Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1938. Heft II

Sitzungen Juni-Dezember

München 1938
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Zur Auflösung von Gleichungen fünften und höheren Grades.

Von Ferdinand Lindemann.

Vorgelegt in der Sitzung vom 5. November 1938.

Die nachfolgenden Entwicklungen geben eine wesentliche Ergänzung zu meinem Aufsatze „Elliptische Funktionen und Gleichungen 5. Grades" im Jahrgang 1936 dieser Sitzungsberichte (S. 473 ff.) nachdem in Band 16 des Zentralblattes für Mathematik (1937 S. 242) eine Besprechung dieser Arbeit erschienen ist, in der auf einen scheinbaren (auf angeblich unerlaubter symbolischer Umformung beruhenden) Rechenfehler hingewiesen wird. Es ist mir gelungen, den Beweis für das notwendige identische Verschwinden einer Kovariante P, die auf Seite 478 eingeführt wurde, auf ganz neuem Wege zu führen (vgl. unten § 1), so daß die wesentlichen Resultate meiner Arbeit nicht gestört werden. Diese Resultate halte ich für wesentlich, weil sie zeigen, daß die Auflösung der Gleichungen 5. Grades gelingt, ohne daß es nötig wäre, auf die Theorie des Ikosaeders und der damit zusammenhängenden Gleichungen 6. Grades einzugehen.

Nach einigen Erweiterungen in § 2 und § 3 folgen in § 4 Darlegungen über allgemeine Hilfsmittel und Gesichtspunkte, die für die Auflösung von Gleichungen beliebigen Grades in Betracht kommen, und auf denen die früher von mir gegebene allgemeine Auflösung solcher Gleichungen beruht.

§ 1. Gleichungen 5. Grades.

(Ergänzung zu meiner Abhandlung vom 5. Dezember 1936)

Zunächst mögen die Bezeichnungen erläutert werden; es sei

$$(1)\quad \begin{cases} f = a_x^4 = b_x^4 = \ldots \text{ die Grundform 4. Ordnung,} \\ H = (ab)^2 a_x^2 b_x^2 = (f,f)_2 \text{ deren Hessesche Kovariante,} \\ T = \alpha_x^6 = \beta_x^6 = \ldots = (f,H)_1 \text{ die Kovariante 6. Ordnung,} \\ H_T = (\alpha\beta)^2 \alpha_x^4 \beta_x^4 = (\gamma\delta)^2 \gamma_x^4 \delta_x^4 \text{ die Hessesche Form von } T. \end{cases}$$

Es werde in der Form a_y^4 gesetzt

$$(2) \qquad y_1 = \alpha_x^5\, \alpha_2,\ y_2 = -\alpha_x^5\, \alpha_1;$$

dann ergibt sich (a. a. O. S. 478)

$$(3) \qquad 4\, a_y^4 = 4\, P \cdot T^2 - 4\, P_1 \cdot T \cdot H_T + f \cdot H_T^2,$$

wo $P = (a\alpha)^2\, (a\beta)^2\, \alpha_x^4\, \beta_x^4$, $P_1 = (a\,\alpha)^2\, a_x^2\, \alpha_x^4$. Es handelt sich um die Berechnung von P durch die Invarianten und Kovarianten von f. Nach bekannter Identität ist

$$(4) \qquad 4\, P = [(a\,\alpha)^2\, \gamma_x^2 + (a\gamma)^2\, \alpha_x^2 - (\alpha\gamma)^2\, a_x^2]^2$$

oder, da alle Ausdrücke mit dem symbolischen Faktor $(a\alpha)^4$ identisch Null sind und auch $(\alpha\gamma)^4$ bekanntlich verschwindet:

$$\begin{aligned} 4\, P &= 2\, (a\,\alpha)^2\, (a\gamma)^2\, \alpha_x^2\, \gamma_n^2 - 2\, [(a\,\alpha)^2\, (\alpha\gamma)^2 + (a\gamma)^2\, (\alpha\gamma)^2]\, \alpha_x^2\, \gamma_x^2\, a_x^2 \\ &= 2\, P - 4\, P_2,\ \text{d. h.}\ P = -2\, P_2,\ \text{wo}\ P_2 = (a\,\alpha)^2\, (\alpha\,\gamma)^2\, a_x^2\, \alpha_x^2\, \gamma_x^4, \end{aligned}$$

während ich a. a. O. $P = -P_2$ gefunden hatte. Es liegt dies daran, daß ich auf der rechten Seite von (4) die Summe $(a\alpha)^2\, \gamma_x^2 + (a\gamma)^2\, \alpha_x^2$ vor der Auswertung des Quadrates durch $2\, (a\alpha)^2\, \gamma_x^2$ ersetzte, was bei symbolischer Rechnung nicht erlaubt sein soll.

Für den Inhalt meiner Arbeit ist das Resultat $P = 0$ wesentlich, das ich auf Grund meiner angezweifelten Gleichung $P = -P_2$ gewonnen hatte. Dieses Resultat läßt sich aber auf anderem Wege (d. h. ohne Benutzung der Gleichung $P = -P_2$) ableiten, so daß die weiteren Schlüsse meiner Arbeit durch den gemachten Einwand nicht beeinflußt werden. Dies ist jetzt zu zeigen.

