Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1937. Heft II

Mai-Dezember-Sitzung

München 1937
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über die Lage eines singulären Punktes auf dem Konvergenzkreis.

Von Oskar Perron.

Vorgelegt in der Sitzung vom 5. Juni 1937.

§ 1.
Das Problem.

Für eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ist der Konvergenzradius R bekanntlich gegeben durch die Cauchy-Hadamardsche Formel

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

Auf dem Kreis $|z| = R$ liegt dann wenigstens ein singulärer Punkt $z = Re^{i\alpha}$ der Funktion $f(z)$. Während aber die Formel für R seit über 100 Jahren bekannt ist, wurde für α erst vor wenigen Wochen eine analoge Formel angegeben, und zwar von Herrn Mandelbrojt.[1] Der Konvergenzradius sei gleich 1, und $z = e^{i\alpha}$ sei der dem Punkt 1 nächstgelegene singuläre Punkt auf dem Konvergenzkreis. Setzt man dann

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_{n-\nu} h^{\nu} = r_n(h),$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|r_n(h)|} = R(h),$$

[1] S. Mandelbrojt: Théorème général fournissant l'argument des points singuliers situés sur le cercle de convergence d'une série de Taylor. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, tome **204**, S. 1456–58.

so zeigt Herr Mandelbrojt, daß die Funktion $R(h)$ für $h = 0$ eine vordere Derivierte $R'_{+}(0)$ hat und daß

$$R'_{+}(0) = \cos\alpha$$

ist. Dabei bleibt allerdings für $|\cos\alpha| < 1$ zweifelhaft, welcher der beiden Punkte $e^{\pm i\alpha}$ der singuläre ist. Aber das kann ja nachträglich durch eine Drehung der z-Ebene und nochmalige Anwendung der Formel leicht entschieden werden.

Im folgenden will ich die Mandelbrojtsche Formel auf neue Art herleiten und zugleich zeigen, wie man für $\cos\alpha$ noch beliebig viele ähnlich gebaute Ausdrücke angeben kann, die alle aus einer einheitlichen Quelle fließen, aber doch wesentlich verschieden sind und nicht etwa durch triviale Umformungen ineinander übergeführt werden können.

§ 2.

Vorbereitende Betrachtungen.

Wir gehen aus von einer Potenzreihe

$$z = \varphi(\tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu \tau^\nu, \tag{1}$$

deren Konvergenzradius größer als 1 ist und deren Koeffizienten den Bedingungen

$$\beta_\nu \geqq 0, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu = 1, \quad \beta_1 < 1 \tag{2}$$

genügen. Das Bild des Kreises $|\tau| \leqq 1$ in der z-Ebene enthält dann den Punkt $z = 1$ und sonst nur Punkte im Innern des Einheitskreises. Wenn β_1 nur wenig kleiner als 1 ist, wird der Einheitskreis fast ganz überdeckt; wir wollen voraussetzen, daß jedenfalls der Nullpunkt überdeckt wird, und wollen weiter verlangen, daß es positive Zahlen ξ gibt derart, daß das Bild der Kreislinie $|\tau| = 1 + \xi$ in der z-Ebene eine Jordankurve ist, die den Einheitskreis ganz im Innern enthält. Der Kreis $|\tau| < 1 + \xi$ wird dann durch (1) auf das Innere der Jordankurve konform abgebildet. Ist daher η die untere Grenze der Zahlen ξ, so ist das Bild der Kreislinie $|\tau| = 1 + \eta$ wieder eine Jordankurve, und diese enthält offenbar keinen Punkt im Innern des Einheitskreises, aber wenigstens einen auf der Peripherie; infolgedessen ist natürlich $\eta > 0$. Da die β_ν reell sind, liegen die Jordankurven symmetrisch zur reellen Achse.

Ist nun ρ eine Zahl des Intervalles

$$0 \leqq \rho \leqq \eta, \tag{3}$$

so ist das Bild der Kreislinie $|\tau| = 1 + \rho$ ebenfalls eine Jordankurve C_ϱ, die symmetrisch zur reellen Achse liegt und den Nullpunkt im Innern enthält. Für $\rho_1 < \rho_2$ wird C_{ϱ_1} im Innern von C_{ϱ_2} liegen. Wir setzen voraus, daß jede Kurve C_ϱ ein Sterngebiet begrenzt, d. h. mit jedem vom Nullpunkt ausgehenden Halbstrahl nur einen Punkt oder eine Strecke gemein hat.

Speziell C_0 geht durch den Punkt $z = 1$, enthält aber sonst nur Punkte im Innern des Einheitskreises. C_η enthält nur Punkte außerhalb und auf der Peripherie des Einheitskreises und umschließt den Punkt $z = 1$. Für $0 < \rho < \eta$ enthält C_ϱ sowohl Punkte im Innern als im Äußern des Einheitskreises und umschließt jedenfalls den Punkt $z = 1$. Wir setzen voraus, daß C_ϱ (für $0 < \rho < \eta$) die Peripherie des Einheitskreises nur in zwei Punkten trifft, die natürlich symmetrisch zur reellen Achse liegen und die wir mit $e^{\pm i\alpha_\varrho}$ bezeichnen; es ist $0 < \alpha_\varrho < \pi$. Naturgemäß werden wir noch $\alpha_0 = 0$ setzen, weil C_0 mit der Peripherie des Einheitskreises nur den Punkt $1 = e^{i0}$ gemein hat. Da C_{ϱ_1} für $\rho_1 < \rho_2$ im Innern von C_{ϱ_2} liegt, ist α_ϱ mit ρ monoton wachsend, übrigens auch stetig. C_η hat als Limeskurve der C_ϱ für $\rho \to \eta$ mit der Peripherie des Einheitskreises entweder nur den Punkt -1 oder einen ganzen Bogen mit dem Punkt -1 als Mittelpunkt gemein. Im ersten Fall setzen wir $\alpha_\eta = \pi$, im zweiten Fall $\alpha_\eta = \alpha'$, wenn $e^{\pm i\alpha'}$ die Endpunkte des genannten Bogens sind; in jedem Fall ist übrigens $\alpha_\eta = \lim\limits_{\varrho \to \eta} \alpha_\varrho$.

Wir denken uns jetzt die Koeffizienten β_ν von einem positiven Parameter h abhängig und setzen demgemäß

$$(1') \qquad z = \varphi_h(\tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu(h)\,\tau^\nu.$$

Zu den seitherigen Bedingungen soll dann noch die folgende hinzukommen

$$(4) \qquad \lim_{h\to 0} \beta_1(h) = 1, \quad \text{folglich} \lim_{h\to 0} \beta_\nu(h) = 0 \quad \text{für } \nu \neq 1.$$

Dann wird auch die oben eingeführte Zahl η eine Funktion von h werden, und wir wollen noch die naheliegenden Forderungen stellen:

$$(5) \qquad \lim_{h\to 0} \eta(h) = 0,$$

$$(6) \qquad \lim_{h\to 0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu(h)\,[1+\eta(h)]^\nu = 1.$$

Aus (6) folgt, daß die Kurve C_η und folglich auch alle Kurven C_ϱ ganz in dem Kreis $|z| < 1 + \delta$ verlaufen, wo δ eine beliebig kleine positive Zahl sein darf, wenn nur h klein genug ist.

§ 3.

Allgemeine Formel für die Lage eines speziellen singulären Punktes.

Nunmehr sei

$$(7) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

irgendeine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius 1, also

$$(8) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

Der dem Punkt $z = 1$ am nächsten gelegene singuläre Punkt auf dem Konvergenzkreis sei $z = e^{i\alpha}$, wobei $-\pi \leqq \alpha \leqq \pi$ ist. Wir wollen $\alpha \geqq 0$ annehmen; für $\alpha < 0$ wäre dann einfach die bezüglich der reellen Achse spiegelbildliche Überlegung durchzuführen.

