Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1938. Heft II

Sitzungen Juni-Dezember

München 1938
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Ueber die Häufigkeit der nicht analytisch fortsetzbaren Potenzreihen.

Von Hermann Boerner in München.

Vorgelegt von Herrn C. Carathéodory in der Sitzung vom 5. November 1938.

E. Borel hat vor mehreren Jahrzehnten zuerst einen Satz ausgesprochen, den man später gewöhnlich so formuliert hat: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man die durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion über deren Konvergenzkreis hinaus analytisch fortsetzen kann, ist Null. Mehrere Autoren haben den Inhalt dieses Satzes auf verschiedene Arten mathematisch exakt gefaßt und bewiesen. H. Steinhaus[1] hat zuerst die Wahrscheinlichkeit durch eine Art Lebesguesches Maß definiert; das gelingt, wenn man die Beträge der Koeffizienten der Potenzreihe fest vorgibt und nur die Argumente variiert. Einfacher als Steinhaus kann man seinen Satz so formulieren:

Fast alle Potenzreihen haben ihren Konvergenzkreis zur natürlichen Grenze.

„Fast alle" heißt dabei: bis auf eine Nullmenge bezüglich des zugrunde gelegten Maßes im „Raum" aller betrachteten Potenzreihen. Wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen spart man sich ganz.

B. Jessen[2] hat eine Maß- und Integrationstheorie im „Torusraum" von unendlich vielen Dimensionen entwickelt, die das für unsern Satz naturgemäße Werkzeug darstellt, so daß der Satz und sein Beweis organischer und schöner geworden sind. Eine weitere bedeutende Vereinfachung des Beweises läßt sich erzielen durch die Verwendung der neuen Formel von S. Man-

[1] H. Steinhaus, Über die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist. Math. Zeitschr. *31* (1929), 408—16. Dort findet man die frühere Literatur zusammengestellt.

[2] B. Jessen, The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions. Acta math. *63* (1934), 249–323, insbes. 270 f.

delbrojt[1] für die Lage eines singulären Punktes auf dem Konvergenzkreis. Es erscheint mir nützlich, eine Darstellung des so entstandenen Beweises zu geben, die den Verweis auf die genannten Arbeiten vermeidet. Es wird sich nämlich herausstellen, daß man gar nicht so viel von der Jessenschen Theorie braucht. Der Satz, auf den es ankommt, nämlich, daß eine „S-Menge" (Menge, die von je zwei Punkten, die sich nur in endlich vielen Koordinaten unterscheiden, entweder keinen oder beide enthält), wenn sie meßbar ist, das Maß 0 oder 1 hat, – dieser Satz fließt bei Jessen erst aus der Theorie des Integrals. Ich werde bloß aus den Eigenschaften des äußeren Maßes beweisen: das äußere Maß einer S-Menge ist 0 oder 1. Dazu werde ich die Anfangsgründe der Maßtheorie im Torusraum entwickeln und nur bei den Sätzen, die man im wesentlichen genau so beweist wie bei endlich vielen Dimensionen, die Beweise unterdrücken.[2] Aus der Funktionentheorie werde ich weiter nichts als die Formel für den Konvergenzradius einer Potenzreihe voraussetzen. Meine Darstellung enthält zugleich einen ganz einfachen Beweis nicht der Mandelbrojtschen Formel, wohl aber einer der weiteren von O. Perron[3] aus einem allgemeinen Prinzip hergeleiteten Formeln für singuläre Punkte auf dem Konvergenzkreis.

Ich widme diesen kleinen Beitrag dem Andenken meines Freundes Reinhold Pauli, Student der Mathematik an der Universität München, der in den Bergen geblieben ist, noch ehe seine reiche Begabung der deutschen Wissenschaft zugute kommen konnte. Sein letzter Seminarvortrag war dem hier behandelten Gegenstand gewidmet und bildete den Anlaß, daß ich mich mit ihm beschäftigte.

---

[1] S. Mandelbrojt, Théorème général fournissant l'argument des points singuliers situés sur le cercle de convergence d'une série de Taylor. Comptes rendus de l'Ac. des sc. de Paris *204* (1937), 1456–58.

[2] Jessen bedient sich eines „Übertragungsprinzips"; direkte Beweise für *n* Dimensionen, die sich leicht verallgemeinern lassen, findet man z. B. bei C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen.

[3] O. Perron, Über die Lage eines singulären Punktes auf dem Konvergenzkreis. Sitz.-Ber. Bayr. Akad. d. Wiss., math.-nat. Abt. *1937*, 169–81.

1. $A_0, A_1, A_2, \ldots$ sei eine Folge von nicht negativen Zahlen und es sei

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{A_n} = 1.$$

Wir setzen

$$a_n = A_n \, e^{2\pi i x_n},$$

wo $x_0, x_1, x_2, \ldots$ beliebige reelle Zahlen sind, und betrachten die Funktion

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Durch die Wahl der Zahlenfolge A_n haben wir aus der Gesamtheit aller Potenzreihen mit dem Konvergenzradius 1 eine Klasse herausgegriffen; in dieser Klasse soll jetzt nach Lebesgue ein Maßbegriff eingeführt werden.

2. Maßtheorie im Torusraum. Die Elemente unserer Funktionenklasse entsprechen umkehrbar eindeutig den „Punkten"

$$x = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \tag{1}$$

des unendlichdimensionalen „Torusraumes" $\mathfrak{T}$, dessen Koordinaten modulo 1 zu nehmen sind. Anschaulich kann man sich die Koordinatenachsen auf Kreise der Länge 1 aufgewickelt denken. Wir schreiben

$$\mathfrak{T} = (\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots) \tag{2}$$

und sagen auch: $\mathfrak{T}$ ist das „Produkt" der unendlich vielen Koordinatenkreise $\mathfrak{k}_n$. Allgemeiner ist, wenn $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ lineare Punktmengen mod 1 (Punktmengen auf den Koordinatenkreisen) sind, $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots)$ die Menge aller Punkte x, für die x_n zu $\mathfrak{A}_n$ gehört; (1) und (2) sind Spezialfälle hiervon. Wir betrachten auch „Produkte" von nur zwei Faktoren, indem wir $x' = (x_0, x_1, \ldots, x_N)$, $x'' = (x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots)$ setzen und $x = (x', x'')$ schreiben. So erscheint $\mathfrak{T} = (\mathfrak{T}', \mathfrak{T}'')$ als Produkt des $(N+1)$-dimensionalen Torusraums $\mathfrak{T}' = (\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_N)$ mit

$\mathfrak{X}'' = (\mathfrak{k}_{N+1}, \mathfrak{k}_{N+2}, \ldots)$, und allgemein ist, wenn $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ beliebige Punktmengen aus $\mathfrak{X}'$ bzw. $\mathfrak{X}''$ sind, $(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'')$ die Menge aller Punkte $x = (x', x'')$ mit x' aus $\mathfrak{A}'$ und x'' aus $\mathfrak{A}''$.

Eine Punktfolge $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ heißt konvergent mit dem Grenzpunkt x, wenn $\lim\limits_{\varkappa \to \infty} x_n^{(\varkappa)} = x_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ist.

Ein Intervall ist eine Punktmenge

$$\mathfrak{J} = (\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots),$$

wobei die $\mathfrak{b}_n$ offene Teilbögen der Koordinatenkreise sind, ev. auch der volle Kreis oder der Kreis bis auf einen Punkt, und wo $\mathfrak{b}_n \neq \mathfrak{k}_n$ höchstens für endlich viele n gilt. Daher gilt der Satz: Eine Punktfolge $x^{(\varkappa)}$ konvergiert gegen x dann und nur dann, wenn jedes den Punkt x enthaltende Intervall alle $x^{(\varkappa)}$ bis auf höchstens endlich viele enthält. Die Begriffe „Häufungspunkt", „abgeschlossene" und „offene" Punktmenge usw. lassen sich hiernach in der gewohnten Weise erklären.

