und direkt geometrisch deuten.

---

[1] Die Abhängigkeit der Vertauschungsaxiome und das Hessenbergsche Ergebnis (Geometrische Axiomatik als Gruppentheorie), Deutsche Math. **1** (1936), S. 165–74.

Damit ist die Tragweite von V_1 und V_2 in der Axiomatik der (reellen) projektiven Geometrie herausgestellt.

2. Allein es fehlte bisher ein (rein geometrischer) Beweis für die Unabhängigkeit von V_1 und V_2 von den ebenen Verknüpfungsaxiomen, d. h. es fehlte der *Nachweis der Nichtbeweisbarkeit der Vertauschungstatsachen V_1 und V_2 aus den ebenen Verknüpfungsaxiomen I. 1–I. 3.*, I. 9*. Diesen Nachweis wollen wir in dieser Arbeit erbringen.

Wegen der obengenannten, für $\mathbf{V}_1$ und $\mathbf{V}_2$ nachgewiesenen Äquivalenz mit dem *Desargues*schen-, bzw. *Pappus-Pascal*schen Satze, sind dann damit gleichzeitig Teile der fundamentalen *Hilbert*schen *Sätze* **54** und **58** über die Beweisbarkeit des *Desargues*schen-, bzw. *Pappus-Pascal*schen Satzes (s. Anm. 2 S. 1), S. 85 und 105, neu bewiesen. Und zwar ist unsere Beweisführung eine *rein geometrische*, die ohne die Einführung Nichtdesarguesscher-, bzw. Nichtpappus-pascalscher Zahlensysteme auskommt.

Es ist die für V_1 und V_2 zu erweisende Unabhängigkeit der analoge, sogar in den Beweismethoden parallellaufende Vorgang und Beweis, wie er von *R. Baldus* für das *Fano*-Axiom F_1 (in der *Baldus*schen Bezeichnungsweise: Axiom I. 9) in einer axiomatisch wichtigen Arbeit[1] erbracht worden ist. Aus diesem Unabhängigkeitsbeweis folgt dann für das *Liebmannsche Axiomensystem* (s. o.) der reellen, ebenen, projektiven Geometrie die Notwendigkeit der Einführung der Vertauschungsaussage $\mathbf{V}_2$ als Axiom. Der Unabhängigkeitsbeweis seinerseits gelingt — analog wie beim *Fano*schen Axiom $\mathbf{F}_1$ — durch die existentielle Ableitung und Aufstellung eines in sich formallogisch widerspruchsfreien finiten ,,Punkt-Geraden"-Systems von der Form eines *Veblen*systems,[2] das den ebenen Verknüpfungsaxiomen genügt, weil es ausschließlich mit deren Hilfe gewonnen ist, wobei die Elemente des Systems exi-

[1] Ein Axiomensystem der komplexen projektiven Geometrie, Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. (Math.-nat. Abt.) 1932, § 4, insb. S. 171. In dieser Arbeit wurde erstmalig ein Unabhängigkeitsbeweis *rein geometrisch* geführt.

[2] Diese *Veblen*systeme, ihre Einordnung in einen allgemeinen geometrischen Zusammenhang, ihre Theorie und ihre Aufstellung habe ich in der Arbeit: Über finitie Geometrien und ihren Zusammenhang mit der Axiomatik der projektiven Geometrie, Deutsche Math. **1** (1936), S. 578–88, ausführlich behandelt.

stentiell durch ein Axiom gesichert sind (s. unter **3**). In der endlichen Geometrie dieses, durch eine Inzidenztafel definierten und realisierten *Veblen*systems (oder dieser ebenen Konfiguration) müssen, um die Unabhängigkeit von V_1 und V_2 nachzuweisen, die beiden folgenden Forderungen erfüllt sein:

1. Innerhalb der endlichen Geometrie des aufzufindenden *Veblen*systems muß es ein *allgemeines Pascal*sches Sechseck geben, d. h. sechs Punkte, von denen keine drei kollinear liegen, die in *Pascal*scher Inzidenzanordnung (Π_0) mit einer wohldefinierten Geraden p_0 als *Pascal*scher Gerade sind.
2. Für diese *Pascal*anordnung $(\overline{\Pi}_0)$ mit $\bar{p}_0$ ist innerhalb der Geometrie des aufzufindenden *Veblen*systems weder die Aussage von V_1 noch diejenige von V_2 restlos beweisbar.[1]

Kann ein *Veblen*system angegeben werden, das diesen beiden Forderungen Genüge leistet, so folgt daraus, daß die Aussagen von $\mathbf{V}_1$ und $\mathbf{V}_2$, weil innerhalb dieses Systems nicht beweisbar, im Rahmen des *Liebmann*schen Axiomensystems als axiomatische Aussagen anzusehen sind, d. h. es folgt – weil die genannte Beweisbarkeit von $\mathbf{V}_1$ aus $\mathbf{V}_2$ mit I. 1.–I. 3, I. 9* gilt – die Notwendigkeit der Einführung von $\mathbf{V}_2$ als Axiom der reellen, ebenen, projektiven Geometrie.

3. Der Existenznachweis eines den obigen Forderungen 1 und 2 genügenden *Veblen*systems setzt, wie ich in der unter Anm. 2 S. 3 genannten Arbeit gezeigt habe (s. insb. deren § 5, wo ich die Theorie der *Veblen*systeme und ihrer Geometrien ausführlich entwickelt habe),[2] die folgenden Axiome voraus:

E: *Es gibt endlich viele (als verschieden unterscheidbare), zwei verschiedenen Dingsystemen angehörende Elemente, „Punkte" und „Geraden".*

---

[1] Nicht „restlos" bedeutet hier: nicht *alle* unter V_1 bzw. V_2 fallenden Vertauschungen sind beweisbar (vgl. §§ 3, 4).

[2] Vgl. auch meine beiden weiteren diesbezüglichen Arbeiten: Eine vollständige endliche Geometrie des vollständigen Vierecks, Deutsche Math. **1** (1936), S. 588–92, und: Eine vollständige endliche minimale *Pappus-Pascal*sche Geometrie, ebd. **2** (1937), (erscheint demnächst), sowie meine Arbeit: Die Fundamentalsätze in der endlichen projektiven Geometrie **S** (21/2/5), Monatsh. für Math. und Physik, Jahrg. 1937 (erscheint im Aprilheft dieser Zeitschrift).

A. 1*: *Durch zwei (als verschieden unterscheidbare) „Punkte" ist stets genau eine „Gerade" bestimmt.*

A. 2*: *Durch zwei (als verschieden unterscheidbare) „Geraden" ist stets genau ein „Punkt" bestimmt.*

Aus ihnen folgen die dort (im § 1) abgeleiteten Sätze **S. 1** und **S. 2** über die Struktur der die *Veblen*systeme definierenden Inzidenztafeln, deren Zeilen den bezifferten „Punkten" 1, 2, . . ., n, deren Kolonnen den bezifferten „Geraden" (1), (2), . . ., (n) entsprechen, wobei stets an den und nur an den Stellen der Tafel Inzidenzzeichen $\times$ stehen, an denen sich Zeile und Kolonne zweier inzidenter Elemente treffen, wenn das in den Axiomen vorkommende Wort „bestimmt" hier die Inzidenz bezeichnet.

4. Zur eindeutigen Fixierung der Ideen der vorliegenden Arbeit seien die Aussagen von V_1 und V_2 in der folgenden präzisierten, durch die Untersuchungen meiner beiden in der Anm. 4 (S. 1) genannten Arbeiten implizierten Form formuliert.

Es seien 1, 2, 3, 4, 5, 6 Punkte der Ebene, von denen keine drei in einer Geraden, d. h. *kollinear* liegen. Diese Punkte seien in *Pascal*scher Inzidenzanordnung (Π_0), d. h.: werden sie als Eckpunkte eines (geschlossenen) Sechsecks betrachtet, so hat dasselbe die Eigenschaft, daß sich die drei Paare seiner Gegenseiten (1, 2), (4, 5); (2, 3), (5, 6); (3, 4) (6, 1) in Punkten einer Geraden p_0 treffen.

Nach dieser definitorischen Festlegung von (Π_0) lauten die Aussagen von V_1 und V_2 in präzisierter Fassung:

V_1: *Bilden die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 in dieser Reihenfolge eine Pascalsche Inzidenzanordnung (Π_0) mit der Pascalgeraden p_0, so bilden sie auch dann noch je eine — untereinander und von (Π_0) mit p_0 verschiedene — Pascalsche Inzidenzanordnung (π_ν) mit den Pascalgeraden p_ν (ν = I, II, III),*

$$\left\{\begin{array}{l}\text{also mit } (\pi_\nu) \neq (\pi_{\bar\nu}) \text{ und } p_\nu \neq p_{\bar\nu} \text{ für } \nu \neq \bar\nu;\ (\pi_\nu) \neq (\Pi_0)\\ \text{und } p_\nu \neq p_0 \text{ für } \nu, \bar\nu = \text{I, II, III,}\end{array}\right\}$$

wenn man gleichartige, d. h. entweder zwei ungerade oder zwei gerade bezifferte Punkte miteinander vertauscht.

Nach meiner ersten unter der Anm. 4 (S. 1) genannten Arbeit gibt es auf Grund von V_1 die folgenden sechs „kleinen" Vertauschungen $\Phi_1^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, 6$):

$$\Phi_1^{(1)} = 1 \longleftrightarrow 3,\quad \Phi_1^{(2)} = 3 \longleftrightarrow 5,\quad \Phi_1^{(3)} = 1 \longleftrightarrow 5,$$
$$\Phi_1^{(4)} = 4 \longleftrightarrow 6,\quad \Phi_1^{(5)} = 2 \longleftrightarrow 6,\quad \Phi_1^{(6)} = 2 \longleftrightarrow 4,$$

von denen je zwei, einzeln auf (Π_0) ausgeübt, auf dieselbe, von (Π_0) mit p_0 verschiedene *Pascal*sche Inzidenzanordnung (π_ν) mit p_ν ($\nu = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$) führen. Und zwar folgt durch Ausübung von

$\Phi_1^{(1)}$ oder $\Phi_1^{(4)}$ auf (Π_0) mit p_0 die *Pascal*anordnung (π_{I}) mit p_{I},
$\Phi_1^{(2)}$ oder $\Phi_1^{(5)}$ auf (Π_0) mit p_0 die *Pascal*anordnung (π_{II}) mit p_{II},
$\Phi_1^{(3)}$ oder $\Phi_1^{(6)}$ auf (Π_0) mit p_0 die *Pascal*anordnung (π_{III}) mit p_{III},

wobei noch gilt:

$$(\pi_{\mathrm{I}}) \neq (\pi_{\mathrm{II}}),\quad (\pi_{\mathrm{II}}) \neq (\pi_{\mathrm{III}}),\quad (\pi_{\mathrm{III}}) \neq (\pi_{\mathrm{I}})$$
$$p_{\mathrm{I}} \neq p_{\mathrm{II}},\quad p_{\mathrm{II}} \neq p_{\mathrm{III}},\quad (p_{\mathrm{III}}) \neq (p_{\mathrm{I}}).$$

Entsprechend lautet die Aussage von V_2 in präzisierter Fassung:

V_2: *Bilden die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 in dieser Reihenfolge eine Pascalsche Inzidenzanordnung (Π_0) mit der Pascalgeraden p_0, so bilden sie auch dann noch je eine – untereinander, von den (π_ν) mit p_ν ($\nu = I, II, III$) und von (Π_0) mit p_0 verschiedene — Pascalsche Inzidenzanordnung (Π_μ) mit den Pascalgeraden p_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, 9$),*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{also mit } (\Pi_\mu) \neq (\Pi_{\bar\mu}) \text{ und } p_\mu \neq p_{\bar\mu} \text{ für } \mu \neq \bar\mu; \\ (\Pi_\mu) \neq (\pi_\nu) \text{ und } p_\mu \neq p_\nu\ (\nu = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}); (\Pi_\mu) \neq \\ (\Pi_0) \text{ und } p_\mu \neq p_0 \text{ für } \mu, \bar\mu = 1, 2, \ldots, 9, \end{array} \right\}$$

wenn man ungleichartige, d. h. je einen ungerade mit einem gerade bezifferten Punkt (oder umgekehrt) *vertauscht.*

Nach meiner zweiten unter der Anm. 4 (S. 1) genannten Arbeit gibt es auf Grund von V_2 die folgenden neun „großen" Vertauschungen $\Psi_1^{(\mu)}$ ($\mu = 1, 2, \ldots, 9$):

$$\Psi_1^{(1)} = 1 \longleftrightarrow 2,\quad \Psi_1^{(2)} = 2 \longleftrightarrow 3,\quad \Psi_1^{(3)} = 3 \longleftrightarrow 4;$$
$$\Psi_1^{(4)} = 3 \longleftrightarrow 6,\quad \Psi_1^{(5)} = 1 \longleftrightarrow 4,\quad \Psi_1^{(6)} = 2 \longleftrightarrow 5;$$
$$\Psi_1^{(7)} = 4 \longleftrightarrow 5,\quad \Psi_1^{(8)} = 5 \longleftrightarrow 6,\quad \Psi_1^{(9)} = 6 \longleftrightarrow 1,$$

von denen jede einzelne, ausgeübt auf (Π_0), (Π_0) mit p_0 in eine davon verschiedene *Pascal*sche Inzidenzanordnung (Π_μ) mit p_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, 9$) überführt, wobei die (Π_μ) und p_μ auch untereinander und von den (π_ν) bzw. p_ν ($\nu =$ I, II, III) verschieden sind.

Der Nachweis der Unabhängigkeit der Aussagen V_1 und V_2 von den ebenen Verknüpfungsaxiomen, d. h. die Notwendigkeit der Einführung von V_2 als Axiom der reellen, ebenen, projektiven Geometrie läuft dann darauf hinaus, zu zeigen, daß es ein *Veblen*system oder eine endliche Geometrie gibt, in der die aus V_1 und V_2 folgende (oben angebene) Verschiedenheit der durch Ausübung der kleinen und großen Vertauschungen aus (Π_0) mit p_0 hervorgehenden *Pascal*schen Inzidenzanordnungen (π_ν) mit p_ν ($\nu =$ I, II, III) bzw. (Π_μ) mit p_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, 9$) nicht durchgehend besteht oder erfüllt ist, was mit dem Nachweis der obigen Forderungen 1 und 2 gleichbedeutend ist.

5. Dieser Nachweis soll jetzt schrittweise geführt werden; und zwar zeigen wir im § 2 die Existenz des Veblensystems S (31/2/6) (oder der Konfiguration (31_6)), dessen Inzidenztafel wir in der durch den obengenannten Satz **S. 2** verlangten involutorisch reziproken Form (Symmetrie der Inzidenzzeichen $\times$ zu einer Diagonale der Tafel) angeben. Diese Tafel sichert dann in formallogisch einwandfreier und widerspruchsloser Weise die *Existenz einer endlichen Geometrie* aus 31 „Punkten" und ebensovielen „Geraden" mit einer gegenseitigen Inzidenzbindung, die genau gleich 6 ist. (D. h.: Das *Veblen*system S (31/2/6) besteht aus 31 „Punkten" und 31 „Geraden"; „Punkt" und „Gerade" sind durch **A. 1*** und **A. 2*** festgelegt; auf jeder „Geraden" liegen 6 „Punkte" und durch jeden „Punkt" gehen 6 „Geraden".)

Der § 3 weist die Existenz einer allgemeinen *Pascal*schen Inzidenzanordnung (Π_0) mit der *Pascal*schen Geraden (25) innerhalb **S** (31/2/6) nach, womit die obige Forderung 1 in der endlichen Geometrie des *Veblen*systems S (31/2/6) erfüllt ist.

Im § 4 zeigen wir, daß für die in S (31/2/6) eben aufgewiesene (Π_0) mit (25) die Aussage von V_1 nicht beweisbar ist, womit der

1. Teil der obigen Forderung 2 als in $S\,(31/2/6)$ erfüllt nachgewiesen ist.

Analog liefern wir im § 5 den Nachweis des 2. Teils der obigen Forderung 2, der darin besteht, daß gezeigt wird, daß innerhalb $S\,(31/2/6)$ und für die in dieser endlichen Geometrie existierende (Π_0) mit der Pascalgeraden (25) (s. § 3) auch die Aussage von V_2 nicht restlos beweisbar ist.

Damit ist dann der Beweis der Unabhängigkeit von V_1 und V_2 von den ebenen Verknüpfungsaxiomen und damit auch die Notwendigkeit der Einführung von V_2 als Axiom der reellen, ebenen, projektiven Geometrie vollständig erbracht. Die Beweismethode ist eine rein geometrische und benützt an axiomatischen Bausteinen nur die obengenannten Axiome E, **A. 1*** und **A. 2***, kommt also *ohne alle Hilfsmittel der Analysis* aus, die man sonst — außer in der unter Anm. 1 (S. 3) genannten Arbeit von *R. Baldus* — für die Lösung derartiger axiomatisch subtiler Fragestellungen heranzuziehen pflegt, wenn man diese Problematik beim Aufbau eines Axiomensystems nicht sogar stillschweigend übergeht.

§ 2. Das Veblensystem S (31/2/6).

Die folgende Inzidenztafel, deren Zeilen den bezifferten „Punkten" 1, 2, . . ., 31, deren Kolonnen den bezifferten „Geraden" (1), (2), . . ., (31) entsprechen, definiert und repräsentiert eine endliche Geometrie aus 31 „Punkten" und 31 „Geraden", in der durch jeden „Punkt" genau 6 „Geraden" gehen, und in der jede „Gerade" mit genau 6 „Punkten" belegt ist. Die Tafel ist mittels der Axiome E, **A. 1*** und **A. 2*** gewonnen und genügt den Aussagen der Sätze **S. 1** und **S. 2**. Ihre Aufstellung gelang unter Anwendung des aus E, **A. 1*** und **A. 2*** folgenden „*Spiegelungsprinzips*", das ich in der unter Anm. 2 (S. 3) genannten Arbeit im § 6 aufgestellt und als systematische Methode für die Gewinnung der Inzidenztafeln involutorisch reziproker finiter Systeme oder Konfigurationen angegeben und begründet, sowie an zwei Beispielen erprobt habe. Daß **S** (31/2/6) außerdem eine vollständige *endliche minimale Desarguessche Geometrie* enthält, werde ich in meiner Habilitationsschrift beweisen.

Tafel **S** (31/2/6).

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)	(27)	(28)	(29)	(30)	(31)
1										X		X	X														X		X		X
2	X		X										X								X		X		X						
3								X			X						X								X			X			X
4	X					X					X							X						X					X		
5			X				X							X						X				X							X
6	X			X			X			X							X					X									
7							X	X							X						X								X	X	
8	X								X						X					X							X	X			
9			X			X			X			X					X													X	
10	X				X			X				X		X												X					
11					X					X								X		X					X					X	
12		X			X												X				X			X			X				
13					X		X		X		X		X			X															
14						X				X				X		X					X							X			
15																X	X			X			X			X			X		
16													X	X	X		X	X	X												
17				X								X			X	X								X	X						
18			X					X								X		X				X					X				
19	X	X														X			X											X	X
20					X	X									X							X	X								X
21			X	X	X														X									X	X		
22				X					X									X			X					X					X
23								X	X	X									X				X	X							
24		X							X					X								X			X				X		
25						X	X												X						X	X	X				
26		X					X					X						X					X					X			
27											X	X							X	X	X	X									
28		X	X							X	X				X											X					
29				X							X			X									X				X			X	
30		X		X		X		X					X							X											
31													X									X		X		X		X		X	

Diese Tafel ist in bezug auf die gestrichelt eingezeichnete Diagonale symmetrisch. (*Involutorische Reziprozität.*)

Nennt man die den 31 Zeilen entsprechenden „Punkte" Punkte im gewöhnlichen Sinne und die Punkte einer jeden der 31 Kolonnen der Tafel — in formallogisch einwandfreier Weise — „k o l l i n e a r", so beweisen wir in den folgenden §§ 3–5, daß dieses *Veblen*system die im § 1 unter **2** genannten Forderungen 1 und 2 erfüllt und daher das Problem dieser Arbeit löst.

§ 3. Die Existenz einer allgemeinen Pascalanordnung ($\overline{\Pi}_0$) in S (31/2/6).[1]

Wir behaupten den folgenden Existenzsatz:

Satz N_1: Das Sechseck σ_0 der Punkte

$$\sigma_0 \equiv \{13,\ 14,\ 12,\ 9,\ 26,\ 29\}$$

ist innerhalb des Veblensystems S (31/2/6) ein allgemeines, d. h. keine drei seiner Eckpunkte liegen kollinear; *es besitzt ferner die Eigenschaft, daß seine Eckpunkte in der angegebenen Reihenfolge eine Pascalsche Inzidenzanordnung ($\overline{\Pi}_0$) mit der Pascalschen Geraden (25) bilden.*

Beweis. a) Um den ersten Teil von N_1 über die Allgemeinheit von σ_0 zu beweisen, haben wir zu zeigen, daß keines der möglichen Tripel von Eckpunkten von σ_0 einer Kolonne der Tafel S (31/2/6) angehört. Die Anzahl dieser möglichen Tripel ist gleich der Anzahl der Kombinationen zur 3. Klasse (ohne Wiederholung) aus den sechs Elementen 13, 14, 12, 9, 26, 29. Diese Zahl ist bekanntlich

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = 20.$$

Die 20 möglichen Tripel sind die folgenden:

1.	13, 14, 12	{(21)}	11.	12, 26, 29	{(27)}
2.	14, 12, 9		12.	12, 29, 13	
3.	12, 9, 26	{(12)}	13.	9, 29, 13	{(9)}
4.	9, 26, 29		14.	9, 13, 14	
5.	26, 29, 13	{(11)}	15.	26, 13, 14	{(28)}
6.	29, 13, 14		16.	26, 14, 12	
7.	13, 12, 9	{(9)}	17.	29, 14, 12	{(27)}
8.	13, 9, 26		18.	29, 12, 9	
9.	14, 9, 26	{(28)}	19.	13, 26, 12	{(5)}
10.	14, 26, 29		20.	14, 9, 29	{(6)}.

[1] Die aus ($n^2 - n + 1$) „Punkten" und ebensovielen „Geraden" bestehenden *Veblen*systeme sind von der Art, daß durch je zwei, dem gleichen Elementsystem angehörende Elemente genau *ein* Element des anderen Element-

Man erkennt aus den in den geschweiften Klammern beigefügten Kolonnen der Tafel S (31/2/6), daß keines dieser Tripel ein und derselben Kolonne dieser Tafel angehört, womit der erste Teil des Satzes gezeigt ist.

b) Jetzt ist nachzuweisen, daß die Punkte von σ_0 in der oben angeschriebenen Reihenfolge innerhalb S (31/2/6) eine *Pascal*sche Inzidenzanordnung $(\overline{\Pi}_0)$ mit der *Pascal*geraden (25) bilden. In der Tat! Bringen wir die Gegenseitenpaare von σ_0 innerhalb S (31/2/6) zum Schnitt, so erhalten wir:

$$(\overline{\Pi}_0)\colon \begin{cases} (13,\ 14) \times (9,\ 26) = 17 & \{\text{Kolonnen } (16) \text{ und } (12)\} \\ (14,\ 12) \times (26,\ 29) = 2 & \{\text{Kolonnen } (21) \text{ und } (23)\} \\ (12,\ 9) \times (29,\ 13) = 3 & \{\text{Kolonnen } (17) \text{ und } (11)\}. \end{cases}$$

Da die Punkte 2, 3, 17 nach Tafel S (31/2/6) der Kolonne (25) angehören, liegen sie kollinear; mithin sind {13, 14, 12, 9, 26, 29} in dieser Reihenfolge in S (31/2/6) in *Pascal*anordnung $(\overline{\Pi}_0)$ mit (25) als *Pascal*scher Gerade. W. z. b. w.

§ 4. Die Nichtbeweisbarkeit von V_1 in S (31/2/6).

Den sechs unter V_1 fallenden kleinen Vertauschungen entsprechen an $(\overline{\Pi}_0)$ die folgenden:

$$\overline{\Phi}_1^{(1)} = 13 \longleftrightarrow 12, \quad \overline{\Phi}_1^{(2)} = 12 \longleftrightarrow 26, \quad \overline{\Phi}_1^{(3)} = 13 \longleftrightarrow 26;$$
$$\overline{\Phi}_1^{(4)} = 9 \longleftrightarrow 29, \quad \overline{\Phi}_1^{(5)} = 14 \longleftrightarrow 29, \quad \overline{\Phi}_1^{(6)} = 14 \longleftrightarrow 9.$$

Wir behaupten jetzt den folgenden

Satz N_2: *Übt man jede dieser sechs* $\Phi_1^{(\nu)}$ *innerhalb* S *(31/2/6) einzeln auf* $(\overline{\Pi}_0)$ *mit (25) aus, so ergibt sich nur eine einzige neue, von* $(\overline{\Pi}_0)$ *mit (25) verschiedene Pascalsche Inzidenzanordnung mit der Pascalschen Geraden (20); die Aussage von* V_1 *ist also innerhalb* S *(31/2/6) nur in*

---

systems bestimmt ist. Ferner trägt jede „Gerade" eine Belegung von *genau* n „Punkten" und durch jeden „Punkt" gehen *genau* n „Geraden" ($n = 2, 3, 4, \ldots$). Ich schreibe daher die *Veblen*systeme im Symbol $S(n^2 - n + 1 \,|\, 2 \,|\, n)$, das aus drei — durch Zäsuren unterschiedene — Termen (Elementterm | Axiomterm | Inzidenzterm) besteht. — $S(31 \,|\, 2 \,|\, 6)$ ist das für $n = 6$ eintretende *Veblen*system.

einem einzigen Vertauschungsfall, statt in dreien, mit den (ebenen) Verknüpfungsaxiomen beweisbar.

Beweis. Der Beweis zerfällt gemäß den sechs kleinen Vertauschungen $\overline{\Phi}_1^{(\nu)}$ in sechs Einzelschritte.

1. Die Ausübung von $\overline{\Phi}_1^{(1)} = 13 \longleftrightarrow 12$ auf $(\overline{\Pi}_0)$ mit (25) ergibt:

$$\begin{array}{ll} (12,\ 14) \times (\ 9,\ 26) = 27, & \{(21) \text{ und } (12)\} \\ (14,\ 13) \times (26,\ 29) = 15, & \{(16) \text{ und } (23)\} \\ (13,\ \ 9) \times (29,\ 12) = \ \ 8, & \{\ (9) \text{ und } (27)\} \end{array}$$

mit (8, 15, 27) = (20) kollinear. Diese *Pascal*anordnung ist ersichtlich von $(\overline{\Pi}_0)$ verschieden.

2. Übt man jetzt $\overline{\Phi}_1^{(2)} = 12 \longleftrightarrow 26$ auf $(\overline{\Pi}_0)$ mit (25) aus, so kommt:

$$\begin{array}{ll} (13,\ 14) \times (\ 9,\ 12) = 15, & \{(16) \text{ und } (17)\} \\ (14,\ 26) \times (12,\ 29) = \ \ 8, & \{(28) \text{ und } (27)\} \\ (26,\ \ 9) \times (29,\ 13) = 27, & \{(12) \text{ und } (11)\} \end{array}$$

mit (8, 15, 27) = (20) kollinear. D. h. $\overline{\Phi}_1^{(2)}$ führt in $S\,(31/2/6)$ auf dieselbe Pascalgerade (20), wie $\overline{\Phi}_1^{(1)}$, was der Aussage von V_1 widerspricht.

Mithin ist V_1 in $S\,(31/2/6)$ für diesen kleinen Vertauschungsfall $\overline{\Phi}_1^{(2)}$ nicht erfüllt, und wir könnten es — da es sich bei der ganzen Fragestellung nur um die Angabe sog. „*Ausfallbeispiele*“ handelt — mit diesem einzigen aufgewiesenen Ausnahmefall bereits bewenden lassen. Um aber die in N_2 ausgesagte generelle Nichtbeweisbarkeit von V_1 in $S\,(31/2/6)$ zu zeigen, müssen wir auch noch die analogen Untersuchungen für die übrigen $\overline{\Phi}_1^{(\nu)}$ explizit durchführen.

3. $\overline{\Phi}_1^{(3)} = 13 \longleftrightarrow 26$, ausgeübt auf $(\overline{\Pi}_0)$ mit (25), liefert wieder dieselbe *Pascal*gerade (20), was V_1 widerspricht:

$$\begin{array}{ll} (26,\ 14) \times (\ 9,\ 13) = \ \ 8 & \{(28) \text{ und } \ (9)\} \\ (14,\ 12) \times (13,\ 29) = 27 & \{(21) \text{ und } (11)\} \\ (12,\ \ 9) \times (29,\ 26) = 15 & \{(17) \text{ und } (23)\} \end{array}$$

mit (8, 15, 27) = (20) kollinear.

4. $\overline{\Phi}_1^{(4)} = 9 \longleftrightarrow 29$ ergibt auf $(\overline{\Pi}_0)$ mit (25) ausgeübt:

$(13,\ 14) \times (29,\ 26) = 15$	$\{(16)$ und $(23)\}$
$(14,\ 12) \times (26,\ 9) = 27$	$\{(21)$ und $(12)\}$
$(12,\ 29) \times (9,\ 13) = 8$	$\{(27)$ und $(9)\}$

mit $(8,\ 15,\ 27) = (20)$ kollinear und in Übereinstimmung mit dem Ergebnis unter 1.

5. Dasselbe Ergebnis, das mit dem unter 2 gewonnenen übereinstimmt, erhält man auch bei Ausübung von $\overline{\Phi}_1^{(5)} = 14 \longleftrightarrow 29$ auf $(\overline{\Pi}_0)$ mit (25):

$(13,\ 29) \times (9,\ 26) = 27$	$\{(11)$ und $(12)\}$
$(29,\ 12) \times (26,\ 14) = 8$	$\{(27)$ und $(28)\}$
$(12,\ 9) \times (14,\ 13) = 15$	$\{(17)$ und $(16)\}$

mit $(8,\ 15,\ 27) = (20)$ kollinear.

6. Endlich liefert auch die Ausübung von $\overline{\Phi}_1^{(6)} = 14 \longleftrightarrow 9$ auf $(\overline{\Pi}_0)$ mit (25) wieder dasselbe, V_1 widersprechende Ergebnis:

$(13,\ 9) \times (14,\ 26) = 8$	$\{(9)$ und $(28)\}$
$(9,\ 12) \times (26,\ 29) = 15$	$\{(17)$ und $(23)\}$
$(12,\ 14) \times (29,\ 13) = 27$	$\{(21)$ und $(11)\}$

mit derselben Kollinearlage $(8,\ 15,\ 27) = (20)$. W. z. b. w.

Diese Einzelnachweise haben also — wenn wir zusammenfassen — ergeben, daß die unter V_1 fallenden kleinen Vertauschungen $\overline{\Phi}_1^{(\nu)}$ $(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6)$ innerhalb der endlichen Geometrie des *Veblen*systems $S\,(31/2/6)$ nur zu einer einzigen neuen, von $(\overline{\Pi}_0)$, der Ausgangsanordnung, verschiedenen *Pascal*schen Inzidenzanordnung führen, entgegen der Aussage von V_1, die drei solcher *Pascal*scher Inzidenzanordnungen verlangt. Damit ist gezeigt, daß V_1 mit den ebenen Verknüpfungsaxiomen nicht beweisbar ist.

§ 5. Die Nichtbeweisbarkeit von V_2 in $S\,(31/2/6)$.

Den neun unter V_2 fallenden großen Vertauschungen entsprechen an $(\overline{\Pi}_0)$ die folgenden:

$$\bar{\Psi}_1^{(1)} = 13 \longleftrightarrow 14 \quad \bar{\Psi}_1^{(2)} = 14 \longleftrightarrow 12 \quad \bar{\Psi}_1^{(3)} = 12 \longleftrightarrow 9;$$
$$\bar{\Psi}_1^{(4)} = 12 \longleftrightarrow 29 \quad \bar{\Psi}_1^{(5)} = 13 \longleftrightarrow 9 \quad \bar{\Psi}_1^{(6)} = 14 \longleftrightarrow 26;$$
$$\bar{\Psi}_1^{(7)} = 9 \longleftrightarrow 26 \quad \bar{\Psi}_1^{(8)} = 26 \longleftrightarrow 29 \quad \bar{\Psi}_1^{(9)} = 29 \longleftrightarrow 13.$$

Übt man nun diese großen Vertauschungen innerhalb $S(31/2/6)$ einzeln auf $(\bar{\Pi}_0)$ mit (25) aus, so müßte, wenn die Aussage von V_2 in $S(31/2/6)$ beweisbar wäre, je eine von $(\bar{\Pi}_0)$ mit (25) verschiedene neue *Pascal*sche Inzidenzanordnung resultieren; diese neun durch große Vertauschung erhaltenen *Pascal*anordnungen und ihre *Pascal*geraden müßten nach V_2 ferner untereinander und von den durch kleine Vertauschung gewonnenen verschieden sein. Daß dies nicht der Fall ist, lehrt die Anwendung großer Vertauschung auf $(\bar{\Pi}_0)$ mit (25) in $S(31/2/6)$, was wir im folgenden Satz genau festlegen:

Satz N_3: *Übt man jede der neun* $\bar{\Psi}_1^{(\mu)}$ *innerhalb* $S(31/2/6)$ *einzeln auf* $(\bar{\Pi}_0)$ *mit (25) aus, so ergeben sich nur vier neue, untereinander und von* $(\bar{\Pi}_0)$ *mit (25) verschiedene Pascalsche Inzidenzanordnungen mit den Pascalschen Geraden (15), (1), (31) und (8); die Aussage von* V_2 *ist also innerhalb* $S(31/2/6)$ *nur in vier Vertauschungsfällen, statt in neun, mit den (ebenen) Verknüpfungsaxiomen beweisbar.*

Beweis. Der Beweis zerfällt wieder in neun Einzelschritte.

1. Die Ausübung von $\bar{\Psi}_1^{(1)} = 13 \longleftrightarrow 14$ auf $(\bar{\Pi}_0)$ mit (25) ergibt:

$$(14,\ 13) \times (\ 9,\ 26) = 17 \qquad \{(16) \text{ und } (12)\}$$
$$(13,\ 12) \times (26,\ 29) = 20 \qquad \{\ (5) \text{ und } (23)\}$$
$$(12,\ \ 9) \times (29,\ 14) = 16 \qquad \{(17) \text{ und } (14)\}$$

mit (16, 17, 20) = (15) kollinear, eine *Pascal*anordnung, die ersichtlich von $(\bar{\Pi}_0)$ mit (25) verschieden ist.

2. Übt man jetzt $\bar{\Psi}_1^{(2)} = 14 \longleftrightarrow 12$ auf $(\bar{\Pi}_0)$ mit (25) aus, so kommt:

$$(13,\ 12) \times (\ 9,\ 26) = 10 \qquad \{\ (5) \text{ und } (12)\}$$
$$(12,\ 14) \times (26,\ 29) = 2 \qquad \{(21) \text{ und } (23)\}$$
$$(14,\ \ 9) \times (29,\ 13) = 4 \qquad \{\ (6) \text{ und } (11)\}$$

mit (2, 4, 10) = (1) kollinear und $\neq$ (25), die $(\bar{\Pi}_0)$ kennzeichnet.

3. Die Ausübung von $\overline{\Psi}_1^{(3)} = 12 \longleftrightarrow 9$ auf $(\overline{\Pi}_0)$ mit (25) liefert:

$$
\begin{array}{ll}
(13,\ 14) \times (12,\ 26) = 19 & \{(16) \text{ und } (2)\} \\
(14,\ 9) \times (26,\ 29) = 20 & \{(6) \text{ und } (23)\} \\
(9,\ 12) \times (29,\ 13) = 3 & \{(17) \text{ und } (11)\}
\end{array}
$$

mit (3, 19, 20) = (31) kollinear und $\neq$ (25).

Mit Ausnahme der letzten führen nun die sämtlichen folgenden Ausübungen großer Vertauschungen aber jetzt entweder auf $(\overline{\Pi}_0)$ mit (25) oder auf eine der beiden ersten abgeleiteten *Pascal*-anordnungen mit den *Pascal*geraden (15) und (1) zurück und zeigen somit die Nichtbeweisbarkeit des *Axioms* V_2 innerhalb des Systems S (31/2/6).

4. $\overline{\Psi}_1^{(4)} = 12 \longleftrightarrow 29$, ausgeübt auf $(\overline{\Pi}_0)$ mit (25) ergibt:

$$
\begin{array}{ll}
(13,\ 14) \times (9,\ 26) = 17 & \{(16) \text{ und } (12)\} \\
(14,\ 29) \times (26,\ 12) = 24 & \{(14) \text{ und } (2)\} \\
(29,\ 9) \times (12,\ 13) = 11 & \{(30) \text{ und } (5)\}.
\end{array}
$$

(11, 17, 24) = (25) liegen zwar wieder kollinear, aber auf derselben Geraden (25), die $(\overline{\Pi}_0)$ kennzeichnet; d. h. $\overline{\Psi}_1^{(4)}$ liefert innerhalb S (31/2/6) wieder die Ausgangspascalanordnung, was der Aussage von V_2 widerspricht. Mithin ist V_2 in S (31/2/6) im großen Vertauschungsfall $\overline{\Psi}_1^{(4)}$ nicht beweisbar, und wir könnten es wieder mit dem Aufweis dieses einzigen Ausnahmefalles bewenden lassen, um die Nichtbeweisbarkeit von V_2 in S (31/2/6) zu zeigen. — Der Vollständigkeit halber und zur expliziten Durchführung des Beweises von Satz N_3 müssen wir aber jetzt auch noch die übrigen großen Vertauschungsfälle untersuchen.

5. Üben wir also $\overline{\Psi}_1^{(5)} = 13 \longleftrightarrow 9$ auf $(\overline{\Pi}_0)$ mit (25) aus, so folgt wieder $(\overline{\Pi}_0)$ selbst, also die Nichtbeweisbarkeit von V_2 für $\overline{\Psi}_1^{(5)}$ innerhalb S (31/2/6):

$$
\begin{array}{ll}
(9,\ 14) \times (13,\ 26) = 25 & \{(6) \text{ und } (7)\} \\
(14,\ 12) \times (26,\ 29) = 2 & \{(21) \text{ ,, } (23)\} \\
(12,\ 13) \times (29,\ 9) = 11 & \{(5) \text{ ,, } (30)\}
\end{array}
$$

mit (2, 11, 25) = (25) kollinear.

6. Dasselbe Ergebnis liefert die Ausübung von $\overline{\Psi}_1^{(6)} = 14 \longleftrightarrow 26$:

$$\begin{array}{ll}
(13,\ 26) \times (\ 9,\ 14) = 25 & \{\ (7) \text{ und } \ (6)\} \\
(26,\ 12) \times (14,\ 29) = 24 & \{\ (2) \text{ und } (14)\} \\
(12,\ \ 9) \times (29,\ 13) = \ \ 3 & \{(17) \text{ und } (11)\}
\end{array}$$

mit $(3,\ 24,\ 25) = (25)$ kollinear.

Die zwei folgenden großen Vertauschungen $\overline{\Psi}_1^{(7)}$, $\overline{\Psi}_1^{(8)}$ führen bezüglich auf die unter 1 und 2 erhaltenen *Pascal*schen Inzidenzanordnungen mit den *Pascal*geraden (15) bzw. (1) zurück, was wieder die Nichtbeweisbarkeit der bezüglichen Aussagen von V_2 in $S\,(31/2/6)$ zeigt.

7. Die Ausübung von $\overline{\Psi}_1^{(7)} = 9 \longleftrightarrow 26$ auf (Π_0) mit (25) ergibt:

$$\begin{array}{ll}
(13,\ 14) \times (26,\ \ 9) = 17 & \{(16) \text{ und } (12)\} \\
(14,\ 12) \times (\ 9,\ 29) = \ \ 7 & \{(21) \text{ und } (30)\} \\
(12,\ 26) \times (29,\ 13) = 28 & \{\ (2) \text{ und } (11)\}
\end{array}$$

mit $(7,\ 17,\ 28) = (15)$ kollinear. Dies führt also auf 1 zurück.

8. Übt man $\overline{\Psi}_1^{(8)} = 26 \longleftrightarrow 29$ auf (Π_0) mit (25) aus, so ergibt sich:

$$\begin{array}{ll}
(13,\ 14) \times (\ 9,\ 29) = 19 & \{(16) \text{ und } (30)\} \\
(14,\ 12) \times (29,\ 26) = \ \ 2 & \{(21) \text{ und } (23)\} \\
(12,\ \ 9) \times (26,\ 13) = \ \ 6 & \{(17) \text{ und } \ (7)\}
\end{array}$$

mit $(2,\ 6,\ 19) = (1)$ kollinear. Dies führt also auf 2 zurück.

9. Übt man endlich noch $\overline{\Psi}_1^{(9)} = 29 \longleftrightarrow 13$ auf (Π_0) mit (25) aus, so folgt eine neue *Pascal*anordnung:

$$\begin{array}{ll}
(29,\ 14) \times (\ 9,\ 26) = 10 & \{(14) \text{ und } (12)\} \\
(14,\ 12) \times (26,\ 13) = \ \ 7 & \{(21) \text{ und } \ (7)\} \\
(12,\ \ 9) \times (13,\ 29) = \ \ 3 & \{(17) \text{ und } (11)\}
\end{array}$$

mit $(3,\ 7,\ 10) = (8)$ kollinear. W. z. b. w.

Zusammenfassend läßt sich also hier sagen: Die unter V_2 fallenden großen Vertauschungen $\overline{\Psi}_1^{(\mu)}$ $(\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ 9)$ führen, ausgeübt auf die *Pascal*anordnung (Π_0) mit der *Pascalgeraden* (25) innerhalb der endlichen Geometrie des *Veblen*systems $S\,(31/2/6)$ nur zu vier, untereinander und von (Π_0) verschiedenen *Pas-*

*cal*schen Inzidenzanordnungen, entgegen der Aussage von V_2, die verlangt, daß neun solcher Pascalanordnungen vorhanden sind. Damit ist also gezeigt, daß V_2 mit den ebenen Verknüpfungsaxiomen nicht beweisbar ist. Das Hauptergebnis fassen wir im folgenden Satz N_4 zusammen:

Satz N_4: *Die Vertauschungsaussagen V_1 und V_2 sind mit den ebenen Verknüpfungsaxiomen nicht beweisbar, d. h. von diesen unabhängig. Da aber V_1 aus V_2 mit Hilfe der ebenen Verknüpfungsaxiome beweisbar ist, genügt es, die Aussage von V_2 neben den ebenen Verknüpfungsaxiomen als Axiom in die Axiomatik der reellen ebenen projektiven Geometrie einzuführen.*

Es sei bemerkt, daß $S\,(31/2/6)$ *ein minimales Veblensystem* ist, mit dem dieser Unabhängigkeitsbeweis geführt werden kann, denn jedes niederelementigere *Veblen*system enthält, wie man leicht zeigen kann, kein allgemeines *Pascal*sches Sechseck, so daß in ihm also die für die Unabhängigkeit notwendige Forderung 1 (§ 1 unter 2) nicht erfüllt werden kann.