Setzt man in (7) für z die Reihe (1′) ein, so kann man nach Potenzen von τ umrechnen und erhält

$$(9)\qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu \tau^\nu \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tau^n = F(\tau).$$

Die Koeffizienten b_n hängen natürlich ebenso wie die β_ν von h ab: $b_n = b_n(h)$; doch kommt es darauf im Augenblick noch nicht an. Der Konvergenzradius der entstandenen Potenzreihe von τ ist mindestens gleich 1, und zwar ist er gleich 1 oder größer als 1, je nachdem der Punkt $z = 1$ ein singulärer oder regulärer Punkt der Funktion $f(z)$ ist,[1] d. h. also je nachdem $\alpha = 0$ oder $\alpha > 0$ ist. Wir setzen diesen Konvergenzradius gleich $1 + \rho$, so daß

$$(10)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1}{1+\rho}$$

ist. Für $\alpha = 0$ ist dann auch $\rho = 0$, für $\alpha > 0$ auch $\rho > 0$. Anderseits kann aber ρ höchstens gleich der in § 2 eingeführten Zahl η sein, weil sonst das Bild des Kreises $|\tau| < 1 + \rho$ den Einheitskreis $|z| \leqq 1$ ganz im Innern enthalten würde, also einen singulären Punkt von $f(z)$ im Innern hätte, dem ein singulärer Punkt von $F(\tau)$ entsprechen müßte, so daß der Konvergenzradius von $F(\tau)$ kleiner als $1 + \rho$ wäre. Die Zahl ρ erfüllt also die Ungleichungen (3). Die in § 2 eingeführte Jordankurve C_ϱ muß nun einen singulären Punkt von $f(z)$ enthalten, d. h., da sie ein Sterngebiet begrenzen soll, einen Randpunkt des (Mittag-Lefflerschen Haupt-) Sternes von $f(z)$. Im Innern von C_ϱ ist aber $f(z)$ regulär. Daraus folgt sofort, daß der in § 2 eingeführte Punkt $e^{i\alpha_\varrho}$, in dem die Kurve C_ϱ den Einheitskreis schneidet, der Bedingung genügt:

$$(11)\qquad 0 \leqq \alpha_\varrho \leqq \alpha.$$

Nunmehr beachten wir, daß die β_ν von h abhängen. Daher hängt auch ρ von h ab: $\rho = \rho(h)$, ebenso $\alpha_\varrho = \alpha_{\varrho(h)}$ und die Jordankurve $C_\varrho = C_{\varrho(h)}$. Wegen (5) und (3) ist

[1] Vgl. die Arbeit des Verfassers: Über elementare Methoden der analytischen Fortsetzung. Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung **36** (1927) S. 121–26, insbesondere § 2.

(12) $$\lim_{h \to 0} \rho(h) = 0.$$

Wir zeigen jetzt, daß

(13) $$\lim_{h \to 0} \alpha_{\varrho(h)} = \alpha$$

ist, womit für den singulären Punkt $e^{i\alpha}$ eine Formel gefunden ist.

In der Tat, für $\alpha = 0$ ist das wegen (11) trivial. Wenn aber $\alpha > 0$ ist, sei ε eine beliebig kleine positive Zahl ($< \alpha$); dann gibt es eine zugehörige positive Zahl δ derart, daß im Bereich

(14) $$\begin{cases} z = re^{i\varphi} \\ 1 \leqq r \leqq 1 + \delta, \quad -(\alpha - \varepsilon) \leqq \varphi \leqq \alpha - \varepsilon \end{cases}$$

kein singulärer Punkt von $f(z)$ liegt, d. h. kein Randpunkt des (Mittag-Lefflerschen Haupt-) Sternes von $f(z)$. Wenn nun $0 \leqq \alpha_{\varrho(h)} \leqq \alpha - \varepsilon$ wäre, so würde der nicht innerhalb des Einheitskreises verlaufende Teil von C_ϱ mit Rücksicht auf den Schlußsatz des § 2 für hinreichend kleine h ganz im Bereich (14) liegen, so daß auf C_ϱ kein singulärer Punkt von $f(z)$ läge. Daher ist $\alpha_{\varrho(h)} > \alpha - \varepsilon$, wenn nur h klein genug. Diese Ungleichung ergibt aber zusammen mit (11) die Behauptung (13).

§ 4.

Beispiele.

Erstes Beispiel:

$$z = h + (1 - h)\tau.$$

Hier entsprechen den Kreisen der τ-Ebene wieder Kreise in der z-Ebene, und man sieht ohne weiteres, daß alle Bedingungen des § 2 erfüllt sind; insbesondere ist $\eta(h) = \frac{2h}{1-h}$, also (5) und (6) erfüllt. Weiter ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [h + (1-h)\tau]^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tau^n,$$

wobei

$$b_n = (1-h)^n q_n(h) \quad \text{mit } q_n(h) = \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} a_\nu h^{\nu-n}.$$

Nach (10) ist daher, wenn

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|q_n(h)|} = Q(h)$$

gesetzt und statt $\rho(h)$ kürzer nur ρ geschrieben wird,

$$\frac{1}{1+\rho} = (1-h)\, Q(h).$$

Wegen (12) ist dann

$$\lim_{h\to 0} Q(h) = 1.$$

Der Punkt $z = e^{i\alpha_\varrho}$, in dem die Kurve C_ϱ (d. i. $|\tau| = 1+\rho$) den Einheitskreis schneidet, ergibt sich aus der Gleichung

$$|e^{i\alpha_\varrho} - h| = (1-h)(1+\rho) = Q(h)^{-1},$$

$$1 - 2h\cos\alpha_\varrho + h^2 = Q(h)^{-2},$$

$$\cos\alpha_\varrho = \frac{1+h^2-Q(h)^{-2}}{2h} = \frac{h}{2} + \frac{Q(h)-1}{h} \cdot \frac{Q(h)+1}{2\,Q(h)^2}.$$

Daher wegen (13) und weil $\lim\limits_{h\to 0} Q(h) = 1$ ist:

$$\cos\alpha = \lim_{h\to 0} \frac{Q(h)-1}{h} = Q'_+(0).$$

Zweites Beispiel (Mandelbrojtsche Formel):

$$z = \frac{\tau}{1+h-h\tau} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h^\nu}{(1+h)^{\nu+1}} \tau^{\nu+1}.$$

Durch Auflösung nach τ kommt

$$\tau = \frac{(1+h)z}{1+hz}.$$

Auch hier entsprechen den Kreisen in der τ-Ebene wieder Kreise in der z-Ebene, und alle Bedingungen des § 2 sind erfüllt; insbesondere ist wieder $\eta(h) = \frac{2h}{1-h}$, also (5) und (6) erfüllt. Weiter ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau^{n+1} (1 + h - h\tau)^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tau^{n+1},$$

wobei

$$b_n = (1+h)^{-n-1} r_n(h) \text{ mit } r_n(h) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_{n-\nu} h^{\nu}.$$

Nach (10) ist daher, wenn

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|r_n(h)|} = R(h)$$

gesetzt und wieder ρ statt $\rho(h)$ geschrieben wird,

$$\frac{1}{1+\rho} = \frac{1}{1+h} R(h).$$

Wegen (12) ist dann

$$\lim_{h\to 0} R(h) = 1.$$

Der Punkt $z = e^{i\alpha_\varrho}$, in dem die Kurve C_ϱ (d. i. $|\tau| = 1 + \rho$) den Einheitskreis schneidet, ergibt sich aus

$$1 + \rho = \left| \frac{(1+h)e^{i\alpha_\varrho}}{1 + he^{i\alpha_\varrho}} \right| = \frac{1+h}{|1 + he^{i\alpha_\varrho}|},$$

$$|1 + he^{i\alpha_\varrho}| = \frac{1+h}{1+\rho} = R(h),$$

$$1 + 2h \cos\alpha_\varrho + h^2 = R(h)^2,$$

$$\cos\alpha_\varrho = \frac{R(h)^2 - 1 - h^2}{2h} = \frac{R(h) - 1}{h} \cdot \frac{R(h) + 1}{2} - \frac{h}{2}.$$

Daher ist wegen (13) und weil $\lim\limits_{h\to 0} R(h) = 1$ ist:

$$\cos\alpha = \lim_{h\to 0} \frac{R(h) - 1}{h} = R'_+(0).$$

Das ist genau die in § 1 erwähnte Formel von Mandelbrojt.

Drittes Beispiel:

$$z = (1 - h)\tau + h\tau^2.$$

Durch Auflösung nach τ kommt

$$\text{(a)} \qquad \tau = \frac{h - 1 + \sqrt{(1-h)^2 + 4hz}}{2h} = z + (z - z^2)h + h^2 H;$$

dabei bleibt H, ebenso wie später die H_ν, für $|z| = 1$ und hinreichend kleine h beschränkt. Setzt man $z = re^{i\varphi}$, $\tau = Re^{i\omega}$, so ist

$$\text{(b)} \qquad re^{i\varphi} = (1-h)\, Re^{i\omega} + hR^2 e^{2i\omega},$$

und indem man zum Quadrat des absoluten Betrags übergeht,

$$\text{(c)} \qquad \begin{aligned} r^2 &= (1-h)^2 R^2 + 2h(1-h) R^3 \cos\omega + h^2 R^4 \\ &\geqq [(1-h)\, R - hR^2]^2. \end{aligned}$$

Aus (b) folgt weiter

$$\text{(d)} \qquad \log r + i\varphi = i\omega + \log\,[(1-h)\, R + hR^2 e^{i\omega}].$$

Hiernach ist für festes $R < 2$ und hinreichend kleine h annähernd $\frac{d\varphi}{d\omega} = 1$, also wächst φ mit ω. Das besagt aber, daß die Kurven $|\tau| = R$ Jordankurven sind, die ein Sterngebiet begrenzen. Für $R = 1 + 3h$ ist wegen (c), falls h hinreichend klein ist, $r > 1$; also ist $\eta(h) < 3h$, und die Bedingungen (5), (6) des § 2 sind erfüllt. Schließlich folgt aus (c), daß r abnimmt, wenn ω von 0 nach $\pm\pi$ wandert; also schneiden die Kurven C_ϱ (d. h. $|\tau| = 1 + \rho < 1 + 3h$) den Einheitskreis nicht mehr als zweimal. Alle Bedingungen des § 2 sind daher erfüllt.

Nun ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[(1-h)\tau + h\tau^2\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tau^n,$$

wobei

$$b_n = (1-h)^n \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-\nu}{\nu} a_{n-\nu} k^\nu$$

$$= (1-h)^n s_n(k) \quad \text{mit } k = \frac{h}{(1-h)^2}.$$

Nach (10) ist daher, wenn

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|s_n(k)|} = S(k)$$

gesetzt und wieder ρ statt $\rho(h)$ geschrieben wird,

$$\frac{1}{1+\rho} = (1-h)\, S(k).$$

Wegen (12) ist dann, da mit h auch k gegen 0 geht und umgekehrt,

$$\lim_{k\to 0} S(k) = 1.$$

Der Punkt $z = e^{i\alpha_\varrho}$, in dem die Kurve C_ϱ den Einheitskreis schneidet, ergibt sich nach (a) aus

$$\begin{aligned} 1+\rho &= \left| e^{i\alpha_\varrho} + (e^{i\alpha_\varrho} - e^{2i\alpha_\varrho})\, h + h^2 H \right| \\ &= \left| 1 + (1 - e^{i\alpha_\varrho})\, h + h^2 H_1 \right| \\ &= 1 + (1 - \cos\alpha_\varrho)\, h + h^2 H_2. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\frac{1}{S(k)} = (1+\rho)\,(1-h) = 1 - h\cos\alpha_\varrho + h^2 H_3$$

und somit

$$\cos\alpha_\varrho = h H_3 + \frac{S(k)-1}{h\,S(k)} = h H_3 + \frac{S(k)-1}{k} \cdot \frac{k}{h} \cdot \frac{1}{S(k)}.$$

Folglich wegen (13) und weil $\lim S(k) = 1$ und offenbar auch $\lim \frac{k}{h} = 1$ ist:

$$\cos \alpha = \lim_{h \to 0} \frac{S(k) - 1}{k} = S'_+(0).$$

Viertes Beispiel:

$$z = \tau e^{h\tau - h} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{-h} h^{\nu}}{\nu!} \tau^{\nu+1}.$$

Schreibt man diese Formel in der Gestalt

$$h e^{h} z = h \tau e^{h\tau},$$

so folgt durch Funktionsumkehrung

$$h\tau = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} (h e^{h} z)^{\nu},$$

also, da man leicht sieht, daß $\gamma_1 = 1$ und $\gamma_2 = -1$ ist,[1]

$$\text{(a)} \qquad \tau = z + (z - z^2) h + h^2 H;$$

dabei bleibt H, ebenso wie später die H_{ν}, für $|z| = 1$ und hinreichend kleine h beschränkt. Setzt man $z = re^{i\varphi}$, $\tau = Re^{i\omega}$, so ist

$$\text{(b)} \qquad re^{i\varphi} = Re^{i\omega + hRe^{i\omega} - h},$$

also

$$\text{(c)} \qquad r = Re^{hR\cos\omega - h},$$

$$\text{(d)} \qquad \varphi = \omega + hR \sin \omega.$$

Für festes $R < 2$ nimmt, wenn ω von 0 bis π wächst, r wegen (c) ab und φ wegen (d) zu, falls h hinreichend klein. Speziell für $R = 1 + 3h$ ist nach (c), wenn h hinreichend klein,

$$r \geqq (1 + 3h) e^{-h(1+3h) - h} = (1 + 3h) e^{-2h - 3h^2} > 1.$$

---

[1] Übrigens ist allgemein $\gamma_{\nu} = \frac{(-\nu)^{\nu-1}}{\nu!}$, was wir aber nicht brauchen (vgl. Math. Annalen **113** S. 301).

Daher sind die von den Kurven C_ϱ in § 2 geforderten Eigenschaften vorhanden, und es ist $\eta(h) < 3h$, so daß auch die Bedingungen (5), (6) erfüllt sind.

Nun ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nh} \tau^n e^{nh\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tau^n,$$

wobei

$$\begin{aligned} b_n &= e^{-nh} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n-\nu)^\nu}{\nu!} a_{n-\nu} k^\nu \\ &= e^{-nh} t_n(k) \quad \text{mit } k = he^h. \end{aligned}$$

Nach (10) ist daher, wenn

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|t_n(k)|} = T(k)$$

gesetzt wird,

$$\frac{1}{1+\rho} = e^{-h} T(k).$$

Wegen (12) ist dann, weil mit h auch k gegen 0 geht und umgekehrt,

$$\lim_{h\to 0} T(k) = 1.$$

Der Punkt $z = e^{i\alpha_\varrho}$, in dem die Kurve C_ϱ den Einheitskreis schneidet, ergibt sich nach (a) aus

$$\begin{aligned} 1 + \rho &= \left| e^{i\alpha_\varrho} + (e^{i\alpha_\varrho} - e^{2i\alpha_\varrho})\, h + h^2 H \right| \\ &= \left| 1 + (1 - e^{i\alpha_\varrho})\, h + h^2 H_1 \right| \\ &= 1 + (1 - \cos\alpha_\varrho)\, h + h^2 H_2. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\frac{1}{T(k)} = (1+\rho)\, e^{-h} = 1 - h\cos\alpha_\varrho + h^2 H_3,$$

und somit

$$\cos \alpha_{\varrho} = h H_3 + \frac{T(k) - 1}{h T(k)} = h H_3 + \frac{T(k) - 1}{k} \cdot \frac{k}{h} \cdot \frac{1}{T(k)}.$$

Folglich wegen (13) und weil $\lim T(k) = 1$ und offenbar auch $\lim \frac{k}{h} = 1$ ist:

$$\cos \alpha = \lim_{h \to 0} \frac{T(k) - 1}{k} = T'_{+}(0).$$