Es gelten folgende Überdeckungssätze: Ist jedem Punkt einer Punktmenge $\mathfrak{A}$ ein ihn enthaltendes Intervall zugeordnet, so wird $\mathfrak{A}$ bereits von abzählbar unendlich vielen dieser Intervalle überdeckt (Lindelöf); ist $\mathfrak{A}$ abgeschlossen, so genügen sogar endlich viele (Borel).

Als Inhalt $m\mathfrak{J}$ eines Intervalles $\mathfrak{J}$ wird das Produkt seiner Kantenlängen, d. h. der Länge der $\mathfrak{b}_n$, bezeichnet. Ist eine beliebige Punktmenge $\mathfrak{A}$ mit endlich oder abzählbar unendlich vielen Intervallen $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots$ überdeckt, so ist $\sum\limits_{\nu} m\,\mathfrak{J}_\nu$ eine bestimmte positive Zahl oder ∞. Die untere Grenze dieser Werte für alle möglichen solchen Überdeckungen von $\mathfrak{A}$ heißt das äußere Maß $m^*\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$. Es ist $0 \leqq m^*\mathfrak{A} \leqq 1$.

Ist $\mathfrak{A}$ die Vereinigungsmenge von endlich oder abzählbar unendlich vielen Mengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ so gilt

$$m^*\mathfrak{A} \leqq m^*\mathfrak{A}_1 + m^*\mathfrak{A}_2 + \ldots \tag{3}$$

Ist $\mathfrak{B}$ die Komplementärmenge von $\mathfrak{A}$, so heißt die Zahl $m_*\mathfrak{A} = 1 - m^*\mathfrak{B}$ das innere Maß von $\mathfrak{A}$. Es ist $m_*\mathfrak{A} \leqq m^*\mathfrak{A}$, wie die Anwendung von (3) auf $\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ lehrt.

Stimmen inneres und äußeres Maß einer Punktmenge $\mathfrak{A}$ überein, so heißt $\mathfrak{A}$ meßbar und die Zahl $m^*\mathfrak{A} = m_*\mathfrak{A} = m\mathfrak{A}$ das Maß von $\mathfrak{A}$.

Jedes Intervall $\mathfrak{J}$ ist meßbar, sein Maß ist die schon früher mit $m\mathfrak{J}$ bezeichnete Zahl. Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{B}$ von endlich oder abzählbar unendlich vielen Intervallen $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, ... ist meßbar und natürlich ist

$$m\mathfrak{B} \leqq m\mathfrak{J}_1 + m\mathfrak{J}_2 + \dots \tag{4}$$

3. Ist $\mathfrak{T}' = (\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_1, \dots, \mathfrak{k}_N)$, $\mathfrak{T}'' = (\mathfrak{k}_{N+1}, \mathfrak{k}_{N+2}, \dots)$, so sind die Maßbegriffe für diese Torusräume analog zu definieren.

Satz 1. Ist $\mathfrak{A}'$ eine Punktmenge aus $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{A}''$ eine solche aus $\mathfrak{T}''$, so ist

$$m^*(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'') \leqq m^*\mathfrak{A}' \cdot m^*\mathfrak{A}''.$$

In der Tat, ist $\{\mathfrak{J}'_\mu\} = \{\mathfrak{J}'_1, \mathfrak{J}'_2, \dots\}$ eine Überdeckung (mit endlich oder abzählbar unendlich vielen Intervallen) von $\mathfrak{A}'$, $\{\mathfrak{J}''_\nu\}$ eine solche von $\mathfrak{A}''$, so bilden alle Produkte $(\mathfrak{J}'_\mu, \mathfrak{J}''_\nu)$ eine Überdeckung von $(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'')$ mit der Inhaltssumme $\sum\limits_\mu m\mathfrak{J}'_\mu \cdot \sum\limits_\nu m\mathfrak{J}''_\nu$.

Satz 2. Ist $\mathfrak{A}''$ eine beliebige Punktmenge aus $\mathfrak{T}''$, so ist

$$m^*(\mathfrak{T}', \mathfrak{A}'') = m^*\mathfrak{A}''.$$

Beweis. Falls $\mathfrak{A}''$ meßbar ist, so ist nach (3) und Satz 1, wenn $\mathfrak{B}''$ die Komplementärmenge von $\mathfrak{A}''$ ist,

$$1 \leqq m^*(\mathfrak{T}', \mathfrak{A}'') + m^*(\mathfrak{T}', \mathfrak{B}'') \leqq m\mathfrak{A}'' + m\mathfrak{B}'' = 1,$$

und hieraus folgt die Meßbarkeit von $(\mathfrak{T}', \mathfrak{A}'')$ und die Beziehung $m(\mathfrak{T}', \mathfrak{A}'') = m\mathfrak{A}''$.

Im allgemeinen Fall genügt es (wegen Satz 1), $m^*(\mathfrak{T}', \mathfrak{A}'') \geqq m^*\mathfrak{A}''$ zu beweisen. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen (4) gibt es eine Überdeckung $\{\mathfrak{J}_\nu\}$ von $(\mathfrak{T}', \mathfrak{A}'')$, so daß die Vereinigungsmenge $\mathfrak{B}$ der $\mathfrak{J}_\nu$ der Beziehung

$$m\mathfrak{B} \leqq m^*(\mathfrak{T}', \mathfrak{A}'') + \varepsilon$$

genügt. Wenn es in $\mathfrak{X}''$ eine meßbare Menge $\mathfrak{W}''$ gibt, die $\mathfrak{A}''$ enthält und so, daß $(\mathfrak{X}', \mathfrak{W}'')$ in $\mathfrak{B}$ enthalten ist, dann gilt

$$m^*\mathfrak{A}'' \leqq m\,\mathfrak{W}'' = m(\mathfrak{X}', \mathfrak{W}'') \leqq m\,\mathfrak{B},$$

und somit kann nicht $m^*\mathfrak{A}'' > m^*(\mathfrak{X}', \mathfrak{A}'')$ sein.

Um dieses $\mathfrak{W}''$ zu bekommen, betrachten wir einen Punkt x'' von $\mathfrak{A}''$. Endlich viele der Intervalle $\mathfrak{J}_\nu = (\mathfrak{J}'_\nu, \mathfrak{J}''_\nu)$ überdecken nach Borel die abgeschlossene Menge $(\mathfrak{X}', x'')$. Der Durchschnitt der zugehörigen $\mathfrak{J}''_\nu$ enthält ein Intervall $\mathfrak{J}''$, das x'' enthält, und $(\mathfrak{X}', \mathfrak{J}'')$ ist in $\mathfrak{B}$ enthalten. Jedem Punkt von $\mathfrak{A}''$ wird so ein ihn enthaltendes Intervall $\mathfrak{J}''$ zugeordnet; abzählbar viele davon überdecken nach Lindelöf $\mathfrak{A}''$, und ihre Vereinigung ist die meßbare Punktmenge $\mathfrak{W}''$, die wir brauchten.

Satz 3. Ist $\mathfrak{A}'$ eine meßbare Menge aus $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{A}''$ eine beliebige Menge aus $\mathfrak{X}''$, so ist

$$m^*(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'') = m\,\mathfrak{A}' \cdot m^*\mathfrak{A}''.$$

In der Tat ergibt, wenn $\mathfrak{B}'$ die Komplementärmenge von $\mathfrak{A}'$ bezeichnet, die Anwendung von Satz 1, Satz 2 und Ungleichung (3)

$$\begin{aligned} m^*(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'') + m^*(\mathfrak{B}', \mathfrak{A}'') &\leqq m\,\mathfrak{A}'\,m^*\mathfrak{A}'' + m\,\mathfrak{B}'\,m^*\mathfrak{A}'' \\ = m^*\mathfrak{A}'' = m^*(\mathfrak{X}', \mathfrak{A}'') &\leqq m^*(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'') + m^*(\mathfrak{B}', \mathfrak{A}''). \end{aligned}$$

Die Zeichen $<$ sind hier also zu streichen, und die erste Gleichheit gilt für die Summanden einzeln.

4. Eine Punktmenge aus $\mathfrak{X}$ heiße eine „S-Menge", wenn sie von je zwei Punkten, die sich nur in endlich vielen Koordinaten unterscheiden, entweder beide oder keinen enthält. Alle Punktmengen, die durch irgendeine Eigenschaft der Verteilung der singulären Punkte der zugehörigen analytischen Funktionen auf dem Einheitskreis charakterisiert sind, haben offenbar diese Eigenschaft. Eine S-Menge $\mathfrak{S}$ enthält, wenn N irgendeine natürliche Zahl ist, mit jedem ihrer Punkte (x', x'') ganz $(\mathfrak{X}', x'')$; man kann also für jedes N

$$\mathfrak{S} = (\mathfrak{X}', \mathfrak{S}'') \tag{7}$$

schreiben.

Satz 4. Jede S-Menge $\mathfrak{S}$ ist „von konstanter Dichte", d. h. für jedes Intervall $\mathfrak{J}$ ist das äußere Maß des Durchschnitts $\mathfrak{J}\mathfrak{S}$

$$(8) \qquad m^* \mathfrak{J}\mathfrak{S} = m\mathfrak{J} \cdot m^* \mathfrak{S}.$$

In der Tat ist $\mathfrak{J} = (\mathfrak{J}', \mathfrak{X}'')$ für genügend großes N und daher wegen (7) $\mathfrak{J}\mathfrak{S} = (\mathfrak{J}', \mathfrak{S}'')$ und nach Satz 3 $m^*\mathfrak{J}\mathfrak{S} = m\mathfrak{J}' \cdot m^*\mathfrak{S}''$; es ist aber $m\mathfrak{J} = m\mathfrak{J}'$ und $m^*\mathfrak{S} = m^*\mathfrak{S}''$ nach Satz 2.

Satz 5. Das äußere Maß einer S-Menge $\mathfrak{S}$ ist 0 oder 1.

Beweis. Es sei $m^*\mathfrak{S} = s$, $0 \leqq s \leqq 1$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Überdeckung $\{\mathfrak{J}_\mu\}$ von $\mathfrak{S}$ mit $\sum\limits_\mu m\mathfrak{J}_\mu < s + \varepsilon$. Für jedes $\mathfrak{J}_\mu$ ist $m^*\mathfrak{J}_\mu\mathfrak{S} = m\mathfrak{J}_\mu \cdot s$, und man kann eine Überdeckung $\{\mathfrak{J}_{\mu\nu}\}$ von $\mathfrak{J}_\mu\mathfrak{S}$ finden, so daß $\sum\limits_\nu m\mathfrak{J}_{\mu\nu} < m\mathfrak{J}_\mu(s+\varepsilon)$ ist. Die abzählbar unendlich vielen Intervalle $\mathfrak{J}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots)$ überdecken $\mathfrak{S}$, und es ist

$$s \leqq \sum_{\mu,\nu} m\mathfrak{J}_{\mu\nu} < \sum_\mu m\mathfrak{J}_\mu (s+\varepsilon) \leqq (s+\varepsilon)^2.$$

Daraus folgt $s \leqq s^2$; also ist entweder $s = 0$ oder $1 \leqq s$, also $s = 1$.

5. Eine in $\mathfrak{X}$ definierte reelle oder komplexe Funktion $f(x_0, x_1, \ldots) = f(x)$ heißt stetig an der Stelle x, wenn $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} f(x^{(\varkappa)}) = f(x)$ für jede Punktfolge $x^{(\varkappa)}$ mit dem Grenzpunkt x. Eine reelle Funktion $f(x)$ heißt meßbar, wenn für jede reelle Zahl η die Punktmenge $f(x) \geqq \eta$ meßbar ist[1]; eine komplexe Funktion heißt meßbar, wenn ihr Real- und Imaginärteil meßbar sind. Stetige Funktionen sind meßbar. Mit f ist cf meßbar, wenn c eine Konstante ist. Mit f und g ist $f \cdot g$ meßbar. Mit $f(x)$ ist $\varphi(f(x))$ meßbar, wenn $\varphi(y)$ monoton ist. Sind $f_1(x), f_2(x), \ldots$ meßbare Funktionen, so ist auch $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$ meßbar.

6. Beweis des Hauptsatzes. Betrachten wir wieder die analytische Funktion

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = A_n e^{2\pi i x_n}.$$

[1] Es sind dann auch die Mengen $f(x) \leqq \eta$, $f(x) > \eta$, $f(x) > \eta$ meßbar.

r sei eine natürliche Zahl und β_r irgendein abgeschlossener Teilbogen des Einheitskreises der z-Ebene von der Länge $\frac{2\pi}{r}$. Die Menge $\mathfrak{S}_r$ aller Punkte x des Torusraumes, für die $F(z)$ auf β_r wenigstens einen singulären Punkt besitzt, ist eine $\mathfrak{S}$-Menge. Äußeres und inneres Maß dieser Menge hängen von der speziellen Lage von β_r nicht ab; denn der Drehung um den Winkel ϑ um den Nullpunkt in der z-Ebene entspricht in $\mathfrak{T}$ die „Translation" $x_n \to x_n - \frac{n\vartheta}{2\pi}$, die alle Maße ungeändert läßt. Wir beweisen zuerst:

$$m^*\mathfrak{S}_r = 1. \tag{9}$$

Wegen Satz 5 genügt es, $m^*\mathfrak{S}_r > 0$ zu beweisen. $\beta_r^{(l)}$ sei der Bogen, der aus β_r durch Drehung um den Winkel $\frac{2\pi l}{r}$ hervorgeht. Die Bögen $\beta_r, \beta_r', \ldots, \beta_r^{(r-1)}$ überdecken den Einheitskreis, und weil $F(z)$ für jedes x wenigstens einen singulären Punkt auf dem Einheitskreis besitzt, überdecken die zugehörigen Mengen $\mathfrak{S}_r, \mathfrak{S}_r', \ldots, \mathfrak{S}_r^{(r-1)}$ den Torusraum. Daher ist nach (3)

$$\sum_{l=0}^{r-1} m^*\mathfrak{S}_r^{(l)} = r m^*\mathfrak{S}_r \geqq 1$$

und $m^*\mathfrak{S}_r \geqq \frac{1}{r}$. — Nun beweisen wir:

(10) $\mathfrak{S}_r$ ist meßbar.

Zuerst sei über die Lage von β_r verfügt: es soll sich um den Bogen

$$z = e^{i\varphi}, \quad -\frac{\pi}{r} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{r}$$

handeln. Dann definieren wir, bei vorgegebenem x, einen Winkel α $(0 \leqq \alpha \leqq \pi)$ durch die Bestimmung, daß wenigstens einer der beiden Punkte $e^{\pm i\alpha}$ singulärer Punkt von $F(z)$, dagegen der Bogen

$$z = e^{i\varphi}, \quad -\alpha < \varphi < \alpha$$

von singulären Punkten frei sein soll. Dann ist $\mathfrak{S}_r$ die Punktmenge, auf der $\cos\alpha \geqq \cos\frac{\pi}{r}$ ist. Wir werden fertig sein, wenn wir zeigen, daß $\cos\alpha$ eine meßbare Funktion von x ist.

Offenbar ist $a_n = A_n e^{2\pi i x_n}$ eine meßbare Funktion von x.

Entwicklung von $F(z)$ nach Potenzen von $\zeta = z - h$ $(0 < h < 1)$,

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (\zeta + h)^\nu = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n,$$

ergibt

$$b_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} a_\nu h^{\nu-n}.$$

Offenbar ist b_n für jedes h eine meßbare Funktion von x.

Der Konvergenzradius ρ_h der Reihe $\sum b_n \zeta^n$ ergibt sich aus

$$\frac{1}{\rho_h} = \varkappa_h = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|}\,.$$

Offenbar ist $\varkappa_h$ für jedes h eine meßbare Funktion von x.

$e^{\pm i\alpha_h}$ seien die Schnittpunkte des Konvergenzkreises K_h der Reihe $\sum b_n \zeta^n$ (Mittelpunkt $z = h$, Radius ρ_h) mit dem Einheitskreis in der z-Ebene. Aus der Bedeutung von α folgt $0 \leqq \alpha_h \leqq \alpha$. Wir zeigen zunächst:

$$\lim_{h\to 0} \alpha_h = \alpha.$$

Für $\alpha = 0$ ist nichts zu beweisen; es sei $\alpha > 0$. Ist $0 < \varepsilon < \alpha$, so ist der abgeschlossene Bogen

$$z = e^{i\varphi}, \quad -\alpha + \varepsilon \leqq \varphi \leqq \alpha - \varepsilon$$

von singulären Punkten frei, und es gibt eine Zahl $\delta > 0$ derart, daß das Gebiet

$$z = \rho e^{i\varphi},\ \rho \leqq 1 + \delta, \quad -\alpha + \varepsilon \leqq \varphi \leqq \alpha - \varepsilon$$

von singulären Punkten frei ist. Ich behaupte: für $h < \frac{\delta}{2}$ ist $\alpha_h > \alpha - \varepsilon$. In der Tat liegt dann der Punkt $1 + \delta$ außerhalb des Kreises K_h (der sonst den Einheitskreis nicht treffen würde), und dieser Kreis könnte daher keinen singulären Punkt von $F(z)$ treffen, wenn $\alpha_h \leqq \alpha - \varepsilon$ wäre. — Übrigens ist $1 - h \leqq \rho_h \leqq 1 + h$, woraus $\lim\limits_{h \to 0} \varkappa_h = 1$ folgt.

Nach dem Cosinussatz ist

$$\cos \alpha_h = \frac{1 + h^2 - \rho_h^2}{2h} = \frac{h}{2} + \frac{1}{\varkappa_h^2} \frac{\varkappa_h + 1}{2} \frac{\varkappa_h - 1}{h}$$

und daher

$$\cos \alpha = \lim_{h \to 0} \cos \alpha_h = \lim_{h \to 0} \frac{\varkappa_h - 1}{h},$$

und diese Formel ist auch für $\alpha = 0$ richtig, denn dann ist $\rho_h = 1 - h$.

Also ist $\cos \alpha$ eine meßbare Funktion von x.

Jetzt bezeichnen wir mit $\beta_r^{(l)}$ den Bogen

$$z = e^{i\varphi}, \; \frac{2\pi l}{r} \leqq \varphi \leqq \frac{2\pi(l+1)}{r} \; (r = 1, 2, \ldots; l = 0, 1, \ldots, r-1).$$

(β_r liegt also etwas anders als vorhin.)

$\mathfrak{U}_r^{(l)}$ sei die Menge aller Funktionen (oder Punkte von $\mathfrak{T}$), für die der Bogen $\beta_r^{(l)}$ regulär ist. $\mathfrak{U}_r^{(l)}$ ist die Komplementärmenge von $\mathfrak{S}_r^{(l)}$ und daher nach (9) und (10) eine Nullmenge. Wegen (3) ist die Vereinigungsmenge $\mathfrak{U}$ aller $\mathfrak{U}_r^{(l)}$, als Vereinigung von abzählbar unendlich vielen Nullmengen, ebenfalls eine Nullmenge. $\mathfrak{U}$ ist aber genau die Menge aller Funktionen unserer Klasse, die man über den Einheitskreis hinaus analytisch fortsetzen kann. Also haben fast alle von uns betrachteten Funktionen den Einheitskreis zur natürlichen Grenze.