Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1939. Heft III

Sitzungen Oktober-Dezember

München 1939
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Zur Axiomatik der reellen projektiven Geometrie III: Beweise des Fano-Axioms F_1 im Rahmen der synthetischen Geometrie.

Von Max Steck in München.

Vorgelegt von Herrn R. Baldus in der Sitzung vom 2. Dezember 1939.

§ 1. Einleitung.

1. Mit den Axiomen des in seiner „Synthetischen Geometrie"[1] angegebenen, gemeinsam mit mir erarbeiteten Axiomensystems der reellen, projektiven Geometrie[2] ist es 1935 H. Liebmann gelungen, sämtliche Anordnungsaxiome II. 1–II. 4 (in der Hilbertschen Fassung[3]) zu beweisen.[4] Diese Beweise stützten sich in der Hauptsache auf das für den Ausbau der Kegelschnittlehre grundlegende *E.P.-Axiom*,[5] das „*einmal die Existenz ‚innerer' (elliptischer) Punkte* (e. P.) *als Träger eines Büschels von lauter Treffgeraden fordert, außerdem aber, daß es außer hyperbolischen*

[1] Leipzig-Berlin 1934.

[2] Dieses Axiomensystem umfaßte folgende Axiome: a) Die Verknüpfungsaxiome I. 1–I. 8 (in der Hilbertschen Fassung in Grundl. d. Geom. 7. Aufl. 1930 S. 3–4), I. 9*, I. 10*; b) die zuerst von Fano aufgestellten Axiome $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$, die einerseits die Krummlage der Nebenecken des vollständigen Vierecks, andererseits die Existenz (abzählbar) unendlich vieler Punkte der Geraden (durch wiederholte Konstruktion harmonischer Punkte) sichern; c) die Vertauschungsaxiome $\mathbf{V}_1$ und $\mathbf{V}_2$, die die Vertauschbarkeit der Punkte in einem Pascalschen Sechseck fordern (s. meine Diss.: Das Zeuthensche Postulat und das Prinzip der Vertauschung zur Begründung der projektiven Geometrie, Heidelberg 1932) und sowohl zu den Beweisen des Desarguesschen Satzes, des Pappus-Pascalschen Satzes und des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie dienen, als auch zur (projektiven) Erzeugung der Kegelschnitte hinüberführen; d) E.P.-Axiom und e) S.K.-Axiom, das zum Aufbau der Theorie der Kegelschnittbüschel gebraucht wird. (Die beiden letzteren Axiome sind die sog. „*schwachen Stetigkeitsaxiome*" des Axiomensystems.)

[3] Grundl. d. Geom. (7. Aufl.), Leipzig-Berlin 1930.

[4] Beweise der Anordnungsaxiome im Rahmen der synthetischen Geometrie, Math. Anm. **111** (1935), 64–67.

[5] a. a. O. Anm. 1 S. 37.

und parabolischen Punkten, d. h. Punkten ‚außerhalb' und ‚auf' dem Kegelschnitt, *nur noch e.P. gibt.* Hierdurch erst wird auch die *Existenz elliptischer Involutionen* (z. B. der Paare konjugierter Geraden durch einen e. P.) gewährleistet." (Wörtliche Anführungen aus der unter Anm. 4 genannten Originalarbeit von H. Liebmann, S. 64.) — Durch diesen Nachweis der Anordnungsaxiome als beweisbarer Sätze ist die Tragweite des E.P.-Axioms und seine Bedeutung für die projektive Geometrie erkannt worden: *Sämtliche Anordnungsaxiome und -Tatsachen sind im Rahmen des genannten Axiomensystems entbehrlich.*

1936 ist es mir dann gelungen, das (dem Desarguesschen Satz äquivalente) Vertauschungsaxiom $\mathbf{V_1}$ aus dem Vertauschungsaxiom $\mathbf{V_2}$, das seinerseits dem Pappus-Pascalschen Satze gleichwertig ist, mit den ebenen Verknüpfungsaxiomen I. 1–I. 5, I.9*, I. 10* zu beweisen.[6] *Damit wurde das genannte Axiomensystem um ein Axiom reduziert.* Gleichzeitig war damit auch das bekannte axiomatische Ergebnis Hessenbergs,[7] die Herleitung des Desarguesschen Satzes aus dem Pappus-Pascalschen Satze, ein Beweisgang, der auch in die neueste Auflage der Hilbertschen „Grundlagen" fast wörtlich Aufnahme gefunden hat,[8] erneut auf ganz anderem Wege (nämlich als geometrisch-axiomatische Anwendung der Gruppentheorie) gesichert worden.

Ziel und Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist es, das *erste Fanosche Axiom* $\mathbf{F_1}$[9] von der Krummlage der Nebenecken jedes vollständigen Vierecks mit Hilfe der Axiome des genannten Axiomensystems zu beweisen. Auch dieser Beweis stützt sich in der Hauptsache auf das E.P.-Axiom (s. oben) und zeigt erneut

---

[6] Die Abhängigkeit der Vertauschungsaxiome und das Hessenbergsche Ergebnis (Geometrische Axiomatik als Gruppentheorie), Deutsche Math. **1** (1936) S. 165–174.

[7] Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen, Math. Ann. **61** (1905) 161–172.

[8] a. a. O. Anm. 3 S. 111–114.

[9] Siehe G. Fano, Sui postulati fondamentali della geometria projettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni, Giorn. di Mat. **30** (1892) 106–132 und: O. Veblen und J. W. Young, Projective Geometry I (London 1916) 45, *H_0-Axiom* ($\equiv \mathbf{F_1}$); G. Fano, Osservazioni su alcune „geometrie finite", Note I, Rend. d. R. Accad. naz. dei Linc., **26** (6) (1937), 55–60.

und zusammen mit dem (oben angegebenen) Liebmannschen Ergebnis dessen Tragweite. *Damit ist dann das genannte Axiomensystem um ein weiteres* (zweites) *Axiom reduziert.*

2. Dieses *Fanosche Axiom* $\mathbf{F}_1$ lautet:[10]

$\mathbf{F}_1$: „*Seien A, B, C, D vier Punkte einer Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Dann liegen die drei Punkte*

$$(AB)\times(CD) = E,\ (AC)\times(BD) = F,\ (AD)\times(BC) = G$$

(*Nebenecken* des vollständigen Vierecks)

nicht kollinear.[11]

Auf Grund der nachfolgenden Beweise von $\mathbf{F}_1$ (s. § 2 und § 3) kann auch $\mathbf{F}_1$ *als Axiom* in den oben genannten Liebmannschen Beweisen der Anordnungsaxiome II. 1–II. 4 (s. Anm. 4) unterdrückt werden. Ferner kann diese Formulierung von $\mathbf{F}_1$, wie wir unter Nr. **4** darlegen, als „*Formulierung für den Einzelfall*" angesehen werden, d. h. seine Aussage kann auf ein einziges, bestimmtes vollständiges Viereck $\{A, B, C, D\}$ bezogen werden.

3. Im § 3 dieser Arbeit gelingt es sogar, $\mathbf{F}_1$ noch unter schwächeren axiomatischen Voraussetzungen zu beweisen. Einem,

---

[10] a. a. O. Anm. 1 S. 7.

[11] Über seine Beweisbarkeit mit Hilfe gewisser Axiome liegen eine Reihe von Aussagen vor, die aber in der Hauptsache nur zeigen, mit welchen Axiomen $\mathbf{F}_1$ nicht bewiesen werden kann. Vgl. dazu: M. Pieri, Sui principî che reggono la geometria di posizione, Nota II, Torino Atti **31** (1896) 387 und im Anschluß daran: M. Pasch, Zur projektiven Geometrie, Math. Ann. **48** (1897) 111–112. Daß $\mathbf{F}_1$, obwohl seine Aussage, was nach Baldus „axiomatisch bemerkenswert" ist, keine Anordnungs-, sondern eine reine Verknüpfungstatsache in Evidenz setzt, weder aus den ebenen, noch auch aus den ebenen und räumlichen Verknüpfungsaxiomen folgt, ist bewiesen bei: a) Heffter-Koehler, Lehrb. d. analyt. Geom. **I** (Karlsruhe 1930), 14 (Zusatz); b) R. Moufang, Zur Struktur der projektiven Geometrie der Ebene, Math. Ann. **105** (1931), 552; c) R. Baldus, Ein Axiomensystem der komplexen projektiven Geometrie, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss. (math.-nat. Abt.), Jahrg. 1932, § 4. – Die vollständigen axiomatischen Beweismittel von $\mathbf{F}_1$, die zum Beweise auch hinreichen, nennt u. W. nur R. Baldus in: Zur Axiomatik der Geometrie IV: Über die Tragweite des Axioms von Pasch, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss. (math.-nat. Abt.) Jahrg. 1934, 160/61, Satz 9 unter d). Eine explizite Durchführung eines Beweises von $\mathbf{F}_1$ mit Angabe der axiomatischen Beweismittel innerhalb eines bestimmten Axiomensystems ist uns nicht bekannt geworden.

durch eine meiner Arbeiten[12] bereits implizierten Gedanken von O. Bottema folgend,[13] wurde die Forderung des E.P.-Axioms (s. oben) abgeschwächt derart, daß man axiomatisch nur die Existenz *eines einzigen* elliptischen Punktes in der Ebene eines (nicht entarteten) Kegelschnitts $\mathbf{K}_2$ fordert. Dieses sogenannte „*schwache E.P.-Axiom*" haben wir in einer kleinen Note,[14] die zeigt, daß die Liebmannschen Beweise der Anordnungsaxiome II. 1–II. 3 (dagegen nicht der des einschneidenden Paschschen Dreiecksaxioms II. 4) auch unter Zugrundelegung des schwachen E.P.-Axioms geführt werden können, folgendermaßen formuliert:

Schwaches E.P.-Axiom:

„*Außer parabolischen und hyperbolischen Punkten gibt es in bezug auf jeden nicht zerfallenden Kegelschnitt* $\mathbf{K}_2$ *noch mindestens einen elliptischen Punkt. — Der Punkt heißt „elliptisch", wenn alle durch ihn gehenden Geraden Treffgeraden des* $\mathbf{K}_2$ *sind, d. h. zwei (verschiedene) Punkte mit ihm gemein haben.*"

---

[12] Zur Axiomatik der reellen, ebenen, projektiven Geometrie II: Die Unabhängigkeit des E.P.-Axioms und des S.K.-Axioms von den Verknüpfungsaxiomen, Monatsh. f. Math. u. Phys. **46** (1937) 93–121.

[13] Zur Axiomatik der projektiven Geometrie, ebenda **47** (1939) 234–239. – In dieser Arbeit gibt Herr Bottema *analytische* Beweisführungen für meine unter der Anm. 12 genannten, rein geometrisch geführten Unabhängigkeitsbeweise, die natürlich den Vorzug der Kürze haben. Es darf aber vielleicht in diesem Zusammenhang einmal auf das Prinzipielle des Vorworts der „Synthetischen Geometrie" von H. Liebmann hingewiesen werden, um so mehr, als die meisten Axiomatiker Geometrie als angewandte Algebra treiben und diese Methode offenbar für die einzig richtige, „elegante" und insofern „moderne" halten. Zu Beginn dieses Vorworts heißt es: „Die neuere synthetische Geometrie will . . . die Reinheit der Methode wahren: Keine Kongruenzsätze, keine Messungen, nur Lage und Sicht! – Auch ästhetische Gesichtspunkte wurden hervorgehoben, um ihre mit unersetzbarer Eindringlichkeit geometrische Einsicht fordernden, aber manchmal als umständlich und eigensinnig empfundenen Beweise gegen den billigen Vorwurf zu rechtfertigen: „Das alles ließe sich ja viel bequemer ausrechnen." – Auch ungerechtfertigt ist dieser Vorwurf insofern, als die analytische Geometrie ihre breitere Grundlage mit einer viel weiter ausgreifenden Axiomatik erkauft."

[14] Das schwache E.P.-Axiom und die Beweise der Anordnungsaxiome, Math. Ann. **117** (1940). (erscheint demnächst.)

Wir zeigen im § 3, daß das Fanosche Axiom $\mathbf{F}_1$ sogar schon bei Benützung des schwachen E.P.-Axioms beweisbar ist.

4. Die nachfolgenden Beweise der Sätze **1** und **2** beschränken sich auf den „*Einzelfall*", d. h. sie werden nur je für ein bestimmtes, allgemeines (sogar noch weitgehend beliebiges) vollständiges Viereck {A, B, C, D} geführt. Daß dies bereits genügt, hat R. Baldus gezeigt.[15] In dieser Arbeit wurde nämlich S. 169 ff. bewiesen, „*daß, je nachdem die drei Nebenecken eines einzigen vollständigen Vierecks kollinear sind oder nicht, dasselbe bei jedem vollständigen Viereck der Fall ist.*" Dieser Nachweis gelingt allein mit den Verknüpfungsaxiomen I. 1–I. 8 (in der Baldusschen Fassung, S. 159–163), die an inhaltlichen Forderungen über die Verknüpfungsaxiome I. 1–I. 8 (in der Hilbertschen Fassung, wie wir sie hier zugrunde gelegt haben), dazu I. 9* (in der Liebmannschen Fassung), nicht hinausgehen, sondern durch Trennung von Existential- und Relationsaussagen nur eine schärfere und axiomatisch zwingendere Fassung darstellen. *Es genügt demzufolge auch,* $\mathbf{F}_1$ *für den Einzelfall zu formulieren* und die obige Liebmannsche Fassung von $\mathbf{F}_1$ (s. Nr. **2**) als solche anzusehen.

§ 2. Beweis des Fano-Axioms $\mathbf{F}_1$ mit Benützung des E.P.-Axioms

5. Wir behaupten also jetzt den

Satz 1: *Das Fano-Axiom* $\mathbf{F}_1$ *von der Krummlage der Nebenecken jedes vollständigen Vierecks kann mit den folgenden Axiomen:*
a) Verknüpfungsaxiome I. 1–I. 8, I. 9, I. 10*;*
b) Vertauschungsaxiom $\mathbf{V}_2$;
c) E.P.-Axiom
bewiesen werden.

Beweis: Es sei $\mathbf{K}_2$ ein beliebiger (für den Beweis aber fester), nicht zerfallender Kegelschnitt (I. 1–I. 8, I. 9*, I. 10*, Ver-

[15] Ein Axiomensystem der komplexen projektiven Geometrie, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss. (math.-nat. Abt.) Jahrg. 1932, 149–191, insbes. S. 169ff.

tauschungsaxiom $\mathbf{V}_2$) und F ein *elliptischer* Punkt von $\mathbf{K}_2$ (E.P.-Axiom). Man lege durch F zwei beliebige Sekanten von $\mathbf{K}_2$, die $\mathbf{K}_2$ in den (verschiedenen) Punkten A und C bzw. B und D treffen mögen (E.P.-Axiom). A, B, C, D seien dann die im Fanoschen Axiom $\mathbf{F}_1$ (s. Nr. **2** und Nr. **4**) vorkommenden, ein Viereck bildenden Punkte. Der Punkt F ist also (nach I. 9*) bestimmt als:

$$F = (AC) \times (BD).$$

Dann ist in Liebmanns „Synthetischer Geometrie" mit Hilfe des E.P.-Axioms bewiesen (s. Anm. 1 S. 37), „daß es in bezug auf $\mathbf{K}_2$ außer Tangenten (parabolische Geraden) und Treffgeraden (elliptische Geraden) nur noch eine Klasse von Geraden gibt, die „hyperbolischen" Geraden, deren Punkte sämtlich hyperbolische Punkte sind". (Wörtliche Anführung.) Es sind dies nämlich die Polaren der elliptischen Punkte, denn alle Geraden durch einen e. P. sind ja Treffgeraden (nach E.P.-Axiom); also enthält der Ort ihrer Tangenten-Scheitelpunkte, d. h. seine Polare (*Definition der Polare*), nur hyperbolische Punkte.

Insbesondere ist also die Polare des elliptischen Punktes F die hyperbolische Gerade h, auf der auch (nach $\mathbf{V}_2$) die (untereinander und von F verschiedenen, I. 9*) Punkte

$E = (AB) \times (CD)$ und $G = (AD) \times (BC)$ (s. $\mathbf{F}_1$, Nr. **2**, Nr. **4**) liegen (I. 1, I. 2). E, F, G sind aber die Nebenecken des vollständigen Vierecks $\{A, B, C, D\}$ und, da alle Punkte von $h = (EG)$ hyperbolische Punkte sind, insbesondere E und G, kann der als elliptisch vorausgesetzte Punkt F nicht auf der Geraden h liegen. Daher bilden E, F, G ein Dreieck, bekanntlich ein Polardreieck in bezug auf $\mathbf{K}_2$, womit das Fano-Axiom $\mathbf{F}_1$ bewiesen ist (s. Nr. **4**).

§ 3. Beweis des Fano-Axioms $\mathbf{F}_1$ mit Benütznng des schwachen E. P.-Axioms

6. Wir behaupten den folgenden, eine Verschärfung von Satz **1** darstellenden

Satz 2: *Das Fano-Axiom* $\mathbf{F}_1$ *von der Krummlage der Nebenecken jedes vollständigen Vierecks kann mit den folgenden Axiomen:*

a) Verknüpfungsaxiome I. 1–I. 8, I. 9, I. 10*;*

b) Vertauschungsaxiom $\mathbf{V}_2$;
c) schwaches E.P.-Axiom
bewiesen werden.

Beweis: Der Beweis verläuft, wie man sich überlegt, analog wie derjenige des § 2, wenn man nur stets „E.P.-Axiom" durch „schwaches E.P.-Axiom" ersetzt und unter dem durch das letztere existentiell garantierten elliptischen Punkt von $\mathbf{K}_2$ den Punkt F versteht. Dann gibt es auch nach dem schwachen E.P.-Axiom die hyperbolische Gerade h = (EG) als Polare von F in bezug auf $\mathbf{K}_2$, woraus wie im § 2 und bei Benützung des unter Nr. **4** genannten Baldusschen Ergebnisses das Fano-Axiom $\mathbf{F}_1$ als beweisbarer Satz folgt.

7. Schlußbemerkung. Im Anschluß an die Darlegungen von Nr. **4** sei es erlaubt, der Arbeit noch einige kurze Bemerkungen beizufügen. R. Baldus hat in der unter Anm. 15 genannten Arbeit gezeigt, daß es bei geeignetem Aufbau eines Axiomensystems der projektiven Geometrie genügt, als geometrische Elemente *allein die „Punkte"* zugrunde zu legen, „Gerade" und „Ebene" aus ihnen als abgeleitete Begriffe zu gewinnen. Dieses Verfahren hat, neben seiner unbedingten Natürlichkeit und Zwanglosigkeit, in der Euklidischen Geometrie zusammen mit der Voranstellung der Anordnungsaxiome im Axiomensystem axiomatisch weitreichende, prinzipielle Folgen: *Es werden hierdurch insgesamt sechs Verknüpfungsaxiome* (im Hilbertschen Sinne) *entbehrlich, obwohl sie mit den übrigen Axiomen des Axiomensystems nicht beweisbar sind.* Diese grundlegende Einsicht und ihren Beweis hat ebenfalls R. Baldus gewonnen.[16]

Benützt man dieses Ergebnis für die vorliegende Untersuchung, so kann man bei alleiniger Zugrundelegung der „Punkte" als Konstruktionselemente der synthetischen Geometrie, Modifizierung der Verknüpfungsaxiome im Baldusschen Sinne (s. oben) und bei Voranstellung des Vertauschungsaxioms $\mathbf{V}_2$ und des E.P.-Axioms, [aus denen nach dem Vorgang

---

[16] Siehe die Arbeiten: Über nicht beweisbare und doch entbehrliche Axiome, Math. Zeitschr. **44** (1938) 321–329 und: Zur Axiomatik der Geometrie V: Vereinfachung des Hilbertschen Axiomensystems der Euklidischen Geometrie, Sitz.-Ber. d. bayer. Ak. d. Wiss. (math.-nat. Abt.) Jahrg. 1937, 189–228.

von H. Liebmann bekanntlich die Hilbertschen Anordnungsaxiome II. 1–II. 4 folgen (s. Anm. 4)] bzw. des schwachen E.P.-Axioms [woraus (nach Anm. 14) die *linearen* Anordnungsaxiome II. 1–II. 3 folgen], *sogar noch das erste Fanosche Axiom* $\mathbf{F_1}$ (von der Krummlage der Nebenecken jedes vollständigen Vierecks) *unter Einsparung der von R. Baldus als entbehrlich nachgewiesenen (s. oben) Hilbertschen Verknüpfungsaxiome beweisen und damit das so modifizierte Axiomensystem* [der synthetischen Geometrie, s. Anm. 1 und 2] *um ein weiteres Axiom reduzieren.*

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1939

Band/Volume: 1939

Autor(en)/Author(s): Steck Max

Artikel/Article: Zur Axiomatik der reellen ebenen projektiven Geometrie. Beweise des Fano-Axioms F1 im Rahmen der synthetischen Geometrie 269-276