Beim Studium der Kovarianten und Invarianten der Formen des Büschels $\varkappa f + \lambda H$ benutzt Clebsch einen Differentiationsprozeß, der sich auf die Koeffizienten von f bezieht und durch das Zeichen δ angedeutet wird. Auf diese Koeffizienten angewandt, gibt er bekanntlich folgende Resultate:

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\delta f = H,\ \delta i = 2j,\ \delta j = \tfrac{1}{2}\, i^2,\ \delta H = \tfrac{1}{3}\, if, \\ &\delta T = 0,\ \text{also auch}\ \delta y_1 = 0,\ \delta y_2 = 0,\ \delta H_T = 0, \end{aligned}$$

wenn y_1, y_2 durch (2) definiert werden. Für die Form a_y^4 ergibt sich also aus (3)

$$4\,\delta a_y^4 = 4\,H_y^4 = 4\,T^2\,\delta P - 4\,T\,H_T\,\delta P_1 + H \cdot H_T^2,$$

und bei nochmaliger Anwendung:

$$(6)\quad 4\,\delta^2 a_y^4 = 4\,\delta H_y^4 = \tfrac{4}{3}\,i\,a_y^4 = 4\,T^2 \cdot \delta^2 P - 4\,T\,H_T\,\delta^2 P_1 + \tfrac{1}{3}\,i\,f\,H_T^2.$$

Die Form P_1 ist eine Kovariante 6. Ordnung und 4. Grades; als solche muß sie sich als ganze Funktion von f, H, T, i, j darstellen lassen; das ist aber nicht möglich, folglich verschwindet P_1 identisch, wie auch auf Seite 144 in Clebschs „binären Formen" durch Rechnung nachgewiesen ist. Aus (3) und (6) folgt jetzt

$$(7)\qquad 4\,\delta^2 a_y^4 = \tfrac{4}{3}\,i\,a_y^4, \text{ also } \delta^2 P = \tfrac{1}{3}\,i\,P.$$

Es ist P eine Kovariante 8. Ordnung und 7. Grades, und deshalb in der Form

$$(8)\qquad P = N_1 j H^2 + N_2 i^2 H f + N_3 i j f^2$$

darstellbar, wo N_1, N_2, N_3 rein numerische Faktoren sind, deren Werte sich aus (6) ergeben müssen. Man findet mittels (5):

$$\delta P = N_1\left(\tfrac{1}{2}\,i^2 H^2 + \tfrac{1}{3}\,i j H f\right) + N_2\left(i^2 H^2 + 4\,i\,j\,H\,f + \tfrac{1}{3}\,i^3 f^2\right)$$
$$+ N_3\left(2\,i j H f + 2\,j^2 f^2 + \tfrac{1}{2}\,i^3 f^2\right).$$

Bildet man auch $\delta^2 P$, so ergeben sich für die einzelnen Glieder der beiden Seiten der zweiten Gleichung (7) folgende Zahlenfaktoren:

Faktor von

$$i j H^2 \text{ gleich } \tfrac{8}{3} N_1 + 8\,N_2 + 2\,N_3 = \tfrac{1}{3} N_1,$$
$$i^3 H f \text{ gleich } \tfrac{2}{3} N_1 + \tfrac{10}{3} N_2 + 2\,N_3 = \tfrac{1}{3} N_2,$$
$$i^2 j f^2 \text{ gleich } \tfrac{2}{9} N_1 + \tfrac{10}{3} N_2 + \tfrac{17}{3} N_3 = \tfrac{1}{3} N_3,$$
$$j^2 H f \text{ gleich } \tfrac{4}{3} N_1 + 8\,N_2 + 8\,N_3 = 0.$$

Bringt man die rechten Seiten links hinüber, so entstehen 4 lineare homogene Gleichungen für die Zahlen N_1, N_2, N_3, die offenbar nicht miteinander verträglich sind. So folgt aus (8)

(9) $$N_1 = 0,\ N_2 = 0,\ N_3 = 0, \text{ also } P = 0.$$

Es gibt somit keine Kovariante 8. Ordnung und 7. Grades der Form $f = a_x^4$, die der 2. Gleichung (7) genügte.

Die Gleichung (3) wird jetzt

10) $$4\, a_y^4 = a_x^4 \cdot H_T^2,$$

womit die für meine frühere Arbeit von 1936 grundlegende Relation gewonnen ist, so daß alle Folgerungen derselben unverändert bestehen. Meine frühere symbolische Rechnung wird sich deshalb auch rechtfertigen lassen.

[Nachtrag zu § 1.

Da es mir inzwischen gelungen ist, das Verschwinden der Bildungen P und P_2 durch einfache symbolische Rechnung nachzuweisen, und zwar ohne die beanstandete Umformung zu benutzen, möge diese Rechnung hier mitgeteilt werden. Die erste Gleichung auf Seite 479 meiner Arbeit von 1936 lautet ausgeführt:

(I) $$4P = 2P + 2R \cdot \beta_x^6 + Q \cdot a_x^4 - 4P_2,$$

wo: $P = (a\alpha)^2 (a\beta)^2 \alpha_x^4 \beta_x^4$, $R = (a\alpha)^4 \alpha_x^2$, $Q = (\alpha\beta)^4 \alpha_x^2 \beta_x^2$,
$$P_2 = (a\alpha)^2 (\alpha\beta)^2 a_x^2 \alpha_x^2 \beta_x^4.$$

Ich gehe aus von der Differenz $P - R \cdot \beta_x^6$; es ist

$$\begin{aligned} P - R\beta_x^6 &= (a\alpha)^2 \left[(a\beta)^2 \alpha_x^2 \beta_x^2 - (a\alpha)^2 \beta_x^4\right] \alpha_x^2 \beta_x^2 \\ &= (a\alpha)^2 \left[(a\beta)\alpha_x - (a\alpha)\beta_x\right]\left[(a\beta)\alpha_x + (a\alpha)\beta_x\right] \alpha_x^2 \beta_x^4 \\ &= (a\alpha)^2 (\alpha\beta)\left[(a\beta)\alpha_x + (a\alpha)\beta_x\right] \alpha_x^3 \beta_x^4 a_x = R_1 + R_2, \text{ wo:} \end{aligned}$$

(II) $$R_1 = (\alpha\beta)(a\alpha)^2(a\beta)\,\alpha_x^3 \beta_x^4 a_x,\quad R_2 = (\alpha\beta)(a\alpha)^3 \alpha_x^2 \beta_x^5 a_x,$$

und weiter

$$R_1 = (\beta\alpha)(a\beta)^2(a\alpha)\beta_x^3\alpha_x^4 a_x = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta)[(a\alpha)\beta_x - (a\beta)\alpha_x](a\alpha)(a\beta)\alpha_x^3\beta_x^3 a_x^2$$

$$= -\tfrac{1}{4}(\alpha\beta)^2[(a\alpha)^2\beta_x^2 + (a\beta)^2\alpha_x^2 - (\alpha\beta)^2 a_x^2]\, a_x^2\alpha_x^2\beta_x^2$$

$$= -\tfrac{1}{2}(\alpha\beta)^2(a\alpha)^2\alpha_x^2\beta_x^4 a_x^2 + \tfrac{1}{4}(\alpha\beta)^4\alpha_x^2\beta_x^2 a_x^4 = -\tfrac{1}{2}P_2 + \tfrac{1}{4}Q a_x^4.$$

$$R_2 = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta)[(a\alpha)^3\beta_x^3 - (a\beta)^3\alpha_x^3]\,\alpha_x^2\beta_x^2 a_x$$

$$= -\tfrac{1}{2}(\alpha\beta)^2[(a\alpha)^2\beta_x^2 + (a\beta)^2\alpha_x^2 + (a\alpha)(a\beta)\alpha_x\beta_x]\,\alpha_x^2\beta_x^2 a_x^2$$

$$= -P_2 - \tfrac{1}{2}R_3$$

$$R_3 = (\alpha\beta)^2(a\alpha)(a\beta)\alpha_x^3\beta_x^3 a_x^2 = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta)^2[(a\alpha)^2\beta_x^2 + (a\beta)^2\alpha_x^2 - (\alpha\beta)^2 a_x^2]\,a_x^2$$

$$= P_2 - \tfrac{1}{2}Q a_x^4.$$

Also

$$R_2 = -\tfrac{3}{2}P_2 + \tfrac{1}{4}Q a_x^4,$$

und schließlich:

(III) $\qquad P - R\beta_x^6 = R_1 + R_2 = -2P_2 + \tfrac{1}{2}Q a_x^4,$ identisch

mit (I); aber jetzt gewonnen, ohne die Auflösung des Quadrates $[(a\alpha)^2\beta_x^2 + (a\beta)^2\alpha_x^2 - (\alpha\beta)^2 a_x^2]^2$ durchzuführen.

Dieselbe Relation ergibt sich aus der Gleichung (4) S. 479 a. a. O., nämlich zunächst:

$$\begin{aligned}4P &= [(a\alpha)^2\beta_x^2 + (a\beta)^2\alpha_x^2 - (\alpha\beta)^2 a_x^2]^2\alpha_x^2\beta_x^2\\ &= [(a\alpha)^4\beta_x^4 + (a\beta)^4\alpha_x^4 + 2(a\alpha)^2(a\beta)^2\alpha_x^2\beta_x^2 + (\alpha\beta)^4 a_x^4\\ &\qquad - 2(a\alpha)^2\beta_x^2(\alpha\beta)^2 a_x^2 - 2(a\beta)^2\alpha_x^2(a\beta)^2 a_x^2]\,\alpha_x^2\beta_x^2\\ &= 2R\beta_x^6 + 2P + Q a_x^4 - 4P_2.\end{aligned}$$

Vertauscht man aber vor Ausführung des Quadrates der Klammer die Symbole α mit β, so ergab sich:

$$4P = 4R\beta_x^6 - 4P_2 + Q a_x^4;$$

und diese Gleichung hatte ich a. a. O. benutzt. Die Differenz der beiden letzten Gleichungen ist (nach Streichung eines Faktors 2):

$$\text{(IV)} \qquad P - R\beta_x^6.$$

Diese Differenz muß sich gleich Null ergeben. Sie wird:

$$\begin{aligned} P - R\beta_x^6 &= (a\alpha)^2 [(a\beta)^2 \alpha_x^3 - (a\alpha)^2 \beta_x^2]\, \alpha_x^2 \beta_x^4 \\ &= (a\alpha)^2 (\alpha\beta) [(a\beta)\alpha_x + (a\alpha)\beta_x]\, \alpha_x^2 \beta_x^4 a_x = M + N, \end{aligned}$$

