Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1940. Heft II/III
Sitzungen Juli-Dezember

München 1940
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

...ie u. Wissenschaften

Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren II.

Komprimierte Gitterpunktmengen.

Mit 3 Tafeln und 7 Figuren im Text*.

Von **Heinrich Tietze** in München.

Vorgetragen in der Sitzung vom 1. Juni 1940.

Inhalt.

		Seite
§ 1.	Einleitung	70
§ 2.	Zusammenhang mit Aufgaben über Partitionen	71
§ 3.	Deckungsmenge und komprimierte Hülle	74
§ 4.	Die Eckpunkte einer komprimierten Gitterpunktmenge	85
§ 5.	Elementarer Umbau einer zweidimensionalen komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}_m^2$. Stammbaum der Mengen $\mathfrak{K}_m^2$ vom gleichen Grad m	88
§ 6.	Elementarer Umbau einer dreidimensionalen komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}_m^3$	93
§ 7.	Der Hauptsatz über den Umbau dreidimensionaler komprimierter Gitterpunktmengen	98
§ 8.	Stammbäume für die Mengen $\mathfrak{K}_m^3$ vom gleichen Grad m	101
§ 9.	Beweis des Hauptsatzes	106
§ 10.	Rekursionsformeln für Anzahlen gewisser Gitterpunktmengen	115

---

* Herr Dr. Karl Seebach hat, wie in früheren Fällen, die Freundlichkeit gehabt, die Herstellung eines Teiles dieses Figurenmateriales zu übernehmen, was aber wegen seiner anderweitigen dienstlichen Inanspruchnahme erst einige Zeit nach der Sitzung, in der diese Abhandlung vorgelegt wurde, geschehen konnte. Inzwischen habe ich die Gelegenheit benützt, einige Ergänzungen am Manuskript anzubringen. Sie betreffen einmal die auf beliebige Grundmengen $\mathfrak{F}$ bezüglichen Anmerkungen 13, 17, 19, 22, 23, 25 sowie die Nummern **14**, **15** in § 3, ferner eine Überarbeitung der §§ 4 bis 9, wo auch eine kleine Lücke in der ursprünglichen Darstellung (Inhalt von Nr. **45**) auszufüllen war, schließlich eine gewisse Ausgestaltung des § 10. Doch habe ich, — entgegen zeitweiliger Absicht — davon Abstand genommen, den § 3 durch Zugrundelegung einer beliebigen Grundmenge $\mathfrak{F}$ anstelle des $\mathfrak{R}^n$ umzugestalten, was zu stärkeren Abänderungen gegenüber dem ursprünglichen Manuskript geführt hätte.

München, im September 1940. d. V.

§ 1. Einleitung.

1. Eine Punktmenge $\mathfrak{K}$ des n-dimensionalen Raumes $\mathfrak{R}^n$ mit den cartesischen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ möge „komprimiert" heißen, wenn mit jedem zu $\mathfrak{K}$ gehörenden Punkt $X^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ auch jeder von X^0 „gedeckte" Punkt X zu $\mathfrak{K}$ gehört, d. h. jeder Punkt $X = (x_1, \ldots, x_n)$, für den die Ungleichungen $x_1 \leqq x_1^0, \ldots, x_n \leqq x_n^0$ gelten. Ebenso soll, wenn $\mathfrak{F}$ irgend eine Punktmenge des $\mathfrak{R}^n$ ist (beispielsweise der Bereich $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$), unter einer „komprimierten Menge $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{F}$" (oder „komprimierten Menge $\mathfrak{K}$ des Teilraumes $\mathfrak{F}$") eine solche Teilmenge $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{F}$ verstanden werden, daß zugleich mit jedem zu $\mathfrak{K}$ gehörenden Punkt X^0 auch jeder von X^0 gedeckte Punkt X aus $\mathfrak{F}$ ebenfalls zu $\mathfrak{K}$ gehört.

Nimmt man für $\mathfrak{F}$ die Menge $\mathfrak{P}$ aller Gitterpunkte des $\mathfrak{R}^n$ (Punkte mit ganzzahligen Koordinaten), so erhält man die Definition der komprimierten Menge von Gitterpunkten: eine solche Menge ist gekennzeichnet dadurch, daß mit jedem Gitterpunkt auch jeder von ihm „gedeckte" Gitterpunkt zur Menge gehört.

2. Im Folgenden haben wir es aber vor allem mit dem Fall zu tun, daß für $\mathfrak{F}$ die Menge $\mathfrak{Q}$ der Gitterpunkte des $\mathfrak{R}^n$ mit durchwegs positiven Koordinaten genommen wird; ferner werden nur solche komprimierte Teilmengen von $\mathfrak{Q}$ auftreten, die nur endlich viele Gitterpunkte enthalten.

Wenn also weiterhin (§ 2, §§ 4 ff.) kurz von einer „komprimierten Gitterpunktmenge" $\mathfrak{K}$ gesprochen wird, so ist eine endliche Anzahl m von Gitterpunkten mit positiven Koordinaten gemeint, so daß zugleich mit $X^0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ auch jeder Gitterpunkt $X = (x_1, \ldots, x_n)$ zu $\mathfrak{K}$ gehört, dessen Koordinaten die Ungleichungen $0 < x_\nu \leqq x_\nu^0$ erfüllen. Dabei heiße m der Grad von $\mathfrak{K}$.

3. Es werde nun für festgewählte Werte der Dimension n und des Grades m die Gesamtheit $\Gamma^n(m)$ aller komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^n$ dieser Dimension und dieses Grades betrachtet. Es bestehen dann zwischen diesen Mengen $\mathfrak{K}_m^n$ gewisse Übergangsmöglichkeiten durch schrittweise Verlagerung einzelner Gitterpunkte oder Gruppen von Gitterpunkten; und diese Übergänge (die wir als „Umbau" bezeichnen und in dem noch

zu erwähnenden besonderen Fall $n = 2$ als „Aufbau" oder „Abbau" bezeichnet haben) hängen zusammen mit gewissen Ordnungsbeziehungen zwischen den Gitterpunktmengen gleicher Dimension und gleichen Grades.

Der besondere Fall $n = 2$ wurde an anderer Stelle bereits behandelt[1], wobei die erwähnten Ordnungsbeziehungen als Ordnungsbeziehungen zwischen den verschiedenen Partitionen der Gradzahl m auftraten. Wir kommen auf diesen Fall in etwas geänderter Darstellung in § 5 zurück. Weiterhin sollen uns die entsprechenden Fragen für mehr Dimensionen beschäftigen[2], wobei wir uns jedoch in dieser Note mit dem Fall $n = 3$ begnügen. So, wie l. c. [1] für die $\mathfrak{R}_m^2$, ergeben sich auch für die $\mathfrak{R}_m^3$ Anordnungen nach Art von „Stammbäumen" (§§ 6–9). Doch soll vorher (§ 2) noch auf den Zusammenhang unseres Gegenstandes mit gewissen Aufgaben über Partitionen hingewiesen werden.

In § 3 finden einige allgemeine Betrachtungen über komprimierte Punktmengen Platz. Dabei wird auf analoge Betrachtungen über konvexe Punktmengen hingewiesen (Nr. **16**). Doch ist § 3 für das Spätere entbehrlich, da das speziell für komprimierte Gitterpunktmengen Erforderliche in § 4 gesagt ist.

Eine an früherer Stelle erwähnte Rekursionsformel für Anzahlen von Partitionen gestattet mancherlei Verallgemeinerungen für gewisse komprimierte Gitterpunktmengen, wovon im letzten § 10 die Rede ist.

§ 2. Zusammenhang mit Aufgaben über Partitionen.

4. In dem in Nr. **2** erklärten Sinne sei $\mathfrak{R}$ eine n-dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge vom Grad m. Sei μ eine positive ganze Zahl. Dann werde mit $a_\mu^{(\nu)}$ die Anzahl der Gitterpunkte von $\mathfrak{R}$ bezeichnet, die der Ebene $x_\nu = \mu$ angehören ($1 \leqq \nu \leqq n$). Offenbar ist

[1] Monatshefte für Mathematik u. Physik, **49** (1940), „Über symmetrische Funktionen von endlich oder abzählbar unendlich vielen Veränderlichen", §§ 4–7, S. 3–25.

[2] Auf diese mehrdimensionale Verallgemeinerung wurde gelegentlich bereits hingewiesen; vgl. l. c. [1], Nr. **22**, S. 7–8, insbesondere Anm. 42, 43.

$$a_{\mu}^{(\nu)} \geqq a_{\mu+1}^{(\nu)}$$

und

$$a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \ldots = m,$$

also sicher $a_{\mu}^{(\nu)} = 0$ für $\mu > m$, sodaß wir für jedes ν nur die Zahlen $a_1^{(\nu)}, \ldots, a_m^{(\nu)}$ zu berücksichtigen brauchen, die wegen $a_1^{(\nu)} + \ldots + a_m^{(\nu)} = m$ eine „Partition" von m darstellen[3]; diese Partition werde mit

$$(a_1^{(\nu)}, \ldots, a_m^{(\nu)}) = \mathfrak{A}^{(\nu)}$$

bezeichnet[3a] (oder auch mit $\mathfrak{A}^{(\nu)}(\mathfrak{K})$, wenn die Zugehörigkeit zu $\mathfrak{K}$ besonders hervorzuheben ist; vgl. Nr. 48). Erinnern wir uns der l. c. [3] (in Nr. 2) besprochenen Aufgabe, — wir nannten sie die Aufgabe $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$, — zu n vorgegebenen Partitionen $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \ldots, \mathfrak{A}^{(n)}$ der Zahl m ein System von m Gitterpunkten zu finden, sodaß in der Ebene $x_\nu = \mu$ genau $a_{\mu}^{(\nu)}$ Gitterpunkte liegen[4], dann sehen wir, daß diese Aufgabe sicherlich dann (mindestens) eine Lösung hat, wenn die Partitionen $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ in der eben beschriebenen Weise aus einer komprimierten Gitterpunktmenge hergeleitet sind, da diese Gitterpunktmenge ja dann gerade eine Lösung der Aufgabe liefert. Wird, wie l. c., mit $N(\mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$ die Anzahl der Lösungen der Aufgabe $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$ bezeichnet, so gilt also der

Satz 1. Wenn die Partitionen $\mathfrak{A}', \ldots, \mathfrak{A}^{(n)}$ (in der eben angegebenen Weise) aus einer komprimierten Gitterpunktmenge hergeleitet sind, dann ist

$$N(\mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)}) \geqq 1. \tag{1}$$

---

[3] Vgl. die vorhergehende Note „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren I. Rekursionsformeln", diese Sitz.ber. (1940), S. 23 ff.

[3a] Wenn spezielle Zahlenwerte für die $a_{\mu}^{(\nu)}$ in einer Partition $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ gegeben sind, dann läßt man die auftretenden Nullen meist fort und schreibt beispielsweise $\mathfrak{A}^{(\nu)} = (2, 1, 1)$ anstelle von $(2, 1, 1, 0)$. So schreibt man, wenn $a_1^{(\nu)} = m$, $a_{\mu}^{(\nu)} = 0$ für $2 \leqq \mu \leqq m$ ist, einfach $\mathfrak{A}^{(\nu)} = (m)$. Bisweilen schreibt man auch abgekürzt $(2, 1^2)$ für $(2, 1, 1)$, $(6^2, 1)$ für $(6, 6, 1)$, (1^m) für $(1, 1, \ldots, 1)$; vgl. l. c. [3], S. 31, Anm. 9.

[4] Aus Gründen, die hier nicht von Belang sind, wurde l. c. die Dimensionszahl nicht mit n, sondern mit $n + 1$ bezeichnet.

5. Bemerkenswerter Weise gilt im Falle $n = 2$ in (1) stets das Gleichheitszeichen, wie aus den Überlegungen l. c. [1] hervorgeht[5]. Im Falle $n = 2$ geht nämlich aus einer komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{R}_m^2$ stets ein Paar „konjugierter Partitionen" hervor und umgekehrt gehört jedes Paar konjugierter Partitionen zu einer bestimmten komprimierten Gitterpunktmenge. Der Satz[6], daß $N(\mathfrak{A}' \mid \mathfrak{A}'')$ dann (und nur dann) gleich 1 ist, wenn $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ einander konjugiert sind, bedeutet also genau das, was wir über das Gleichheitszeichen in (1) im Falle $n = 2$ gesagt haben.

6. Für $n > 2$ liegen die Dinge aber anders. Man kann nämlich für jedes $n \geqq 3$ ein n-dimensionales komprimiertes Gitterpunktsystem angeben, sodaß für die aus ihm hergeleiteten Partitionen $\mathfrak{A}', \ldots, \mathfrak{A}^{(n)}$ sich $N(\mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)}) > 1$ ergibt[7]. Um dies zunächst für $n = 3$ zu sehen, greifen wir zurück auf ein l. c. [3], Nr. **16** angeführtes Beispiel. Jede der beiden in den dortigen Figuren 4 und 5 dargestellten[8] Gitterpunktmengen vom Grad 13 ist nämlich offenbar komprimiert und führt auf dieselben Partitionen $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}''' = (7, 4, 2)$. Da jede der beiden Figuren eine Lösung von $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}' \mid \mathfrak{A}'' \mid \mathfrak{A}''')$ darstellt, ergibt sich $N(\mathfrak{A}' \mid \mathfrak{A}'' \mid \mathfrak{A}''') \geqq 2$, wobei übrigens das Gleichheitszeichen gilt, da außer diesen beiden Lösungen, wie l. c. gezeigt, keine weitere existiert.

Ist aber $n > 3$, so möge $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}''' = (7, 4, 2)$ gesetzt werden und $\mathfrak{A}^{(\nu)} = (13)$ für $4 \leqq \nu \leqq n$. Es ist[9] dann $N(\mathfrak{A}' \mid \mathfrak{A}'' \mid \mathfrak{A}''' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)}) = N(\mathfrak{A}' \mid \mathfrak{A}'' \mid \mathfrak{A}''') = 2$; damit ist

---

[5] Darüber hinaus gilt die Umkehrung: Wenn $N(\mathfrak{A}' \mid \mathfrak{A}'') = 1$ ist, so gibt es eine zweidimensionale komprimierte Gitterpunktmenge, aus der $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ herzuleiten sind; vgl. l. c. [6].

[6] Vgl. l. c. [1], Satz VII, S. 9, bzw. die Teilaussagen (m), (n) und (ϕ), S. 25, 26 und 27.

[7] Darüber, daß überhaupt für $n \geqq 3$ nicht die einfachen Verhältnisse vorliegen, wie für $n = 2$ durch die Beziehung der komprimierten Gitterpunktmengen zu den Paaren konjugierter Partitionen, vgl. auch Nr. **34**, Anm. 72.

[8] Diese beiden Gitterpunktmengen findet man (zusammen mit anderen) auch dargestellt in Tafel II, u. zw. auf den kleinen Teilfiguren, die sich in der Mitte der Tafel in den mit A und B bezeichneten Rechtecken finden; vgl. Nr. **34**, Anm. 71.

[9] Gemäß der l. c. [3], Nr. **12**, angegebenen Formel (8).

unsere Behauptung nachgewiesen, daß für kein $n \geqq 3$ in (1) das Zeichen $\geqq$ allgemein durch das Zeichen $=$ ersetzt werden kann[9a].

§ 3. Deckungsmenge und komprimierte Hülle.

7. In Nr. 1 wurde die Definition der „komprimierten Menge in $\mathfrak{F}$" gegeben, wobei die „Grundmenge" $\mathfrak{F}$ irgend eine Teilmenge des $\mathfrak{R}^n$ (unter Zulassung des Falles $\mathfrak{F} = \mathfrak{R}^n$) sein konnte[10]. Beim Studium dieser komprimierten Mengen in $\mathfrak{F}$ bleiben nicht zu $\mathfrak{F}$ gehörige Punkte überhaupt außer Betracht, sodaß beispielsweise der Begriff der abgeschlossenen Hülle einer Menge $\mathfrak{M}\,(\subseteq \mathfrak{F})$ relativ zur Grundmenge $\mathfrak{F}$ verstanden werden soll[11]: als abgeschlossene Hülle $a\,(\mathfrak{M})$ werde also die Vereinigung von $\mathfrak{M}$ mit der Menge aller in $\mathfrak{F}$ liegenden Häufungspunkte von $\mathfrak{M}$ bezeichnet[12].

Doch wollen wir uns — bis auf einige gelegentliche Bemerkungen — in dieser Note auf die beiden Fälle beschränken, daß $\mathfrak{F} = \mathfrak{R}^n$ oder daß $\mathfrak{F}$ gleich der Menge $\mathfrak{Q}$ der Gitterpunkte des $\mathfrak{R}^n$ mit positiven Koordinaten ist. Der Fall $\mathfrak{F} = \mathfrak{R}^n$ soll in diesem § 3 besprochen werden.

[9a] Ein über diese Aussage hinausgehendes Resultat wurde in der Sitzung vom 6. Juli 1940 mitgeteilt; vgl. diese Sitz.ber., 1940, S. 9*, Punkt 2.

[10] Im Folgenden soll eine Formel wie

$$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F} \text{ bzw. } \mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$$

oder

$$\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{M} \text{ bzw. } \mathfrak{F} \supset \mathfrak{M}$$

in üblicher Weise bedeuten, daß die Punktmenge $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge der Punktmenge $\mathfrak{F}$ ist, wobei im ersten Fall auch $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ zugelassen ist, nicht aber im zweiten Fall, wo $\mathfrak{M}$ „echte" Teilmenge von $\mathfrak{F}$ sein soll.

Gegenüber einer zeitweise aufgekommenen, etwas abweichenden Symbolik scheint diese ursprüngliche und vorteilhaftere Bezeichnungsweise (vgl. hierüber etwa Enc. III AB 13, Bd. III, I. Teil, 2. Hälfte, S. *160*, Anm. 33a) Geltung zu behalten.

[11] Wegen der hier hereinspielenden Übertragung topologischer Begriffe von einem Raum auf einen Teilraum möge auf die in Enc. III AB 13, Anm. 10b und 26a genannten Stellen bei F. Hausdorff (1914) und L. Vietoris (1921) hingewiesen werden.

[12] Wegen dieser, von der üblichen Bezeichnung $\overline{\mathfrak{M}}$ abweichenden Bezeichnung $a\,(\mathfrak{M})$ für die abgeschlossene Hülle vgl. Anm. 24.

8. Wir beweisen zunächst

Satz 2. Ist $\mathfrak{K}$ eine komprimierte Punktmenge des n-dimensionalen Raumes $\mathfrak{R}^n$, dann ist auch ihre abgeschlossene Hülle $a(\mathfrak{K})$ komprimiert[13].

Ist nämlich $X = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Punkt aus $a(\mathfrak{K})$, ferner $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ und $y_\nu \leqq x_\nu$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Punkt $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ aus $\mathfrak{K}$ mit $|z_\nu - x_\nu| < \varepsilon$. Da dann für $w_\nu = z_\nu + y_\nu - x_\nu \leqq z_\nu$ der Punkt $W = (w_1, \ldots, w_n)$ zu $\mathfrak{K}$ gehört und $|w_\nu - y_\nu| < \varepsilon$ ist, gehört Y zu $a(\mathfrak{K})$.

9. Sei $\mathfrak{K}$ eine komprimierte Punktmenge des $\mathfrak{R}^n$. Ein Punkt $X' = (x_1', \ldots, x_n')$ des $\mathfrak{R}_n$ möge als ein „Deckungspunkt" oder „Dachpunkt" von $\mathfrak{K}$ bezeichnet werden, wenn er die folgenden beiden Eigenschaften hat:

I) X' gehört zu $a(\mathfrak{K})$,

II) kein von X' verschiedener den Bedingungen $x_1 \geqq x_1'$, $\ldots\ldots$, $x_n \geqq x_n'$ genügender Punkt $X = (x_1, \ldots, x_n)$ gehört zu $a(\mathfrak{K})$.

In unserem Falle $\mathfrak{F} = \mathfrak{R}^n$ (und analog in allen Fällen, wo Satz 2 gilt) ließe sich offenbar I) auch ersetzen durch die Forderung, daß jeder von X' gedeckte (d. h. den Bedingungen $x_\nu \leqq x_\nu'$ genügende) Punkt zu $a(\mathfrak{K})$ gehört, während II) besagt, daß X' selbst durch keinen anderen Punkt von $a(\mathfrak{K})$ gedeckt wird. Natürlich braucht, wenn $\mathfrak{K}$ nicht abgeschlossen ist, ein Deckungspunkt X' von $\mathfrak{K}$ nicht selbst zu $\mathfrak{K}$ gehören.

Die Menge aller Deckungspunkte (Dachpunkte) von $\mathfrak{K}$ möge die „Deckungsmenge" oder das „Dach" von $\mathfrak{K}$ heißen und mit $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathfrak{K})$ bezeichnet werden. Hiezu drei Beispiele:

---

[13] Daß dieser für die Grundmenge $\mathfrak{F} = \mathfrak{R}^n$ gültige Satz nicht für jede beliebige Grundmenge $\mathfrak{F}$ gilt, mag folgendes Beispiel zeigen: $n = 2$, $\mathfrak{F}$ bestehe aus allen Punkten der Geraden $y = x$ und dem Punkt $(-1, 0)$, $\mathfrak{K}$ bestehe aus den Punkten $y = x$, $x < 0$; dann entsteht $a(\mathfrak{K})$ aus $\mathfrak{K}$ durch Hinzunahme des Punktes $(0, 0)$; die Menge $a(\mathfrak{K})$ ist dann, weil sie nicht $(-1, 0)$ enthält, nicht komprimiert.

Hingegen gilt Satz 2 in trivialer Weise allemal, wenn $\mathfrak{F}$ eine „isolierte Menge" (eine Menge isolierter Punkte) des $\mathfrak{R}^n$, beispielsweise wenn $\mathfrak{F} = \mathfrak{Q}$ ist, da dann für jede Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ stets $a(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ ist.

Beispiel 1): Sei $\mathfrak{K}$ die Menge aller Punkte $x_1 + \ldots + x_n \leqq 1$; dann besteht $\mathfrak{D}$ aus allen Punkten $x_1 + \ldots + x_n = 1$.

Beispiel 2): Sei $\mathfrak{K}$ die Menge aller Punkte $x_1 < 1, \ldots, x_n < 1$; dann besteht $\mathfrak{D}$ aus dem einen Punkt $(1, \ldots, 1)$.

Beispiel 3): Sei die Dimensionszahl $n \geqq 2$ und sei $\mathfrak{K}$ die Menge aller Punkte mit wenigstens einer Koordinate $x_\nu \leqq 0$; dann enthält $\mathfrak{D}$ überhaupt keinen Punkt.

Man sieht sofort, daß sich die Deckungsmenge $\mathfrak{D}(\mathfrak{K})$ einer komprimierten Menge $\mathfrak{K}$ nicht ändert, wenn man $\mathfrak{K}$ ersetzt durch die (gemäß Satz 2 ebenfalls komprimierte) abgeschlossene Hülle $a(\mathfrak{K})$ von $\mathfrak{K}$, d. h. es gilt

Satz 3. Ist $\mathfrak{K}$ eine komprimierte Menge des $\mathfrak{R}^n$ und $a(\mathfrak{K})$ ihre abgeschlossene Hülle, so ist[14] $\mathfrak{D}(a(\mathfrak{K})) = \mathfrak{D}(\mathfrak{K})$.

Bei Betrachtungen über $\mathfrak{D}(\mathfrak{K})$ kann man sich also auf abgeschlossene Mengen $\mathfrak{K}$ beschränken. In Beispiel 2) hätte man also ohne wesentliche Änderung statt $\mathfrak{K}$ auch die durch $x_1 \leqq 1, \ldots, x_n \leqq 1$ definierte Menge $\mathfrak{L}$ nehmen können.

Sei noch eine weitere Bemerkung an unsere Beispiele angeknüpft. Offenbar hätten wir für $\mathfrak{D}$, genau so wie im Beispiel 3), die leere Menge erhalten, wenn wir für $\mathfrak{K}$ die Menge aller Punkte mit wenigstens einer Koordinate $x_\nu \leqq 1$ (oder überhaupt irgend eine aus ihr durch Parallelverschiebung sich ergebende Menge) genommen hätten. Schon hieraus sieht man, daß es Fälle gibt, in denen eine komprimierte Menge $\mathfrak{K}$ durch ihre Deckungsmenge nicht bestimmt ist (und zwar auch dann nicht, wenn man überdies verlangt, daß $\mathfrak{K}$ abgeschlossen sein soll). Ein weiteres Beispiel hiefür erhält man, wenn man die Vereinigungsmenge $\mathfrak{B}$ der Menge $\mathfrak{K}$ des Beispiels 3) und der Menge $\mathfrak{L} = a(\mathfrak{K})$ des Beispiels 2) nimmt: die Deckungsmenge $\mathfrak{D}(\mathfrak{B})$ besteht genau wie $\mathfrak{D}(\mathfrak{L})$ aus dem einzigen Punkt $(1, \ldots, 1)$.

Im Gegensatz zu diesen Fällen werden wir sehen (vgl. Nr. **13**, Satz 6), daß gewisse – einer zusätzlichen Bedingung genügende – komprimierte Mengen $\mathfrak{K}$ tatsächlich durch ihre Deckungsmenge bestimmt sind.

---

[14] Überhaupt ist $\mathfrak{D}(\mathfrak{K}_1) = \mathfrak{D}(\mathfrak{K})$ für jede komprimierte Menge $\mathfrak{K}_1$, für die $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}_1 \subseteq a(\mathfrak{K})$ gilt.

10. Sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige Punktmenge des $\mathfrak{R}^n$ und $k(\mathfrak{M})$ der Durchschnitt aller komprimierten Mengen $\supseteq \mathfrak{M}$. Dann ist $k(\mathfrak{M})$ selbst komprimiert und $\supseteq \mathfrak{M}$ und kann als die „kleinste" $\mathfrak{M}$ enthaltende komprimierte Menge angesprochen werden. Man mag $k(\mathfrak{M})$ als „komprimierte Hülle" oder als „komprimierte Füllung" von $\mathfrak{M}$ bezeichnen, ersteres in Anlehnung an die bekannten von Herrn Carathéodory eingeführten Bezeichnungen „abgeschlossene Hülle" und „konvexe Hülle"[15]. Da bei diesem Vervollständigungsprozeß $\mathfrak{K} = k(\mathfrak{M})$ aus $\mathfrak{M}$ erzeugt wird, soll $\mathfrak{M}$ eine „erzeugende Menge" von $\mathfrak{K}$ genannt werden.

Es ist offenbar

$$k(\mathfrak{M}) \supseteq k(\mathfrak{N}), \text{ wenn } \mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{N}. \tag{2}$$

Bezeichnet ferner $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ die Vereinigung zweier Mengen $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, sowie $\mathfrak{S}(\mathfrak{M})$ die Vereinigung einer beliebigen Gesamtheit von Mengen $\mathfrak{M}$, so ist, wie leicht zu sehen,

$$k(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) = k(\mathfrak{M}_1) + k(\mathfrak{M}_2) \tag{3}$$

und allgemein

$$k(\mathfrak{S}(\mathfrak{M})) = \mathfrak{S}(k(\mathfrak{M})). \tag{4}$$

Insbesondere ist also $k(\mathfrak{M})$ die Vereinigung aller durch die Ungleichungen $x_\nu \leqq x'_\nu$ definierten Mengen $k(\{X'\})$, wenn $X' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ alle Punkte von $\mathfrak{M}$ durchläuft und $\{X'\}$ die aus dem einen Punkt X' bestehende Menge bedeutet:

$$k(\mathfrak{M}) = \mathfrak{S}(k(\{X'\})), \text{ wenn } \mathfrak{M} = \mathfrak{S}(\{X'\}). \tag{5}$$

---

[15] Ich möchte, wenn nicht eine so gewichtige Präzedenz dem entgegenstünde, hier fast der Bezeichnung „Füllung" den Vorzug geben, da es sich um eine Ausfüllung und Vervollständigung von $\mathfrak{M}$ zwecks Herstellung der Komprimiertheit handelt (wie übrigens analog auch bei der abgeschlossenen bzw. konvexen Hülle eine Vervollständigung bezüglich Abgeschlossenheit bzw. Konvexheit vorliegt), also um etwas anderes als um den Schutz nach außen, — nämlich in unserem Falle gegen Einwirkungen aus den nichtnegativen Richtungen; diesen Schutz (auf den nach dem Sprachgebrauch des täglichen Lebens das Wort „Hülle" hinzuweisen scheinen könnte) übernehmen hier nicht die Punkte von $k(\mathfrak{M})$ für die Menge $\mathfrak{M}$, sondern für eine Menge $\mathfrak{K}$ wird dieser Schutz (ganz oder teilweise) durch die Punkte der „Deckungsmenge" $\mathfrak{D}(\mathfrak{K})$ dargestellt.

11. Ferner gilt

Satz 4. Ist $\mathfrak{M}$ abgeschlossen und beschränkt[16], so ist $k(\mathfrak{M})$ abgeschlossen[17].

Beweis: Sei $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ ein Häufungspunkt von $k(\mathfrak{M})$ und $Z', Z'', \ldots, Z^{(\lambda)}, \ldots$ eine gegen Z konvergente Folge von Punkten aus $k(\mathfrak{M})$. Sei $X^{(\lambda)} = (x_1^{(\lambda)}, \ldots, x_n^{(\lambda)})$ ein solcher Punkt von $\mathfrak{M}$, daß $Z^{(\lambda)} = (z_1^{(\lambda)}, \ldots, z_n^{(\lambda)})$ zu $k(\{X^{(\lambda)}\})$ gehört (gemäß (5) muß es zu jedem $Z^{(\lambda)}$ wenigstens einen solchen Punkt $X^{(\lambda)}$ geben). Indem wir nötigenfalls zu einer Teilfolge übergehen, können wir die Folge $X', X'', \ldots, X^{(\lambda)}, \ldots$ konvergent annehmen. Dann gehört $\lim X^{(\lambda)} = X^{(0)}$ zu $\mathfrak{M}$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nun ein λ, sodaß alle Ungleichungen $|x_\nu^{(\lambda)} - x_\nu^{(0)}| < \frac{1}{2}\varepsilon$, $|z_\nu^{(\lambda)} - z_\nu| < \frac{1}{2}\varepsilon$ gelten; wegen $z_\nu^{(\lambda)} \leqq x_\nu^{(\lambda)}$ folgt daraus $z_\nu < x_\nu^0 + \varepsilon$ für jedes ε, also $z_\nu \leqq x_\nu^0$. Somit gehört Z zu $k(\{X^0\})$, also zu $k(\mathfrak{M})$, was zu beweisen war.

12. Zu den Betrachtungen von Nr. **10** in gewissem Sinne umgekehrt sind die folgenden. Es sei eine komprimierte Menge $\mathfrak{K}$ gegeben. Wir fragen nach allen Mengen $\mathfrak{M}$, für welche $k(\mathfrak{M}) = a(\mathfrak{K})$ ist. Den Durchschnitt aller dieser Mengen wollen wir mit $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D}^*(\mathfrak{K})$ bezeichnen[18]. Von dieser Menge $\mathfrak{D}^*$ gilt der

[16] Die bloße Abgeschlossenheit von $\mathfrak{M}$ genügt nicht für die Abgeschlossenheit von $k(\mathfrak{M})$, wie man sieht, wenn man für $\mathfrak{M}$ in der Ebene $\mathfrak{R}^2$ die Menge $x_1 x_2 = -1$ nimmt; man erhält dann für $k(\mathfrak{M})$ die nicht-abgeschlossene Menge aller Punkte (x_1, x_2) mit wenigstens einer negativen Koordinate.

[17] Ebenso wie Satz 2 ist auch dieser für die Grundmenge $\mathfrak{F} = \mathfrak{R}^n$ gültige Satz 4 nicht für beliebige Grundmengen gültig. Man wähle etwa $n = 2$ und für $\mathfrak{F}$ die Menge der Punkte der Geraden $y = x$, vermehrt um die Menge jener Punkte, für welche $y = x + 1$, $x < 0$ gilt; $\mathfrak{M}$ sei die Menge der Punkte mit $y = x + 1$, $-1 \leqq x < 0$, die sowohl beschränkt als (relativ zu $\mathfrak{F}$) abgeschlossen ist; dann besteht $k(\mathfrak{M})$ aus allen Punkten mit $x < 0$ auf einer der beiden Geraden $y = x$, $y = x + 1$; $k(\mathfrak{M})$ enthält nicht den Häufungspunkt $(0, 0)$, ist also nicht abgeschlossen.

Satz 4 gilt natürlich in trivialer Weise, wenn $\mathfrak{F}$ eine isolierte Menge des $\mathfrak{R}^n$ ist, da dann jede Menge $\subseteq \mathfrak{F}$ relativ zu $\mathfrak{F}$ abgeschlossen ist.

[18] Dem gegenüber wäre bei beliebigen (nicht abgeschlossenen) Mengen $\mathfrak{K}$ der Durchschnitt $\mathfrak{D}^0$ aller Mengen $\mathfrak{M}$ mit $k(\mathfrak{M}) = \mathfrak{K}$ von geringerem Interesse. Betrachtet man etwa die Menge $\mathfrak{K}$ des obigen Beispiels 2) (Nr. **9**) — oder irgend eine offene komprimierte Menge $\mathfrak{K}$, — und nimmt für $\mathfrak{M}_1$ bzw. $\mathfrak{M}_2$ die Menge aller Punkte von $\mathfrak{K}$ mit lauter rationalen bzw. lauter irrationalen Koordinaten, so ist $k(\mathfrak{M}_1) = k(\mathfrak{M}_2) = \mathfrak{K}$; dabei ist der Durchschnitt $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$ und somit auch $\mathfrak{D}^0$ leer.

Satz 5. Sei $\mathfrak{K}$ eine komprimierte Menge des $\mathfrak{R}^n$ und $a(\mathfrak{K})$ ihre abgeschlossene Hülle. Der Durchschnitt $\mathfrak{D}^*$ aller $a(\mathfrak{K})$ erzeugenden Mengen fällt dann mit der Deckungsmenge $\mathfrak{D}(\mathfrak{K})$ von $\mathfrak{K}$ zusammen[19].

Beim Beweis dieses Satzes beachten wir, daß er wegen $\mathfrak{D}(a(\mathfrak{K})) = \mathfrak{D}(\mathfrak{K})$ (vgl. Satz 3) eigentlich nur von $a(\mathfrak{K})$ handelt. Anders gesagt: wir können von vorneherein $\mathfrak{K}$ als abgeschlossen voraussetzen.

Wir wollen nun zunächst zeigen, daß jeder zu $\mathfrak{D}$ gehörende Punkt $X^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ auch zu $\mathfrak{D}^*$ gehört. Wir zerlegen den Raum $\mathfrak{R}^n$ in die Menge $\mathfrak{T}$ aller Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$, für die wenigstens eine der Ungleichungen $x_\nu < x_\nu^0$ gilt und in die Menge $\mathfrak{U}$ der Punkte mit $x_\nu \geqq x_\nu^0$. Nach Voraussetzung hat X^0 die Eigenschaft I (Nr. **9**), d. h. es gehört X^0 zu $a(\mathfrak{K}) = \mathfrak{K}$. Da $\mathfrak{T}$ komprimiert, also $k(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}$ ist, so gilt für jede Menge $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{T}$ wegen (2) die Beziehung $k(\mathfrak{M}) \subseteqq \mathfrak{T}$, es enthält also $k(\mathfrak{M})$ nicht den Punkt X^0; eine Menge $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{T}$ kann also nicht erzeugende Menge von $\mathfrak{K}$ sein. Eine erzeugende Menge von $\mathfrak{K}$ muß also wenigstens einen Punkt von $\mathfrak{U}$ enthalten. Ein von X^0 verschiedener Punkt aus $\mathfrak{U}$ kann aber wegen der Eigenschaft II des Punktes X^0 nicht zu $a(\mathfrak{K}) = \mathfrak{K}$, also auch zu keiner erzeugenden Menge $\mathfrak{M}$ von $a(\mathfrak{K})$ gehören (für eine solche Menge müßte ja $\mathfrak{M} \subseteqq k(\mathfrak{M}) = a(\mathfrak{K})$ gelten). Somit gehört X^0 zu jeder erzeugenden Menge von $a(\mathfrak{K})$, also zu $\mathfrak{D}^*$, wie wir zeigen wollten.

Nunmehr wollen wir zeigen, daß jeder zu $\mathfrak{D}^*$ gehörende Punkt $X' = (x_1', \ldots, x_n')$ sowohl die Eigenschaft I als auch die Eigenschaft II (Nr. **9**) hat und somit zu $\mathfrak{D}$ gehört. Nun ist jede $\mathfrak{K} = a(\mathfrak{K})$ erzeugende Menge $\mathfrak{M}$ notwendig Teilmenge von $a(\mathfrak{K})$; somit gehört jeder Punkt einer solchen Menge $\mathfrak{M}$, also auch jeder Punkt X' von $\mathfrak{D}^*$ zu $a(\mathfrak{K})$, d. h. er hat die Eigenschaft I. Es bleibt also nur die Eigenschaft II nachzuweisen. Sei nun $Y = (y_1, \ldots, y_n)$

[19] Übrigens gilt Satz 5 auch für eine beliebige Grundmenge $\mathfrak{F}$ dann, wenn $a(\mathfrak{K})$ ebenso wie $\mathfrak{K}$ komprimiert und dann notwendig $\mathfrak{D}(a(\mathfrak{K})) = \mathfrak{D}(\mathfrak{K})$ ist, wobei im Beweis von Satz 5 nur $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{U}$ durch ihre Durchschnitte mit $\mathfrak{F}$ zu ersetzen sind. Wenn jedoch $a(\mathfrak{K})$ nicht komprimiert ist (wie im Beispiel der Anm. 13), dann wird Satz 5 ungültig einfach deshalb, weil von den Mengen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}^*$ die letztere ihren Sinn verliert, da erzeugende Mengen von $a(\mathfrak{K})$ nicht existieren.

ein Punkt aus $a(\mathfrak{K}) = \mathfrak{K}$ und $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ ein von Y verschiedener den Ungleichungen $z_\nu \leqq y_\nu$ genügender Punkt, sodaß

$$k(\{Y\}) \supset k(\{Z\}) \tag{6}$$

ist. Sei ferner $\mathfrak{M}$ eine erzeugende Menge von $\mathfrak{K}$. Dann sei $\mathfrak{M}_0$ diejenige Menge, die aus $\mathfrak{M}$ durch Weglassen des Punktes Z entsteht, falls dieser Punkt Z zu $\mathfrak{M}$ gehört; andernfalls sei $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$. Ferner sei

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_0 + \{Z\}, \quad \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_0 \dotplus \{Y\}. \tag{7}$$

Wegen $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$ ist gemäß (2)

$$k(\mathfrak{M}_0) \subseteq k(\mathfrak{M}) = \mathfrak{K} \tag{8}$$

und da Y und somit auch Z zu $\mathfrak{K}$ gehört, so ist

$$k(\{Z\}) \subseteq \mathfrak{K}, \quad k(\{Y\}) \subseteq \mathfrak{K}. \tag{9}$$

Gemäß (3) folgt dann aus (7), (8), (9):

$$\begin{aligned} k(\mathfrak{M}_1) &= k(\mathfrak{M}_0) \dotplus k(\{Z\}) \subseteq \mathfrak{K}, \\ k(\mathfrak{M}_2) &= k(\mathfrak{M}_0) \dotplus k(\{Y\}) \subseteq \mathfrak{K}, \end{aligned} \tag{10}$$

außerdem wegen (6):

$$k(\mathfrak{M}_2) \supseteq k(\mathfrak{M}_1). \tag{11}$$

Wegen $\mathfrak{M}_1 \supseteq \mathfrak{M}$ gilt aber gemäß (2)

$$k(\mathfrak{M}_1) \supseteq k(\mathfrak{M}) = \mathfrak{K}. \tag{12}$$

Aus (10), (11), (12) ergibt sich

$$k(\mathfrak{M}_1) = k(\mathfrak{M}_2) = \mathfrak{K}.$$

Es ist also $\mathfrak{M}_2$ eine erzeugende Menge von $\mathfrak{K}$, die den Punkt Z nicht enthält, der also nicht ein Punkt von $\mathfrak{D}^*$ sein kann. Somit haben wir festgestellt: Wenn ein Punkt Y zu $\mathfrak{K} = a(\mathfrak{K})$ gehört, so gehört kein Punkt $Z \neq Y$ mit $z_\nu \leqq y_\nu$ zu $\mathfrak{D}^*$. Das bedeutet aber genau dasselbe wie die Aussage: Wenn X' zu $\mathfrak{D}^*$ gehört, so gehört kein Punkt $Y \neq X'$ mit $y_\nu \geqq x'_\nu$ zu $\mathfrak{K} = a(\mathfrak{K})$. Somit hat jeder Punkt X' von $\mathfrak{D}^*$ die Eigenschaft II, wie behauptet.

Damit ist Satz 5 bewiesen. Es sei beigefügt, daß beim Beweis keine Voraussetzung darüber gemacht wurde, ob Punkte von $\mathfrak{D}$, bzw. von $\mathfrak{D}^*$ tatsächlich vorhanden sind. Beispielsweise ist unmittelbar zu sehen, daß sowohl $\mathfrak{D}^*(\mathfrak{K})$ als auch $\mathfrak{D}(\mathfrak{K})$ leer ist, wenn $\mathfrak{K} = \mathfrak{R}^n$ ist, desgleichen natürlich auch, wenn $\mathfrak{K}$ die leere Menge ist[20].

13. Wir betrachten nunmehr solche komprimierte Mengen $\mathfrak{K}$ des $\mathfrak{R}^n$, die noch der folgenden Voraussetzung genügen:

Voraussetzung (V). Es gibt keine zu einer der Koordinatenachsen parallele Gerade $x_\nu = x_\nu^0 + a_\nu t$ $(-\infty < t < \infty$, alle a_ν bis auf eines gleich null), deren sämtliche Punkte zu $\mathfrak{K}$ gehören[21].

Wegen der Komprimiertheit von $\mathfrak{K}$ folgt dann aus (V), daß es überhaupt keine ganz in $\mathfrak{K}$ liegende Gerade $x_\nu = x_\nu^0 + a_\nu t$ mit einem Richtungsvektor $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$ gibt, dessen sämtliche Koordinaten $a_\nu \geqq 0$ sind.

Wir wollen dann den (bereits am Schluß von Nr. 9 erwähnten) Satz beweisen:

Satz 6. Eine der Voraussetzung (V) genügende abgeschlossene komprimierte Punktmenge $\mathfrak{K}$ des $\mathfrak{R}^n$ ist durch ihre Deckungsmenge $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathfrak{K})$ eindeutig bestimmt[22]. Es ist nämlich $\mathfrak{K} = k(\mathfrak{D})$.

---

[20] Liegt keiner dieser Fälle vor und ist $n = 1$, so kann die Gültigkeit von Satz 5 unmittelbar erkannt werden: die komprimierte abgeschlossene Menge $\mathfrak{K}$ kann nur eine Halbgerade $x_1 \leqq a$ sein und es ist sowohl $\mathfrak{D}^*(\mathfrak{K})$ als $\mathfrak{D}(\mathfrak{K})$ die aus dem einen Punkt $x_1 = a$ bestehende Menge.

[21] Für eine vom $\mathfrak{R}^n$ verschiedene Grundmenge $\mathfrak{F}$ wäre die Voraussetzung (V) so zu formulieren, daß auf keiner zu einer Koordinatenachse parallelen Geraden alle zu $\mathfrak{F}$ gehörenden Punkte auch zu $\mathfrak{K}$ gehören.

Nimmt man speziell $\mathfrak{F}$ gleich der Menge $\mathfrak{Q}$ aller Gitterpunkte mit positiven Koordinaten, so erkennt man, daß (V) dann dasselbe bedeutet wie die Voraussetzung, daß $\mathfrak{K}$ nur endlich viele Punkte enthalten soll; (denn für jede unendlich viele Punkte enthaltende komprimierte Menge $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{Q}$ ist leicht zu sehen, daß $\mathfrak{K}$ für wenigstens ein λ die Gesamtheit aller Gitterpunkte mit $x_\nu = 1$ für $\nu \neq \lambda$, $x_\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ enthalten muß).

[22] Satz 6 sowie der folgende Beweis bleiben gültig, wenn anstelle des $\mathfrak{R}^n$ irgend eine abgeschlossene Menge $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{R}^n$ als Grundmenge genommen wird. Hingegen gilt Satz 6 nicht für beliebige Grundmengen $\mathfrak{F}$, wie aus folgendem Beispiel ersichtlich ist: Es sei $n = 2$ und $\mathfrak{F}$ die Menge aller Punkte der xy-Ebene mit Ausnahme der Punkte der Halbgeraden $y = x + 1$, $x \geqq 0$; es sei

Dabei ist zunächst klar, daß die Menge $\mathfrak{D}$, deren Punkte gemäß I), Nr. **9**, zu $a(\mathfrak{K})$ gehören, wegen $a(\mathfrak{K}) = \mathfrak{K}$ der Beziehung $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{K}$ genügt, woraus gemäß (2) sich $k(\mathfrak{D}) \subseteq k(\mathfrak{K})$, also die Gültigkeit von

$$k(\mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{K} \tag{13}$$

für jede abgeschlossene komprimierte Menge $\mathfrak{K}$ ergibt. