Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1937. Heft II
Mai-Dezember-Sitzung

München 1937
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung und ihre Nullstellen auf der Mittelgeraden.

Von Erich Hecke in Hamburg.

Vorgelegt in der Sitzung von 8. Mai 1937.

Aus den Potenzreihen, welche in der Theorie der automorphen Funktionen, speziell der elliptischen Modulfunktionen auftreten, ergibt sich durch Übergang zu den Dirichlet-Reihen mit denselben Koeffizienten eine große Klasse von Funktionen, die insofern eine Verwandtschaft mit der Riemannschen Zetafunktion haben, als sie auch einer Funktionalgleichung des bekannten Typus genügen.[1] Die Frage liegt nahe, ob für diese Funktionen ebenfalls ein Nullstellenproblem von Bedeutung ist und wieweit überhaupt die in den letzten Jahrzehnten für $\zeta(s)$ bewiesenen Sätze auch für diese Kategorien von Funktionen gelten. Die Fragestellung gewinnt noch ein stärkeres Interesse, wenn man berücksichtigt, daß, wie aus meinen neueren Untersuchungen hervorgeht, die durch elliptische Modulfunktionen definierten Dirichlet-Reihen in einem passenden Matrizenring ein Eulerprodukt besitzen und daher mit den Primzahlen zusammenhängen.

Ich untersuche hier das Analogon des Hardyschen Nullstellensatzes: Es sei (bei festem $\lambda > 0, k > 0, \gamma = \pm 1$) die Dirichlet-Reihe

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

eine Funktion mit der „Signatur" $\{\lambda, k, \gamma\}$, d. h.

I) $(s-k)\,\varphi(s)$ ist eine ganze Funktion von endlichem Geschlecht,

II) $$R(k-s) = \gamma R(s) \text{ mit}$$

(1) $$R(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s)\,\varphi(s).$$

[1] E. Hecke, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung. Mathem. Ann. 112 (1936) S. 664.

Ist es wahr, daß auf der Mittelgeraden $\Re(s) = \sigma = \frac{k}{2}$ unendlich viele Nullstellen von $\varphi(s)$ liegen?

Der ursprüngliche Ansatz von Herrn Hardy mit der Vereinfachung von Herrn Landau[2] bringt, nach einer kleinen Modifikation, welche durch das k bedingt ist, das genannte Problem in Verbindung mit dem asymptotischen Verhalten der Potenzreihe

$$f(\tau) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i \frac{n\tau}{\lambda}}$$

bei Annäherung an den Punkt $\tau = 1$. Ich beweise hier zuerst den (im wesentlichen bekannten) Satz, welcher diesen Zusammenhang zum Ausdruck bringt, und gebe dann eine Aufzählung verschiedener Funktionsklassen $f(\tau)$, bei denen die Voraussetzungen des Satzes zutreffen. Dieser letztere Nachweis wird dabei sehr einfach mit Hilfe allgemeiner Eigenschaften automorpher Funktionen geführt, und es zeigt sich überhaupt wieder, daß zur Klassifikation dieser Dirichlet-Reihen die Elementarbegriffe aus der Theorie der automorphen Funktionen besonders geeignet sind.

Als abgeschlossene Hauptresultate erwähne ich hier die Sätze 3, 4, 8. Unter den 11 Klassen von Beispielen habe ich hauptsächlich arithmetisch interessante Funktionen zusammengestellt. Die Resultate lassen erkennen, daß bei all diesen Reihen das Vorhandensein eines Eulerproduktes weder notwendig noch hinreichend für die Existenz von unendlich vielen Nullstellen auf der Mittelgeraden ist.

Satz 1. *Es sei $\varphi(s)$ eine reelle Dirichlet-Reihe*

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

mit der Signatur $\{\lambda, k, \gamma\}$. Die zugehörige Funktion

$$f(\tau) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i \frac{n\tau}{\lambda}}, \quad a_0 = \gamma \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-k} \Gamma(k) \cdot \rho,$$

$$(\rho = \textit{Residuum von } \varphi(s) \textit{ bei } s = k)$$

[2] E. Landau, Über die Hardysche Entdeckung unendlich vieler Nullstellen der Zetafunktion mit reellem Teil 1/2. Mathem. Ann. 76 (1915) S. 212.

sei bei Annäherung an den Punkt $\tau = 1$ *auf dem Einheitskreise mit einem festen* $\beta < \frac{k+1}{2}$, $(\beta \geqq 0)$,

$$f(e^{i\varepsilon}) = O(\varepsilon^{-\beta}) \quad \text{für } \varepsilon \to 0,\ \varepsilon > 0.$$

Dann hat $\varphi(s)$ *auf der Geraden* $\Re(s) = \frac{k}{2}$ *unendlich viele Nullstellen.*

Beweis: Mit der Mellinschen Formel folgt auf bekannte Art

$$f(\tau) - a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\sigma_1)} \frac{R(s)}{(-i\tau)^s}\,ds.$$

τ ist dabei positiv-imaginär, $(-i\tau)^s = e^{s\log(-i\tau)}$ mit reellem Logarithmuswert auf der imaginären Achse, die Integration ist auf der vertikalen Geraden $\Re(s) = \sigma_1$ in der absoluten Konvergenzhalbebene von $\varphi(s)$ zu erstrecken. Die zulässige Verschiebung des Integrationsweges über den Pol $s = k$ auf die Gerade $\Re(s) = \frac{k}{2}$ führt zu

$$f(\tau) - a_0 - \frac{\gamma a_0}{(-i\tau)^k} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{R(s)\,ds}{(-i\tau)^s}.$$

Setzt man hier

$$\tau = e^{i\varepsilon},\ \varepsilon > 0;\ (-i\tau)^s = e^{i\left(\varepsilon - \frac{\pi}{2}\right)\sigma - t\left(\varepsilon - \frac{\pi}{2}\right)},$$

so wird

$$(2) \qquad f(e^{i\varepsilon}) - a_0 - \gamma a_0\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\frac{k}{2}}$$
$$= \frac{1}{2\pi} e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\frac{k}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{t\left(\varepsilon - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot R\left(\frac{k}{2} + it\right) dt.$$

Nun ist nach (1) $R\left(\frac{k}{2} - it\right) = \gamma R\left(\frac{k}{2} + it\right)$; andrerseits, weil

$R(s)$ auf der reellen Achse nach Voraussetzung reell, ist $R\left(\frac{k}{2} - it\right)$ konjugiert komplex zu $R\left(\frac{k}{2} + it\right)$, daher

$$i^{\frac{1-\gamma}{2}} R\left(\frac{k}{2} + it\right) \text{ reell.} \tag{3}$$

Ist nun $\varphi\left(\frac{k}{2} + it\right) \neq 0$, also auch $R\left(\frac{k}{2} + it\right) \neq 0$ für alle genügend großen $|t|$, so ist das Integral (2) absolut konvergent und überdies nach Voraussetzung dann

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\left(\varepsilon - \frac{\pi}{2}\right)} \left| R\left(\frac{k}{2} + it\right) \right| dt = O(\varepsilon^{-\beta}) \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

Mit dem asymptotischen Ausdruck der Γ-Funktion

$$\left| \Gamma\left(\frac{k}{2} + it\right) \right| \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\pi}{2}|t|} \, |t|^{\frac{k-1}{2}}$$

folgt daraus

$$\varepsilon^{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\left(\varepsilon - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}|t|} \, |t|^{\frac{k-1}{2}} \left| \varphi\left(\frac{k}{2} + it\right) \right| dt = O(1)$$

und a fortiori

$$\varepsilon^{\beta} \int_{0}^{\infty} e^{-\varepsilon t} \, t^{\frac{k-1}{2}} \left| \varphi\left(\frac{k}{2} + it\right) \right| dt = O(1)$$

und mit

$$\alpha = \frac{k-1}{2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{T}, \quad T \to +\infty$$

$$\int_{0}^{T} t^{\alpha} \left| \varphi\left(\frac{k}{2} + it\right) \right| dt = O(T^{\beta}).$$

Diese Gleichung führt aber auf einen Widerspruch. Sie ist nämlich offenbar gleichwertig mit

$$\int_{\frac{k}{2}+i}^{\frac{k}{2}+iT} \left| s^{\alpha} \varphi(s) \right| |ds| = O(T^{\beta})$$

und weiter mit

$$\int_{\frac{k}{2}+i}^{\frac{k}{2}+iT} \left| s^{\alpha} m^{s} \varphi(s) \right| \cdot |ds| = O(T^{\beta}), \tag{4}$$

wo m eine beliebige natürliche Zahl ist. Mit einem passenden m ist aber sogar

$$\int_{\frac{k}{2}+i}^{\frac{k}{2}+iT} s^{\alpha} m^{s} \varphi(s)\, ds \neq O(T^{\delta}), \text{ für alle } \delta < \alpha + 1 = \frac{k+1}{2} \tag{5}$$

auf Grund folgender Schlußweise: Man wähle m so, daß der Koeffizient a_m in $\varphi(s)$ von Null verschieden ist, und betrachte die im Quadranten

$$\Re(s) > 0, \ \Re\left(\frac{s}{i}\right) > 0$$

eindeutige und reguläre Funktion

$$Z(s) = \int_{\frac{k}{2}+i}^{s} z^{\alpha} m^{z} \varphi(z)\, dz.$$

Auf vertikalen Geraden in diesem Gebiete ist $Z(\sigma + it)$ gleichmäßig in $\sigma: O(t^{const.})$, und zwar ist im Bereich absoluter Konvergenz von $\varphi(s)$

$$Z(\sigma_1 + it) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\limits_{\sigma_1+i}^{\sigma_1+it} z^\alpha \left(\frac{m}{n}\right)^z dz + \text{const.}$$

$$= a_m \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_1+it} z^\alpha dz + \sum_{n \neq m} a_n \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_1+it} z^\alpha \left(\frac{m}{n}\right)^z dz + O(1)$$

$$= a_m \left(\frac{\sigma_1 + it}{\alpha + 1}\right)^{\alpha+1} + O(1) + O(t^\alpha).$$

Die Wachstumsfunktion $\mu(\sigma)$ für das Anwachsen von $Z(\sigma + it)$ auf vertikalen Geraden ist also konstant $\mu(\sigma) = \alpha + 1$ für alle σ, die größer als die Abszisse absoluter Konvergenz von $\varphi(s)$ sind. Nach Phragmén-Lindelöf ist aber $\mu(\sigma)$ eine konvexe Funktion und daher

$$\mu\left(\frac{k}{2}\right) \geqq \alpha + 1,$$

woraus (5) und durch den Widerspruch zu (4) auch Satz 1 folgt.

Es treten vielfach in der Arithmetik Dirichlet-Reihen auf, welche einer etwas anderen Funktionalgleichung genügen, sich aber leicht auf den oben behandelten Typus zurückführen lassen, nämlich Paare von Reihen $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ mit den Eigenschaften:

III) $(s-k)\,\varphi_1(s)$, $(s-k)\,\varphi_2(s)$ sind ganze Funktionen von endlichem Geschlecht.

IV) Es besteht die Gleichung

$$H(k-s)\,\varphi_2(k-s) = W^2.\ H(s)\,\varphi_1(s) \tag{6}$$

mit $$H(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s),\ \lambda > 0,\ k > 0,\ |W| = 1,$$

und daher auch

$$H(k-s)\,\varphi_1(k-s) = W^{-2}\ H(s)\,\varphi_2(s).$$

Hieraus folgt, daß

$$2\,\psi_1(s) = W\varphi_1(s) + W^{-1}\varphi_2(s)$$
$$2\,\psi_2(s) = W\varphi_1(s) - W^{-1}\varphi_2(s)$$

resp. die Signatur $\{\lambda, k, 1\}$ und $\{\lambda, k, -1\}$ haben. Wir wollen dann den Dirichlet-Reihen φ_1, φ_2 die Potenzreihen zuordnen

$$(7) \qquad \varphi_1(s) \to (f_1(\tau) + f_2(\tau))\, W^{-1}; \ \varphi_2(s) \to (f_1(\tau) - f_2(\tau)) \cdot W,$$

wenn f_1, f_2 nach Satz 1 den ψ_1, ψ_2 zugeordnet sind, was wegen des konstanten Gliedes ausdrücklich festgesetzt werden muß. Der zu Satz 1 analoge Satz lautet hier:

Satz 2. *Es seien φ_1, φ_2 zwei Dirichlet-Reihen mit konjugiert-komplexen Koeffizienten, welche den obigen Bedingungen III und IV genügen. Für die zugeordneten Potenzreihen F_1, F_2 gelte mit einem festen* $\beta < \frac{k+1}{2}$, $\beta \geqq 0$

$$F_1(e^{i\varepsilon}) \text{ und } F_2(e^{i\varepsilon}) = O(\varepsilon^{-\beta}), \text{ für } \varepsilon \to 0,\ 0 < \varepsilon < \pi.$$

Dann haben $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ auf der Geraden $\Re(s) = \frac{k}{2}$ unendlich viele Nullstellen.

Beweis wie oben unter Benutzung der Tatsache, daß

$$W \cdot H(s) \cdot \varphi_1(s)$$

auf der Geraden $\Re(s) = \frac{k}{2}$ reell ist.

Die weiteren Untersuchungen sollen der einfacheren Darstellung wegen unter den Voraussetzungen I und II vorgenommen werden; die Abänderungen für III und IV sind trivial und mögen dem Leser überlassen bleiben.

Die Voraussetzungen über $f(\tau)$ in Satz 1 und 2 sind nun bei den in der analytischen Zahlentheorie auftretenden Funktionen bei drei verschiedenen Klassen von Funktionen erfüllt:

Satz 3. *Sei $0 < \lambda < 2$. Jede bei $s = k$ reguläre Dirichlet-Reihe $\varphi(s)$ von der Signatur $\{\lambda, k, \gamma\}$ mit reellen Koeffizienten hat auf der Geraden $\Re(s) = \frac{k}{2}$ unendlich viele Nullstellen.*

Beweis: Die dem $\varphi(s)$ entsprechende Potenzreihe $f(\tau)$ gehört nämlich nach der Theorie, welche ich entwickelt habe, zu einer

Gruppe $\mathfrak{G}(\lambda)$ von linearen Substitutionen.[3] Diese wird erzeugt durch

$$\tau' = \tau + \lambda \text{ und } \tau' = -\frac{1}{\tau}.$$

Der Fundamentalbereich dieser Gruppe hat mit dem Rand der oberen τ-Halbebene nur den einen Punkt $\tau = \infty$ gemein. Regularität von $\varphi(s)$ bedeutet, daß $f(\tau)$ bei $\tau = \infty$ verschwindet, und daher hat (vgl. Satz 4 in § 5 von [1]) $f(\tau)$ die in Satz 1 geforderte o-Eigenschaft mit $\beta = \frac{k}{2}$, sogar bei Annäherung an einen beliebigen reellen Punkt. Diese Behauptung folgt sofort aus dem Verhalten der bei $\mathfrak{G}(\lambda)$ absolut invarianten Funktion

$$\left|\tau - \bar{\tau}\right|^{\frac{k}{2}} \left|(f(\tau)\right|$$

im Fundamentalbereich.

Beispiel 1. Für $\lambda = 1$ ist $\mathfrak{G}(1)$ die Modulgruppe. Deshalb hat z. B. die Dirichlet-Reihe von der Signatur $\{1,\ 12,\ 1\}$, welche zur Diskriminante

$$\Delta(\tau) = e^{2\pi i \tau} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau})^{24}$$

gehört, auf der Geraden $\mathfrak{R}(s) = 6$ unendlich viele Nullstellen. Sie besitzt überdies eine Eulersche Produktentwicklung.[4]

Dagegen hat die bei $s = 12$ mit einem Pol behaftete Reihe

$$\varphi(s) = \zeta(s) \cdot \zeta(s - 11)$$

mit der gleichen Signatur $\{1,\ 12,\ 1\}$ offenbar auf der Geraden $\mathfrak{R}(s) = 6$ keine einzige Nullstelle, aber nach dem Hardyschen Satz unendlich viele Nullstellen auf den beiden Geraden $\mathfrak{R}(s) = 0{,}5$ und $\mathfrak{R}(s) = 11{,}5$. Das Entsprechende gilt offenbar mit jedem geraden $k \geqq 4$ für die Funktionen

(8) $\quad \zeta(s) \cdot \zeta(s - k + 1)$ mit der Signatur $\{1,\ k,\ (-1)^{\frac{k}{2}}\}$.

---

[3] Vgl. § 5 der in 1 zitierten Arbeit.

[4] E. Hecke, Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung I. Mathem. Ann. 114 (1937) S. 27.

Für jedes in Satz 3 erwähnte $\varphi(s)$ gilt mit jedem $\varepsilon > 0$

$$\varphi\left(\frac{k}{2} + it\right) = O\left(|t|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

auf Grund der bekannten Abschätzungen (Satz 7 in [4]). In Verbindung mit dem Verhalten von $\zeta(s) . \zeta(s - k + 1)$ auf $\Re(s) = \frac{k}{2}$ ergibt sich dann leicht für $\lambda = 1$ noch folgende Verschärfung:

Satz 3a. *Die reelle Dirichlet-Reihe $\varphi(s)$ mit der Signatur $\{1, k, \gamma\}$ hat dann und nur dann auf der Graden $\Re(s) = \frac{k}{2}$ unendlich viele Nullstellen, wenn sie bei $s = k$ regulär ist.*

Für $\lambda \geqq 2$ treten in der analytischen Zahlentheorie viele Dirichlet-Reihen auf, welche dadurch mit Modulfunktionen zusammenhängen, daß

$$f^*(\tau) = f(\lambda\tau) \tag{9}$$

eine ganze Modulform von der Dimension $-k$ ist, die einer Untergruppe der Modulgruppe von endlichem Index adjungiert ist.

Wir ziehen auch nicht-ganze Werte von k in Betracht, und da der Sprachgebrauch noch nicht einheitlich ist, geben wir hier die genaue Definition:

Eine Funktion $F(\tau)$ heiße eine ganze Modulform von der Dimension $-k$, adjungiert zur Untergruppe $\mathfrak{U}$ der Modulgruppe, wenn

a) $F(\tau)$ im Innern der oberen Halbebene regulär ist,

b) für jede Substitution $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ aus $\mathfrak{U}$ gilt

$$\frac{F\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)}{(c\tau + d)^k} = \varepsilon F(\tau), \quad |\varepsilon| = 1, \tag{10}$$

c) für jede Substitution $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ aus der Modulgruppe eine Potenzentwicklung existiert

$$\frac{F\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)}{(c\tau + d)^k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{2\pi i \frac{n\tau}{N}}\right) e^{2\pi i \varrho \tau} \tag{11}$$

mit einem gewissen $\varrho \geqq 0$ und einer natürlichen Zahl N.

Solche Funktionen nennen wir abkürzend „von der Art $(-k, \mathfrak{U})$“; und weiter heiße $F(\tau)$ eine **Spitzenform,** wenn überdies in den Reihen (11) stets $\rho > 0$, also $F(\tau)$ in allen rationalen Punkten verschwindet.

In dieser Arbeit bedeute weiterhin $\mathfrak{U}$ stets eine Untergruppe der Modulgruppe von endlichem Index, auch wenn es nicht besonders gesagt ist.

Satz 4. *Die reelle Dirichlet-Reihe* $\varphi(s)$ *habe die Signatur* $\{\lambda, k, \gamma\}$. *Für die zugehörige Potenzreihe gelte:* $f^*(\tau) = f(\lambda\tau)$ *sei eine* **Spitzenform** *einer Art* $(-k, \mathfrak{U})$. *Dann hat* $\varphi(s)$ *auf der Geraden* $\mathfrak{R}(s) = \frac{k}{2}$ *unendlich viele Nullstellen.*

Beweis wie bei Satz 3: Nach der allgemeinen Theorie der Modulformen ist $|\tau - \bar{\tau}|^{\frac{k}{2}} f^*(\tau)$ in der oberen Halbebene beschränkt, daher ist Satz 1 mit $\beta = \frac{k}{2}$ anwendbar.

Unter diese Voraussetzungen fallen eine große Menge bekannter wie auch neuartiger Funktionen:

Beispiel 2. Ist für eine natürliche Zahl $q : \chi(n)$ ein eigentlicher Restcharakter mod q mit $\chi(-1) = -1$, so hat die Reihe $L(s, \chi) = \sum\limits_1^\infty \chi(n) n^{-s}$ die Eigenschaft, daß $L(2s-1, \chi)$ den Voraussetzungen von Satz 4 genügt und im Sinne von (7) auf Funktionen mit der Signatur $\{2q, \frac{3}{2}, \gamma\}$ führt. Es ist dabei

$$f^*(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} n \cdot \chi(n) \cdot e^{2\pi i n^2 \tau}.$$

Beispiel 3. Alle Zetafunktionen in imaginär-quadratischen Zahlkörpern mit echten Größencharakteren[5] gehören hierher. Ich erinnere an die Definition: Für einklassige Körper mit der Diskriminante $-D$ sind diese Zetafunktionen definiert durch

$$Z(s, k-1, \chi) = \sum_{\mu} \left(\frac{\mu}{|\mu|}\right)^{k-1} \cdot \chi(\mu) \cdot N(\mu)^{-s}.$$

[5] E. Hecke, Eine neue Art von Zetafunktionen ... (Zweite Mitteilung) Mathem. Zeitschrift 6 (1920) S. 43.

Darin durchläuft μ die ganzen Zahlen des Körpers $K(\sqrt{-D})$, $\chi(\mu)$ ist ein eigentlicher Restcharakter nach dem ganzen Ideal $\mathfrak{q}$ in diesem Körper, während $k-1$ eine natürliche Zahl bedeutet. Die Funktion

$$Z\left(s-\frac{k-1}{2},\, k-1, \chi\right) = \sum_{\mu} \mu^{k-1}\chi(\mu)\, N(\mu)^{-s}$$

genügt den Bedingungen von Satz 5 und führt im Sinne von (7) auf die Signatur

$$\{\sqrt{D\cdot N(\mathfrak{q})},\, k, \pm 1\}.$$

Die Potenzreihe

$$f^*(\tau) = \sum_{\mu} \mu^{k-1}\cdot\chi(\mu)\cdot e^{2\pi i\tau N(\mu)}$$

ist dann eine Spitzenform zur Kongruenzgruppe $\Gamma(D\cdot N(\mathfrak{q}))$ der Stufe $D\cdot N(\mathfrak{q})$ gehörig. Das ergibt sich aus der allgemeinen Theorie der Thetareihen (vgl. etwa den direkten, für $k=2$ ausgeführten Beweis in meiner Arbeit).[6]

Das λ in den hier vorkommenden Signaturen ist im allgemeinen irrational. Im Beweis des Nullstellensatzes treten jedoch keine Unterschiede in den Fällen „λ rational" und „λ irrational" auf, anders als in den späteren Beispielen 8, welche dem Werte $k=1$ entsprechen.

Beispiel 4. Den Bereich der Kongruenzgruppen verläßt man bei der Betrachtung der Wurzeln aus der Diskriminante $\Delta(\tau)$ aus Beispiel 1. Für jedes reelle positive k ist

$$\Delta(\tau)^{\frac{k}{12}} = e^{2\pi i\frac{k\tau}{12}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(k)}\, e^{2\pi i n\tau}$$

eine eindeutige Modulform von der Dimension $-k$, adjungiert zur Modulgruppe, und zwar ist sie Spitzenform. Die Reihe

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(k)}\cdot\left(n+\frac{k}{12}\right)^{-s} \tag{12}$$

[6] E. Hecke, Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Math. Ann. 97 (1926) S. 222.

hat reelle Koeffizienten und genügt — nach der klassischen Schlußweise mit dem Γ-Integral — der Funktionalgleichung

$$R(s) = R(k-s) \text{ mit } \lambda = 1.$$

Sie ist, wenn $\frac{k}{12}$ keine ganze Zahl ist, keine spezielle Dirichlet-Reihe, aber eine ganze Funktion von s von endlichem Geschlecht. Offenbar gilt nach dem Beweis von Satz 4 der Nullstellensatz auch für sie: (12) hat auf der Geraden $\Re(s) = \frac{k}{12}$ unendlich viele Nullstellen. Für rationales $\frac{k}{12} = \frac{p}{q}$ ist $q^{-s} \cdot \varphi(s)$ eine (spezielle) Dirichlet-Reihe mit der Signatur $\{q, k, 1\}$.

Beispiel 5. Aus den Dirichlet-Reihen mit der Signatur $\{1, k, \gamma\}$ erhält man durch Aufspalten nach einem ganzen rationalen Modul q Reihen der Signatur $\{q, k, \gamma\}$. Ist

$$F(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau} \tag{13}$$

eine ganze Modulform 1. Stufe von der Dimension $-k$ (k muß dann gerade und $\geqq 4$ sein), so ist für jede natürliche Zahl q mit einem Restcharakter $\chi(n)$ mod q

$$F(\tau, \chi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \chi(n) e^{2\pi i \frac{n\tau}{q}} = \sum_{l \bmod q} \chi(l) \sum_{n \equiv l \pmod q} a_n e^{2\pi i \frac{n\tau}{q}}$$

$$= \frac{1}{q} \sum_{l, r \bmod q} \chi(l) \zeta^{-lr} F\left(\frac{t+r}{q}\right) \quad \left(\text{mit } \zeta = e^{\frac{2\pi i}{q}}\right)$$

eine Form der Stufe q. Für eigentliche Charaktere χ mod q gilt bekanntlich

$$\sum_{l \bmod q} \chi(l) \zeta^{-lr} = \chi(r) \sum_{l \bmod q} \chi(l) \zeta^{-l} = \chi(r) \cdot G(\chi),$$

und da $F(\tau)$ zur Stufe 1 gehört, ist für zwei ganze Zahlen r, r' mit $r \cdot r' \equiv 1 \pmod{q}$

$$F\left(\frac{-\frac{1}{\tau}+r}{q}\right) = \tau^k F\left(\frac{\tau+r'}{q}\right)$$

$$\frac{F\left(-\frac{1}{\tau}, \chi\right)}{(-i\tau)^k} = W \cdot F(\tau, \chi) \text{ mit } W = (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{G(\chi)}{\overline{G(\chi)}} \text{ und } |W| = 1.$$

Hieraus folgt nach Satz 4:

Wenn in (13) die a_n reell sind, $F(\tau)$ eine Spitzenform und χ ein eigentlicher Charakter mod q ist, so genügt

$$\varphi(s) = \sum_{n=q}^{\infty} a_n \cdot \chi(n) \cdot n^{-s}$$

den Voraussetzungen von Satz 4 mit $\lambda = q$ (oder den entsprechenden zu Satz 2) und hat also auf der Mittelgeraden $\Re(s) = \frac{k}{2}$ unendlich viele Nullstellen; das gilt z. B. für $F(\tau) = \Delta(\tau)$.

Beispiel 6. Jede Zetafunktion eines **reell-quadratischen Zahlkörpers** mit Klassencharakteren nach einem Ideal $\mathfrak{a}$, deren Funktionalgleichung als Γ-Bestandteil den Ausdruck $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ enthält, besitzt auf der Geraden $\Re(s) = \frac{k}{2}$ unendlich viele Nullstellen.

Denn die zugehörigen Potenzreihen $f(\lambda\tau)$ sind ganze Modulformen von der Dimension -1 zu einer gewissen Kongruenzgruppe, und zwar Spitzenformen. Dies habe ich in einer früheren Arbeit[7] bewiesen. Die Forderung betr. den Γ-Faktor bedeutet, daß diese Zetafunktion mit Hilfe eines solchen Klassencharakters $\chi_0(\mu)$ nach $\mathfrak{a}$ gebildet sein muß, daß $\chi_0(\mu) \cdot sgn\, \mu$ nur von der Restklasse von μ mod $\mathfrak{a}$, aber nicht vom Vorzeichen von μ abhängt.

[7] Vgl. § 1 und 2 der in 6 zitierten Arbeit.

Den bisher aufgeführten Funktionen ist gemeinsam, daß die O-Bedingung der Potenzreihen in Satz 1 und 2 für $f(\lambda\tau)$ nicht nur bei Annäherung von τ an den Punkt $\tau = \frac{1}{\lambda}$, sondern bei Konvergenz gegen beliebige reelle Punkte erfüllt ist, weil wir es mit Spitzenformen zu tun haben. Die beiden andern zu Anfang erwähnten Klassen von Funktionen haben diese O-Eigenschaft nur in einzelnen Randpunkten:

Satz 5. *Die reelle Dirichlet-Reihe* $\varphi(s)$ *habe die Signatur* $\{\lambda, k, \gamma\}$. *Für die zugehörige Potenzreihe gelte:* $f^*(\tau) = f(\lambda\tau)$ *sei eine Modulform der Art* $(-k, \mathfrak{U})$ *und* λ **sei eine reelle quadratische Irrationalzahl.** *Dann hat* $\varphi(s)$ *auf der Geraden* $\Re(s) = \frac{k}{2}$ *unendlich viele Nullstellen.*

Satz 6. *Die reelle Dirichlet-Reihe* $\varphi(s)$ *habe die Signatur* $\{\lambda, k, \gamma\}$. *Für die zugehörige Potenzreihe gelte:* $f^*(\tau) = f(\lambda\tau)$ *sei eine Modulform der Art* $(-k, \mathfrak{U})$. λ **sei eine rationale Zahl** *und* $f^*(\tau)$ *soll in dem rationalen Punkte* $\frac{1}{\lambda}$ *verschwinden. Dann hat* $\varphi(s)$ *auf der Geraden* $\Re(s) = \frac{k}{2}$ *unendlich viele Nullstellen.*

Beweis von Satz 5. Es ist zu zeigen, daß bei Annäherung auf dem Kreise $|\tau| = \frac{1}{\lambda}$ an den Punkt $\tau = \frac{1}{\lambda}$ die Funktion

$$g(\tau) = |\tau - \bar{\tau}|^{\frac{k}{2}} \cdot |f^*(\tau)| \tag{14}$$

beschränkt bleibt. Das folgt aber ohne Rechnung aus einer allgemeinen Eigenschaft der Modulfunktionen. Denn die nichtanalytische Funktion (14) ist bei der Untergruppe $\mathfrak{U}$ offenbar absolut invariant. Wenn $\omega = \frac{1}{\lambda}$ und ω' zwei konjugierte reelle quadratische Irrationalzahlen sind, so gibt es bekanntlich in der Modulgruppe eine von der Identität verschiedene Substitution mit den Fixpunkten ω, ω', und da $\mathfrak{U}$ von endlichem Index ist, gibt es auch in $\mathfrak{U}$ eine solche Substitution L. Die unendliche durch L erzeugte zyklische Gruppe führt jeden Kreis durch ω, ω' in sich über, und die invariante Funktion (14) ist also auf diesen Kreisen in einer passenden Variabeln, nämlich $\log \frac{\tau - \omega}{\tau - \omega}$, periodisch. Wegen der bekannten Gestalt des Fundamentalbereiches dieser hyperbolischen Substitution nimmt die Funktion den Wertevorrat zwischen zwei Kreisen dieses Büschels bereits in einem endlichen abgeschlossenen Teil im Innern der oberen τ-Halbebene an. Hier ist aber $g(\tau)$ beschränkt, weil $f^*(\tau)$ regulär ist.

Will man im Bereich der analytischen Funktionen bleiben, so ziehe man statt (14) die ebenfalls bei L invariante Funktion

$$((\tau - \omega)(\tau - \omega'))^{\frac{k}{2}} f^*(\tau) \tag{15}$$

heran.

Beweis von Satz 6. Man setze in (11) mit $F(\tau) = f^*(\tau)$ eine solche Modulsubstitution ein, daß

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{\lambda} \text{ und } z = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \frac{a}{c} e^{i\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < \pi.$$

Damit wird

$$z - \bar z = \frac{\tau - \bar\tau}{|c\tau + d|^2}, \quad |c\tau + d|^2 = |-cz + a|^{-2} = \frac{1}{4a^2}\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-2},$$

$$\tau - \bar\tau = (z - \bar z)\,|-cz + a|^{-2} = \frac{1}{ac}\,\frac{\cos\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}},$$

$$f^*\left(\frac{1}{\lambda} e^{i\varepsilon}\right) = f^*\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-k} \cdot O\left(e^{\pi\varrho|\tau - \bar\tau|}\right) = O(1). \tag{16}$$

Da $f^*(\tau)$ im Punkte $\frac{1}{\lambda}$ verschwinden soll, so ist $\varrho > 0$, und daher konvergiert (16) mit $\varepsilon \to 0$ selbst gegen Null, woraus nach Satz 1 oder 2 mit $\beta = 0$ unser Satz 6 folgt.

Satz 7. *Die reelle Dirichlet-Reihe* $\varphi(s)$ *habe die Signatur* $\{\lambda, k, \gamma\}$. *Für die zugehörige Potenzreihe gelte:* $f^*(\tau) = f(\lambda\tau)$ *sei eine Modulform der Art* $(-k, \mathfrak{U})$. **Es sei λ rational und $k < 1$.** *Dann hat* $\varphi(s)$ *auf der Geraden* $\Re(s) = \frac{k}{2}$ *unendlich viele Nullstellen.*

Beweis. Aus dem Beweis von Satz 6 geht hervor, daß eine Modulform von der Art $(-k, \mathfrak{U})$ bei Konvergenz des Argumentes gegen einen rationalen Punkt r auf dem Halbkreis $\tau = re^{i\varepsilon}$ für $\varepsilon \to 0$ entweder auch gegen Null konvergiert (wenn $\rho > 0$) oder von der Größenordnung ε^{-k} ist (wenn $\rho = 0$), also in jedem Falle $O(\varepsilon^{-k})$ ist. Nun ist aber

$$k < \frac{k+1}{2} \quad \text{für } k < 1.$$

Mit $\beta = k$ in Satz 1 oder 2 folgt daher die Behauptung.

Beispiel 7. Ist $\chi(n)$ ein eigentlicher Charakter mod q mit $\chi(-1) = +1$ (für $q = 1$ also der Hauptcharakter), so ist Satz 7 auf die L-Reihen $L(2s, \chi)$, speziell auf $\zeta(2s)$ anwendbar. Denn die entsprechenden Potenzreihen $f^*(\tau)$ sind Modulformen der Dimension $-\frac{1}{2}$, der Stufe $2q$ adjungiert, und haben $\lambda = 2q$. Diese Schlußweise liegt dem Beweis von Herrn Landau zugrunde.

Beispiel 8. Die Zetareihen zu einem imaginär-quadratischen Körper mit der Diskriminante $-D$, gebildet mit eigentlichen Klassencharakteren nach einem ganzen Ideal $\mathfrak{q}$ führen im Sinne von Satz 2 auf Reihen mit der Signatur

$$\{\sqrt{D \cdot N(\mathfrak{q})}, 1, \pm 1\},$$

während die Potenzreihen Modulformen der Dimension -1 einer gewissen Stufe sind. Falls also $\lambda = \sqrt{D \cdot N(\mathfrak{q})}$ irrational ist, haben die betr. Reihen auf der Geraden $\Re(s) = \frac{k}{2}$ unendlich viele Nullstellen. Speziell gilt das für

$$\zeta(s, \mathfrak{K}) = \sum_{\mathfrak{a} \text{ in } \mathfrak{K}} N(\mathfrak{a})^{-s}, \tag{17}$$

wo $\mathfrak{a}$ alle ganzen Ideale $\neq 0$ in einer Idealklasse $\mathfrak{K}$ (oder Ringidealklasse) eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers mit der Diskriminante $-D \neq -4$ durchläuft, und auch für jede lineare Verbindung solcher Reihen von gleicher Ringdiskriminante mit reellen Koeffizienten.

Über diese Reihen (17) ist kürzlich von den Herren Potter und Titchmarsh ein wesentlich schärferes Resultat als die obige Aussage bewiesen worden. Diese Autoren geben[8] eine untere Schranke für die Anzahl $N(T)$ der Nullstellen auf der Geraden $\Re(s) = \frac{k}{2}$ mit einer Ordinate zwischen 0 und T. Sie finden durch eine schärfere Hardysche Methode unter Benutzung von Abschätzungen von Teilsummen der Thetareihen für diese Anzahl

$$N(T) > K \cdot T^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \text{ mit einem positiven } K = K(\varepsilon) \text{ für alle } \varepsilon > 0.$$

Auch ihren schärferen Methoden entziehen sich aber wieder die Reihen mit rationalem λ. Später hat dann Herr Kober[9] für alle Reihen

$$\sum_{m,\, n} Q(m, n)^{-s},$$

wo $Q(m, n) = am^2 + bmn + cn^2$ eine positiv-definite Form mit beliebigen reellen Koeffizienten bedeutet, die Existenz unendlich vieler Nullstellen auf der Geraden $\Re(s) = \frac{k}{2}$ bewiesen.

Beispiel 9. Als bemerkenswerte Anwendung von Satz 6 betrachten wir für $k > 0$ die Dirichlet-Reihen $\varphi_k(s)$ zu

$$(18) \quad f_k(\tau) = \frac{1}{4k} \vartheta_{00}^{2k}(\tau) = \frac{1}{4k} \left(\sum_{n=\infty}^{+\infty} e^{\pi i n^2 \tau} \right)^{2k} = \frac{1}{4k} + e^{\pi i \tau} + \cdots$$

---

[8] H. S. A. Potter and E. C. Titchmarsh, The Zeros of Epsteins Zetafunctions. Proc. London Mathem. Soc. 35 (1935) p. 372.

[9] H. Kober, Nullstellen Epsteinscher Zetafunktionen. Proc. London Mathem. Soc. 42 (1936) p. 1.

$\varphi_k(s)$ hat die Signatur $\{2, k, 1\}$ und ist übrigens, wenn $k < 4$, durch die Signatur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Wegen der bekannten Transformationsformel

$$\vartheta_{00}\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right) = \sqrt{-i(\tau+1)}\,\vartheta_{10}(\tau)$$

verschwindet nun die Modulform $f_k(\tau)$ im Punkte $\tau = 1$, und daher folgt nach Satz 6 die Existenz von unendlich vielen Nullstellen jedes $\varphi_k(s)$ auf der Geraden $\Re(s) = \frac{k}{2}$. Für ganzzahlige Werte von $2k$ hat bereits Herr Landau in [2] diese Tatsache auf diesem Wege bewiesen. Die Aussage für beliebige $k > 0$ hat deshalb Interesse, weil $\varphi_k(s)$ stetig von k abhängt und in dieser einparametrigen Schar von Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung, die alle auf der Mittelgeraden unendlich viele Nullstellen besitzen, als Individuen z. B.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{1}{2}}(s) &= \zeta(2s) \\
\varphi_1(s) &= \zeta(s)\,L(s) \\
\varphi_2(s) &= \zeta(s)\,\zeta(s-1)\,(1-2^{2-2s})
\end{aligned}$$

auftreten. Läßt man auch die Signatur $\{2, 0, 1\}$ zu, so ist als Grenzelement der Schar auch eine Reihe mit dieser Signatur vorhanden, nämlich

$$(19) \qquad \varphi_0(s) = \zeta(s)\cdot\zeta(s+1)\cdot(1-2^{1-s})\cdot(1-2^{-1-s}).$$

Sie ist die Dirichlet-Reihe zu

$$(20) \quad f_0(\tau) = \lim_{k=0}\left(f_k(\tau) - \frac{1}{4k}\right) = \lim_{k=0}\frac{\vartheta_{00}^{2k}-1}{4k} = \frac{1}{2}\log\vartheta_{00}(\tau)$$

und hat auf ihrer Geraden $\Re(s) = 0$ keine Nullstellen. Man zeigt übrigens leicht, daß es bis auf einen konstanten Faktor nur eine Reihe mit der Signatur $\{2, 0, 1\}$ gibt.

Mit Benutzung meiner allgemeinen Theorie aus § 4 in [1] läßt sich für die Signaturen $\{2, k, \gamma\}$ abschließend noch das Analogon zu Satz 3 beweisen:

Satz 8. *Es sei $\varphi(s)$ eine reelle Dirichlet-Reihe mit der Signatur $\{2, k, \gamma\}$ und ferner*

$$(21)\qquad \begin{aligned} &\textit{wenn } \gamma = 1, \textit{ sei } \frac{k}{4} \textit{ keine ganze Zahl;} \\ &\textit{wenn } \gamma = -1, \textit{ sei } \frac{k}{2} \textit{ keine ganze Zahl.} \end{aligned}$$

Dann hat $\varphi(s)$ auf der Geraden $\Re(s) = \frac{k}{2}$ unendlich viele Nullstellen.

Beweis: Die zu $\varphi(s)$ gehörige Potenzreihe $f(\tau)$ ist nach den Ergebnissen von § 4 in meiner Arbeit [1] eine Modulform von der Dimension $-k$, welche der Untergruppe $\mathfrak{G}(2)$ adjungiert ist. Sie hat, falls $\gamma = 1$, wie dort gezeigt, im Punkte $\tau = 1$ eine Nullstelle von mindestens der Ordnung $\frac{k}{4} - \left[\frac{k}{4}\right]$. Wenn also $\frac{k}{4}$ nicht ganz, so ergibt sich aus Satz 6 die Behauptung; und wenn $\gamma = -1$, so führt dieselbe Schlußweise für $f^2(\tau)$ ebenfalls zum Ziel.

Daß bei Fortlassen der Bedingungen (21) der Satz 8 nicht mehr gilt, zeigt folgendes Gegenbeispiel: Ist $\psi(s)$ eine Reihe mit der Signatur $\{1, k, \gamma\}$, so hat $2^{-s}\,\psi(s)$ die Signatur $\{2, k, \gamma\}$. Speziell hat also

$$2^{-s} \cdot \zeta(s) \cdot \zeta(s-3)$$

die Signatur $\{2, 4, 1\}$, aber auf der Geraden $\Re(s) = 2$ überhaupt keine Nullstelle. Dagegen hat die Reihe

$$\zeta(s) \cdot L(s-2n) + \gamma(-4)^n \cdot \zeta(s-2n) \cdot L(s) \qquad \left(L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{n}\right) n^{-s}\right)$$

mit der Signatur $\{2, 2n+1, \gamma\}$, $n = 0, 1, \ldots$ auf der Geraden $\Re(s) = n + \frac{1}{2}$ also unendlich viele Nullstellen.

Beispiel 10. Die allgemeinste Methode, um aus Modulformen Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung und eine Aussage über die Nullstellen auf der Mittelgeraden zu erhalten, besteht in folgendem (dabei treten von selbst auch Dirichlet-Reihen auf, die nicht mehr von dem speziellen Typus sind, ähnlich wie in Beispiel 4):

Es sei $F(\tau)$ eine beliebige ganze Modulform einer Dimension $-k$, adjungiert zu einer Untergruppe $\mathfrak{U}$ von endlichem Index. Nach (11) besteht eine Entwicklung

$$F(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n e^{2\pi i \tau\left(\frac{n}{q_1}+a\right)} + A, \tag{22}$$

wo q_1 eine natürliche Zahl und $a \geqq 0$ (a braucht nicht rational zu sein). A soll das von τ freie konstante Glied der Reihe sein, das also nur dann $\neq 0$ sein kann, wenn unter den Zahlen $\frac{n}{q_1}+a$ ganze Zahlen vorkommen. Die in der Summe auftretenden Terme $\frac{n}{q_1}+a$ sind bei dieser Bezeichnung also alle > 0. Die Funktion $F(\tau)$ definiert eine Dirichlet-Reihe

$$\varphi_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n \left(\frac{n}{q_1}+a\right)^{-s}. \tag{23}$$

Nach Definition von $F(\tau)$ ist mit entsprechenden Bezeichnungen auch

$$\frac{F\left(\frac{-1}{\tau}\right)}{(-i\tau)^k} = \sum_{n=0}^{\infty}{}' b_n e^{2\pi i \tau\left(\frac{n}{q_2}+b\right)} + B$$

eine Reihe von ähnlichem Typ. Diese führt zur Dirichlet-Reihe

$$\varphi_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' b_n \cdot \left(\frac{n}{q_2}+b\right)^{-s}. \tag{24}$$

Mit Hilfe eines positiven, von τ unabhängigen Parameters ω bilde man

$$f(\tau) = F\left(\frac{\tau}{\omega}\right) + \gamma \frac{F\left(\frac{-1}{\omega\tau}\right)}{(-i\tau)^k} \quad (\gamma = \pm 1). \tag{25}$$

Dann gilt offenbar

$$\frac{f\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{(-i\tau)^k} = \gamma f(\tau).$$

Die klassische Schlußweise ergibt dann:

$$\int_0^\infty (f(ix) - A - \gamma B \omega^k) x^{s-1} dx$$

$$= \Gamma(s) \left(\left(\frac{2\pi}{\omega} \right)^{-s} \cdot \varphi_1(s) + \gamma \omega^k \cdot (2\pi\omega)^{-s} \cdot \varphi_2(s) \right)$$

stellt eine analytische Funktion von s dar, welche bei $s = 0$ und $s = k$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\pm (A + \gamma B \omega^k)$ hat, sonst im Endlichen überall regulär ist und sich beim Übergang von s zu $k - s$ um den Faktor γ ändert. Man setze

$$H(s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s)$$

(26) $$\psi_\gamma(s) = \omega^s \cdot \varphi_1(s) + \gamma \omega^{k-s} \varphi_2(s),$$

so gilt

(27) $$H(s) \psi_\gamma(s) = \gamma \cdot H(k-s) \psi_\gamma(k-s),$$

und $(s - k)\, \psi_\gamma(s)$ ist überdies eine ganze Funktion von endlichem Geschlecht. Auf diese Reihen $\psi_\gamma(s)$ kann man die Schlußweise von Satz 1 ohne weiteres übertragen, obwohl sie keine speziellen Dirichlet-Reihen sind, da z. B. die Existenz einer absoluten Konvergenzhalbebene ausreicht.

Wir machen also folgende Voraussetzung über Realitätsverhältnisse:

(28) $\varphi_1(s)$ sei eine Reihe mit reellen Koeffizienten

$\dfrac{F\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{(-i\tau)^k}$ und damit auch $\varphi_2(s)$ ist dann ebenfalls reell. Wegen (27) ist auf der Geraden $\Re(s) = \dfrac{k}{2}$

(29) $$H(s) \psi_\gamma(s) \begin{cases} \text{reell, wenn } \gamma = 1 \\ \text{rein imaginär, wenn } \gamma = -1. \end{cases}$$

Nach der Schlußweise von Satz 1 besteht daher der Satz:

Jede der beiden reellen Funktionen $\psi_\gamma(s)$ hat auf der Graden $\Re(s) = \dfrac{k}{2}$ unendlich viele Nullstellen, wenn bei Annäherung an die beiden Punkte $\tau = \frac{\pm 1}{\omega}$ auf dem Halbkreis die Modulform $F(\tau)$ sich so verhält:

$$(30) \qquad F(\tau) = O(|\tau - \bar{\tau}|^{-\beta}) \qquad \text{für } \tau \to \frac{\pm 1}{\omega}$$

mit einem konstanten $\beta < \frac{k+1}{2}$.

Die beiden Summanden in $\psi_\gamma(s)$ haben in jedem Falle nach (28) und (29) die Eigenschaft: $H(s)\,\omega^s\,\varphi_1(s)$ ist konjugiert imaginär zu $H(s)\;\omega^{k-s}\;\varphi_2(s)$ für $\Re(s) = \frac{k}{2}$. Jede Nullstelle von $\varphi_1(s)$ hier ist also gleichzeitig eine solche von $\varphi_2(s)$ und umgekehrt. Überdies ist für jedes reelle a, b auch auf

$$(31) \qquad \begin{aligned} &a \cdot H(s)\,\psi_1(s) + i\,b \cdot H(s)\,\psi_{-1}(s) \\ &= H(s)\,(\omega^s \cdot \varphi_1(s) \cdot (a + i\,b) + \omega^{k-s} \cdot \varphi_2(s) \cdot (a - i\,b)) \end{aligned}$$

die Schlußweise von Satz 2 anwendbar. Besteht also (30), so hat auch diese Funktion unendlich viele Nullstellen auf der Geraden $\Re(s) = \frac{k}{2}$. Mithin gilt folgende Alternative:

Satz 9. *Wenn* (30) *gilt, so hat auf der Geraden* $\Re(s) = \frac{k}{2}$ *entweder jede der beiden reellen Funktionen* $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ *unendlich viele Nullstellen, oder der Quotient*

$$\omega^{2s-k}\,\frac{\varphi_1(s)}{\varphi_2(s)} = \omega^{2it} \cdot \frac{\varphi_1\left(\frac{k}{2} + i\,t\right)}{\varphi_2\left(\frac{k}{2} + i\,t\right)}$$

nimmt hier jeden Wert vom Betrage 1 (*und nur solche*) *unendlich oft an* (*oder beides tritt ein*).

Beispiel 11. Wenden wir uns schließlich noch zu den Reihen

$$(32) \qquad \varphi(s) = \sum_{(n)}{}' \, Q(n_1, n_2, \cdots n_r)^{-s},$$

die durch eine positiv definitive ganzzahlige quadratische Form Q von r Variabeln erzeugt werden. Die Potenzreihen $\sum_{(n)} e^{\pi i \tau Q}$ sind bekanntlich Modulformen der Dimension $-\frac{r}{2}$, adjungiert einer gewissen Kongruenzgruppe. Die Fälle $r = 1, 2$ sind in Beispiel 8 und 9 erledigt. Für spezielle Formen mit größerem r folgt ebenfalls der Nullstellensatz, z. B. wenn Q eine Summe von binären Formen derselben Diskriminante $-D$ mit irrationalem $\sqrt{D}$ ist. Auch für solche Formen von 4 Variabeln, welche in der Theorie der maximalen Integritätsbereiche in definiten Quaternionenkörpern auftreten, gilt das gleiche. Ich schließe mit einem bemerkenswerten **Gegenbeispiel:**

Es gibt Formen Q, wo (32) eine Signatur $\{\lambda, k, 1\}$ hat, überdies ein Euler-Produkt ist, und doch keine einzige Nullstelle auf $\Re(s) = \frac{k}{2}$ hat.

Es sei nämlich Q eine Form in 8 Variabeln mit der Diskriminante 1 (in der Terminologie von Herrn Brandt), d. h. die Determinante $\left|\frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \, \partial x_k}\right|$ ist 1. Eine solche ganzzahlige Form ist

$$Q = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 10x_5^2 + 6x_6^2 + 2x_7^2 + x_8^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + 3x_3x_4 + 5x_4x_5 + 3x_5x_6 + x_6x_7 + x_7x_8.$$

Von der Reihe

$$F(\tau) = \sum_{(n)} e^{2\pi i \tau Q(n_1, \cdots n_8)}$$

beweist man aus der bekannten Transformationsformel, daß

$$\frac{F\left(\frac{-1}{\tau}\right)}{\tau^4} = F(\tau),$$

woraus zusammen mit $F(\tau + 1) = F(\tau)$ folgt, daß $F(\tau)$ eine ganze Modulform 1. Stufe von der Dimension -4, also bis auf einen konstanten Faktor gleich dem Weierstraßschen g_2 ist. Die Dirichlet-Reihe hierzu hat mithin die Signatur $\{1, 4, 1\}$ und ist gleich $\zeta(s) \cdot \zeta(s-3)$, wodurch die Behauptung bewiesen ist.

Hamburg, 11. April 1937.