wo nun

$$\begin{aligned} M &= -(a\alpha)(\beta\alpha) a_x \beta_x \cdot (a\alpha)(a\beta)\alpha_x^3 \beta_x^3 \\ &= -\tfrac{1}{2}[(a\alpha)^2 \beta_x^2 + (\beta\alpha)^2 a_x^2 - (\alpha\beta)^2 \alpha_x^2]\,(a\alpha)(a\beta)\alpha_x^3\beta_x^3 \\ &= -\tfrac{1}{2}(a\alpha)^3(a\beta)\alpha_x^3\beta_x^5 - \tfrac{1}{2}(\alpha\beta)^2(a\alpha)(a\beta)\alpha_x^3\beta_x^3 a_x^2 + \tfrac{1}{2}(a\beta)^3(a\alpha)\alpha_x^5\beta_x^3 \end{aligned}$$

oder, da sich das erste und das letzte Glied gegenseitig fortheben:

$$\begin{aligned} M &= -\tfrac{1}{4}(\alpha\beta)^2 [(a\alpha)^2 \beta_x^2 + (a\beta)^2 \alpha_x^2 - (\alpha\beta)^2 a_x^2]\, \alpha_x^2 \beta_x^3 a_x^2 \\ &= -\tfrac{1}{2} P_2 + \tfrac{1}{4} Q a_x^4. \end{aligned}$$

$N = (a\alpha)^3 (\alpha\beta)\, \alpha_x^2 \beta_x^5 a_x = R_2$, wenn R_2 wieder durch obige Gleichung (II) definiert wird, also: $N = -\frac{1}{2} P_2 + \frac{1}{4} Q\, a_x^4$, und

$$\text{(V)} \qquad P - R\beta_x^6 = M + N = -P_2 + \tfrac{1}{2} Q\, a_x^4,$$

jetzt ebenfalls gewonnen, ohne die Auflösung des Quadrates der Klammer durchzuführen.

Nach (I) ist aber

$$2(P - RT) = -4 P_2 + Q a_x^4.$$

Zwischen den Ausdrücken $S = P - R\beta_x^6 - \frac{1}{2} Qf$ und P_2 bestehen also die Identitäten nach (V) und (I):

$$2S = -4P_2 = -2P_2$$

d. h. es ist:

$$\text{(VI)} \qquad S = 0 \text{ und } P_2 = 0.$$

Die Gleichung $S = 0$ sagt nach (IV) aus, daß die Gleichungen (I) und (V) miteinander identisch sind. Folglich war meine Rechnung in der Gleichung (4) Seite 379 meiner früheren Arbeit nicht zu beanstanden, und die dort vorgenommene Umformung der Gleichung (I) war gerechtfertigt.

Bei den vorstehenden Rechnungen wurde kein Gebrauch davon gemacht, daß α_x^6 die Kovariante T der biquadratischen Form a_x^4 ist; sie gelten daher für beliebige Formen a_x^4 und α_x^6 (wobei letztere auch durch α_x^n ersetzt werden darf). Ist aber α_x^6 die Kovariante sechster Ordnung der Form vierter Ordnung, so verschwinden bekanntlich die Bildungen R und Q, und es ergibt sich aus (VI)

$$P = 0 \text{ und } P_2 = 0, \text{ w. z. b. w.}$$

Im Oktober 1938.]

§ 2. Verallgemeinerungen.

Es sei α_x^m ($= \beta_x^m = \gamma_x^m \ldots$) eine Kovariante der Form vierter Ordnung und zugleich eine Kombinante des Büschels $\varkappa f + \lambda H$; so ist bekanntlich α_x^m eine Kovariante der Form 6. Ordnung T, genügt also der Gleichung $\delta \alpha_x^m = 0$, wenn wieder δ den bekannten Aronholdschen Prozeß bezeichnet. Da nach § 1 die Bildung $P = (aT)^2 (a T')^2 T_x^4 T_x'^4$ verschwindet, sobald T_x^6 eine Kombinante des Büschels ist, so ist auch

$$(1) \qquad (a \alpha)^2 (a \beta)^2 \alpha_x^4 \beta_x^4 \alpha_t^{m-6} \beta_t^{m-6} = 0$$

für alle Werte von x und t (nämlich als Form P für eine Kombinante 6. Ordnung $\alpha_x^6 \alpha_t^{m-6}$, die von einem willkürlichen Punkte abhängt), also auch:

$$(2) \qquad R = (a \alpha)^2 (a \beta)^2 \alpha_x^{m-2} \beta_x^{m-2} = 0$$

für alle Werte von x. Ebenso ist

$$(3) \qquad R_1 = (a\alpha)^2 a_x^2 \alpha_x^{m-2} = 0.$$

Es besteht daher die Identität

$$(4) \qquad 4 a_y^4 = f \cdot [H_a]^2.$$

wo $f = a_x^4$ und $H_\alpha = (\alpha\beta)^2 \alpha_x^{m-2} \beta_x^{m-2}$ (= Hessesche Form von α_x^m), wenn

(5) $$y_1 = \alpha_x^{m-1} \alpha_2, \; y_2 = -\alpha_x^{m-1} \alpha_1$$

gesetzt wird, oder

(6) $$\alpha_x^{m-1} \alpha_y = 0.$$

Dies ist eine Gleichung $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades in x bei gegebenem y, und sie kann ebenso wie die Gleichung $T_x^5 T_y = 0$ durch elliptische Funktionen gelöst werden, denn es ergibt sich wieder

$$4 a_y^4 = 4 R \cdot [\alpha_x^m]^2 - 4 R_1 \alpha_x^m \cdot H_\alpha + a_x^4 \cdot [H_\alpha]^2,$$

wo H_α die Hessesche Form von α_x^m bedeutet (also von der Ordnung $2(m-1)$ ist), und da R und R_1 verschwinden:

$$(y, dy) = \frac{m-1}{2} H_\alpha \cdot (x, dx),$$

also auch:

(7) $$-(m-1) \int \frac{(x, dx)}{\sqrt{a_x^4}} = \int \frac{(y, dy)}{\sqrt{a_y^4}}.$$

Es gibt somit eine spezielle Gleichung $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades, für welche diese Lösung möglich ist; es bleibt aber vorläufig unbekannt, wie diese Gleichung durch ihre Invarianten-Relationen gegenüber der allgemeinen Gleichung $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades charakterisiert werden kann. Immerhin läßt sich für den Fall $m = 8$ folgendes aussagen. Wählt man als Form α_x^8 die Hessesche Kovariante der Form T_x^6, d. h. der Kovariante 6. Ordnung der Form 4. Ordnung a_x^4, so ist α_x^8 eine Kombinante des Büschels $\varkappa\, a_x^4 + \lambda\, (ab)^2 a_x^2 b_x^2$, so daß die Gleichungen bestehen

$$\delta \alpha_x^8 = 0, \; \delta R = \delta (a\alpha)^2 (a\beta)^2 \alpha_x^6 \beta_x^6 = (H\alpha)^2 (H\beta)^2 \alpha_x^6 \beta_x^6 = 0,$$

$$\delta^2 R = \delta^2 (a\alpha)^2 (a\beta)^2 \alpha_x^6 \beta_x^6 = \tfrac{i}{3} (a\alpha)^2 (a\beta)^2 \alpha_x^6 \beta_x^6.$$

Als Kovariante von a_x^4 muß sich R und $\delta^2 R$ als ganze Funktion von a_x^4, H_x^4 und T_x^6 darstellen lassen; und so könnte man die Gleichung (2) für diesen Fall beweisen; ebenso die Gleichung $R_1 = 0$.

Für die Kovariante 2. Ordnung und 2. Grades der Form 7. Ordnung $\alpha_x^7\,\alpha_y$ gilt eine ähnliche Gleichung, wie in § 1 für $T_x^5\,T_y$. Es sei

$$i_x^2 = (\alpha\beta)^6\,\alpha_x\,\beta_x\,\alpha_y\,\beta_y.$$

Die Identität $(\alpha_x\beta_y - \alpha_y\,\beta_x)^2\,(\alpha\beta)^6 = (xy)^2\,(\alpha\beta)^8$ ergibt hier

$$2\,(\alpha\beta)^6\,\alpha_x^2\,\beta_y^2 - 2\,(\alpha\beta)^6\,\alpha_x\beta_x\alpha_y\beta_y = (\alpha\beta)^8\,(xy)^2. \tag{8}$$

Schon früher habe ich gezeigt,[1] daß die Form α_x^8 als Hessesche von T_x^6 vollständig durch das Verschwinden ihrer 6. Überschiebung charakterisiert werden kann, wie T_x^6 durch das Verschwinden der 4. Überschiebung. Es ist also $(\alpha\beta)^6\alpha_x^2\beta_x^2 = 0$ und durch Polarenbildung

$$2\,(\alpha\beta)^6\,\alpha_x\beta_x\alpha_y\beta_y + (\alpha\beta)^6\alpha_x^2\beta_y^2 = 0,$$

oder

$$6\,i_x^2 = -\,(xy)^2\,(\alpha\beta)^8.$$

Die Kovariante 2. Ordnung und 2. Grades hat also einen doppelt zählenden Nullpunkt, und zwar ist dieser identisch mit dem Punkte y der Transformation 7. Ordnung $\alpha_x^7\alpha_y = 0$.

Will man so weiter gehen und die (mit h_x^{12} bezeichnete) Hessesche Form von α_x^8 zur Transformation benutzen, so führt das zu nichts, denn die Hessesche Form, die von der 12. Ordnung wird, ergibt sich gleich dem Quadrate der Form T_x^6;[2] es würde also

$$h_x^{11}\,h_y = C\cdot T_x^6\cdot T_x^5 T_y.$$

Hingegen kann die Funktionaldeterminante der obigen Form α_x^8 und der Form T_x^6, die auch von der 12. Ordnung ist, zu einer analogen Transformation von a_x^4 benutzt werden. Sie liefert, gleich Null gesetzt, die drei Formen des Büschels $\varkappa a_x^4 + \lambda H_x^4$, denen ein harmonisches Doppelverhältnis zukommt, während die Gleichung $\alpha_x^8 = 0$ die beiden Formen des Büschels mit äquianharmonischem Doppelverhältnis darstellt. Die Funktionaldeterminante der Form 12. Ordnung, welche die 3 harmonischen Qua-

---

[1] Mit Hilfe der typischen Darstellung: Vorlesungen über Geometrie Bd. I erster Teil 2. Aufl. S. 672.

[2] Vgl. a. a. O. sowie Gordan, Math. Annalen Bd. 12 S. 148, 1877.

drupel darstellt, und der Form T_x^6 ist von der 16. Ordnung und bis auf einen Zahlenfaktor gleich

$$(9) \qquad x_1^{16} - 28\, x_1^{12} x_2^4 + 198 x_1^8 x_2^8 - 28\, x_1^4 x_2^{12} + x_2^{16}$$

oder, wenn man $x_1^4 = \xi$, $x_2^4 = \eta$ setzt, gleich

$$\xi^4 - 28\, \xi^3 \eta + 198\, \xi^2 \eta^2 - 28\, \xi \eta^3 + \eta^4 = (\xi^2 - 14\, \xi\, \eta + \eta^2)^2,$$

also das Quadrat einer Form 8. Ordnung, die sich in 2 Formen 4. Ordnung zerlegen läßt. Diese letzteren sind $x_1^4 - (7 \pm \sqrt{48})\, x_2^4$, zerfallen also in je vier lineare Faktoren mit harmonischem Doppelverhältnis. Diese acht Nullpunkte bilden die Hessesche Form von T_x^6, sie liegen harmonisch zu den Nullpunkten von T_x^6, welche Form in der Gestalt $x_1\, x_2\, (x_1^4 + x_2^4)$ angenommen ist. Die Form (9) kann (als vollständiges Quadrat) nicht durch ihre Polarenbildung zur Transformation von a_x^4 benutzt werden.

Ohne genaueres Studium der Formen 7. und 8. Ordnung wird sich hier nicht mehr aussagen lassen (vgl. jedoch Gordan a. a. O.).

§ 3. Anderes analoges Auftreten von Umkehrproblemen der elliptischen Funktionen.

Die in § 1 und in meinem Aufsatze von 1936 zur Lösung einer Gleichung fünften Grades angegebene Methode ist gänzlich verschieden von dem sonst für diesen Zweck eingeschlagenen Wege; denn dieser benutzt zur Lösung der aufgestellten Resolvente sechsten Grades die „elliptischen Modulfunktionen", die von den eigentlichen elliptischen Funktionen, die durch Umkehrung des elliptischen Integrals entstehen, verschieden sind. In letzteren kommt zwar auch der Modul vor, aber als Konstante, nicht als veränderliches Argument, von dem die lösende Funktion abhängt.

Daß die eigentlichen elliptischen Funktionen zur Lösung algebraischer Gleichungen benutzt werden können, kommt auch sonst gelegentlich vor. Bei anderen Untersuchungen[1] ergab sich mir z. B., daß die Gleichung 9. Grades in x

[1] Göttinger Nachrichten Jahrg. 1892 S. 297.

$$36^2(x^3-3x+u)^3(v^2-4)^{\frac{5}{3}}(v-u)^{-\frac{11}{3}}=(10x^4-42x^2+4ux+24)^2$$

gelöst wird durch Umkehrung des elliptischen Integrals:

$$\int_{\infty}^{x}\frac{dx}{\sqrt{x^3-3x+u}}=\int_{\infty}^{v}(v^2-4)^{-\frac{1}{6}}(v-u)^{-\frac{5}{6}}dv;$$

und a. a. O. habe ich ein weiteres Beispiel angegeben.

Auch zur Lösung einer transzendenten Gleichung führt eine Art Umkehrproblem aus der Theorie der elliptischen Funktionen, verwandt mit dem „erweiterten Umkehrproblem" von Clebsch und Gordan; und zwar das folgende:

Gegeben sind die Größen w und w', gesucht werden die Größen p und q, die den Gleichungen

$$\int_{0}^{p}\frac{dp}{\sqrt{P}}+\int_{0}^{q}\frac{dq}{\sqrt{Q}}=w,\qquad \int_{0}^{p}\frac{p^2\,dp}{\sqrt{P}}+\int_{0}^{q}\frac{q^2\,dq}{\sqrt{Q}}=w'$$

genügen, wo $P=A(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)(p-\delta)$, $Q=A\cdot(q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma)(q-\delta)$, während A eine Konstante bezeichnet. Auf Gleichungen dieser Form führt die Behandlung der Planetenbewegung nach der Hamiltonschen Methode. Die Lösung muß sich also auf die Keplersche Gleichung zurückführen lassen. Bezeichnet man die beiden Integrale der ersten Gleichung bis auf additive Konstante mit u und v, so wird die zweite Gleichung unter Benutzung der Jacobischen Bezeichnung:

$$B\left[\Pi(u,\omega)+\Pi(v,\omega)\right]-C\left[Z(u+\omega)+Z(v+\omega)\right]$$
$$+Z(u-\omega)+Z(v-\omega)=w',$$

wo B, C, ω bekannte Konstante sind; und wenn man mittels der Gleichung[1]

$$L\cdot\frac{1-\varkappa^2\sin^2\sigma\cdot\sin^2\vartheta'}{1-\varkappa^2\sin^2\sigma\cdot\sin^2\vartheta}=e^{\psi i}$$

---

[1] Vgl. meinen Aufsatz „Über gewisse Umkehrprobleme aus der Theorie der elliptischen Integrale", diese Sitzungsberichte Bd. 28 Jahrg. 1898 S. 37 ff.

die exzentrische Anomalie Φ einführt, ergibt sich tatsächlich die Keplersche Gleichung $a + \varkappa t = c\,(\Phi - \varepsilon \sin \Phi)$. Hier bedeuten L, $\varkappa$, ϑ, ϑ', a, b, c, ε gewisse Konstante, und es ist $\sigma = \frac{1}{2}(u - v)$; w' ist bis auf eine additive Konstante proportional zur Zeit t, wie es die Hamiltonsche Theorie ergibt.

§ 4. Auflösung der Gleichungen höheren Grades.

Die klassische Methode zur Lösung der Gleichungen 5. Grades, wie man sie Hermite und Kronecker verdankt, war eigentlich ein Zufallsresultat. Man studierte die Eigenschaften der Modulargleichung 6. Grades, die bei der Transformation der elliptischen Funktionen auftritt, und entdeckte, daß sie eine Resolvente 5. Grades besitzt; also mußte eine Gleichung 5. Grades auf diese besondere Gleichung 6. Grades zurückgeführt werden können, wodurch die Lösung der ersteren gefunden war. Auch die oben in § 1 und in meiner früheren Arbeit durchgeführte Lösung der Gleichung 5. Grades war ein Zufallsfund, denn ich versuchte auf gut Glück eine Verallgemeinerung der von Hermite für die Transformation ditter Ordnung angewandten Methode und kam dadurch auf die Transformation $T_y T_x^5 = 0$.

Einen andern Weg schlug Clebsch[1] ein bei seinen Untersuchungen über die geometrische Interpretation quadratischer binärer Transformationen im ternären Gebiete und deren Einfluß auf die Schnittpunkte von geraden Linien mit den Seiten eines geradlinigen Vielseites. Beim Fünfseite kam er auf die Figur des zehnfach'-Brianchonschen Sechsecks, und auf die Transformation einer beliebigen Form 5. Ordnung in die Jerrardsche Form und damit auf den Zusammenhang dieser Form (die Hermite seiner Lösung der Gleichungen 5. Grades zugrunde legte) mit gewissen Formen sechster Ordnung, die sich linear in die Mul-

---

[1] Vgl. Math. Annalen, Bd. 4, 1871; Vorlesungen über Geometrie, Bd. I, 2. Aufl. 1910, S. 741 ff.

Durch einen Vorzeichenfehler in der betr. Relation zwischen den Invarianten der Form 6. Ordnung (den ich a. a. O. S. 755 verbessert habe) tritt bei Clebsch nur die Modulargleichung, nicht auch die Multiplikatorgleichung, als besonderer Fall auf.

tiplikator- oder Modulargleichung bei der Transformation 5. Ordnung der elliptischen Funktionen transformieren lassen.

Denkt man sich diese Konstruktionen in der unendlich fernen Ebene ausgeführt und den Kegelschnitt, dessen lineare Transformationen für die Theorie des Fünfseits studiert wurden, zusammenfallend mit dem imaginären Kugelkreise, projiziert man ferner diese Figur von einem im Endlichen gelegenen Punkte als Mittelpunkt auf eine Kugelfläche, so entstehen aus den Untersuchungen von Clebsch über das Fünfseit diejenigen von Klein über das Ikosaeder.[1] Letztere führen ebenfalls wieder zur Theorie der Auflösung der Gleichungen 5. Grades mit Hilfe der Modulargleichung 6. Grades. Kleins Ausgangspunkt[2] war das Studium der binären Formen mit linearen Transformationen in sich und deren Repräsentation durch Bewegung (besonders Drehung) der regulären Körper. Die weiteren Arbeiten von Klein und Gordan beziehen sich auf besondere Klassen von Gleichungen 7. und 8. Grades.

Das bisher benutzte Verfahren, nach dem man zur Lösung algebraischer Gleichungen die Eigenschaften transzendenter, anscheinend ganz fremdartiger Funktionen heranzog, die zufällig brauchbar waren, hat man natürlich auch sonst als unbefriedigend empfunden.[3]

---

[1] Auf diesen Zusammenhang weist auch Klein hin, Math. Annalen, Bd. 12 S. 543, 1877.

[2] Vgl. Klein, Ikosaeder, S. 26ff., 1884. Diese Gruppen von Kollineationen habe ich auch dargestellt in Bd. II der Vorlesungen über Geometrie (Raum), S. 579 ff., 1891.

[3] Vgl. z. B. Klein, Ikosaeder, S. 136. Wenn hier auf die Poincaréschen Z-Funktionen hingewiesen wird, so ist damit doch wenig erreicht, denn zur wirklichen Aufstellung dieser Funktionen benötigt man noch zahlreiche Hilfsmittel, so daß schließlich ein unbekanntes Problem auf ein anderes, ebenfalls unbekanntes Problem zurückgeführt wird. Ebenso ist es, wenn man das Problem der Zweiteilung der hyperelliptischen Funktion auf die Bestimmung der Wurzeln der für diese Funktionen charakteristischen Irrationalität $\sqrt{a_x^n}$ zurückführt, wie es C. Jordan tat. Das Interesse dieser Zurückführung liegt in der Art, wie sie mittels der Gruppentheorie geführt wird, nicht in dem Resultat, durch das ebenfalls zwei unlösbare Probleme miteinander in Zusammenhang gebracht werden. Auch Tropfke (Geschichte der Elementarmathematik, 1903) betrachtet die Gleichungen beliebigen Grades als durch die Z-Funktionen gelöst. — Da ich 1893 nach München verzog und damit viele neue An-

Zur Verwirklichung der Lösung beliebiger algebraischer Gleichungen ist erforderlich (nach Hermites[1] Formulierung), neue Hilfsvariable einzuführen, um dann die Wurzeln als ebenso viele verschiedene und eindeutige (transzendente) Funktionen dieser Hilfsvariabeln darzustellen.

Die einzige bisher gegebene Lösung der Aufgabe in diesem Sinne ist die von mir 1884[2] gegebene; wenigstens ist mir keine andere bekannt. Dieselbe scheint wenig beachtet zu sein; nur Burkhardt erwähnt sie flüchtig in seiner Darstellung des Inhaltes von Kleins Vorlesung von 1887/88 über hyperelliptische Funktionen erster Ordnung,[3] und Gordan beglückwünschte mich brieflich zur endgültigen Lösung dieses fundamentalen Problems.

Knüpft man an die Θ-Funktionen an, die zur Irrationalität $\sqrt{a_x^n}$ gehören, so ergeben sich die Doppelverhältnisse von je vier Wurzeln aus bekannten Formeln, wie sie z. B. C. Neumann aufgestellt hat;[4] und aus den Doppelverhältnissen sind die Wurzeln von $a_x^n = 0$ zu finden. Um aber die Θ-Funktionen zu bilden, benötigt man die $2p$ $(n = 2p + 2)$ Periodizitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale, und ebenso für die Argumente der benutzten Θ-Funktion, die gleich halben Perioden sind. Diese Perioden werden als Integrale zwischen den Verzweigungspunkten definiert, d. h. zwischen den gesuchten Wurzeln der Gleichung $a_x^n = 0$; und so dreht man sich im Kreise.

Es ist aber von Fuchs ein anderer Weg zur Bestimmung der $n - 2$ Periodizitätsmoduln angegeben.[5] Faßt man nämlich die

---

forderungen an mich herantraten, wurden meine weiteren Ausführungen der beiden kurzen Göttinger Noten von 1884 und 1892 immer verschoben.

[1] Sur la théorie des équations modulaires et la résolution de l'équation du cinquième degré, Paris 1859 (auch Comptes rendus).

[2] Göttinger Nachrichten 1884 und 1892; ich habe darauf auch in Bd. I der „Vorlesungen", 2. Aufl. 1910, S. 673, hingewiesen.

[3] Math. Annalen, Bd. 35, 1890.

[4] Vgl. den Schluß seiner Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale 1865; ich zitiere die 1. Auflage, weil sich diese ausschließlich mit den hyperelliptischen Integralen beschäftigt, die hier allein in Betracht kommen.

[5] Crelles Journal Bd. 71, 1870.

Koeffizienten von a_x^n als rationale Funktionen eines Parameters u auf, so genügen die Perioden einer linearen homogenen Differentialgleichung von der Ordnung $n-2$ mit rationalen Koeffizienten, also einer Gleichung, die man nach der allgemeinen Fuchsschen Theorie solcher Gleichungen vollständig behandeln und für alle Werte der Variabeln nach ganzen Potenzen entwickeln kann. Am einfachsten nimmt man die Koeffizienten als ganze lineare Funktionen von u; die singulären Stellen der Differentialgleichung sind dann diejenigen, für welche die Diskriminante von a_x^n verschwindet. Diese ist vom Grade $2(n-1)$ in den Koeffizienten, also auch in u; die Auffindung der singulären Stellen würde also die Lösung einer Gleichung voraussetzen, die einen höheren Grad hat als die gegebene. Diesen Ansatz mußte ich also aufgeben; in dem Gefühl, daß hier doch eine Möglichkeit bestehen müsse vorwärts zu kommen, untersuchte ich den Grad der Diskriminante in den einzelnen Koeffizienten; und da ergab sich, daß dieser Grad für den letzten Koeffizienten nur gleich $n-1$ sei. Betrachtet man also nur den letzten Koeffizienten a_n als abhängig von u und setzt $a_n = u$, so hängt die Bestimmung der singulären Punkte, der Fuchsschen Differentialgleichung, nur von einer Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ab, deren Lösung als bekannt angenommen werden kann, wenn man eine Gleichung n^{ten} Grades lösen will. Hier liegt das Fundament meiner ganzen Betrachtung. Ich vermag nicht einzusehen, wie man hierin eine Weiterentwicklung des Resultates von C. Jordan (vgl. Burkhardt a. a. O.) sehen kann; eher könnte man von einer Fortentwicklung der Fuchsschen Arbeiten sprechen. Jeder steht doch auf den Schultern seiner Vorgänger und Lehrer. Und zu letzteren rechne ich für mich auch Jordan, dessen Vorlesungen über Substitutionen ich im Winter 1876/77 am Collège de France in Paris hörte. Aber für die wirkliche Lösung von Gleichungen gibt seine Theorie keine Anregung.

Die Berechnung der Koeffizienten der Differentialgleichung geschieht nach Fuchs durch Lösung linearer Gleichungen ohne Einführung irgendeiner Irrationalität. Auch die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung für jeden singulären Punkt und für die Stelle $u = \infty$ ergeben sich als rationale Zahlen. Die gesuchten Perioden sind jetzt lineare homogene Funktionen der $n-2$ ($=2p$) Integrale, deren Koeffizienten durch beiderseitige Entwicklungen nach Potenzen von u oder von $u-\delta$, wenn δ ein singulärer Punkt ist, berechnet werden können. Neben diesen singulären Punkten treten auch „scheinbar singuläre" auf.

Für jedes der Integrale erster Gattung hätte man die $2p$ Perioden so zu berechnen. Wie Fuchs bemerkt, ist die Durchführung nur für eines dieser Integrale notwendig; die Perioden der anderen Integrale ergeben sich dann durch leichte Änderungen.

Hiermit wäre die Lösung der allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades im Prinzipe geleistet, d. h. die Darstellung der Wurzeln durch eindeutige Funktionen eines Parameters, unter Benutzung von Hilfsgleichungen, die nur niedrigeren Grades sind, und von Systemen linearer Gleichungen.

München, Juni 1938.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1938

Band/Volume: 1938

Autor(en)/Author(s): Lindemann Ferdinand

Artikel/Article: Zur Auflösung von Gleichungen fünften und höheren Grades 189-204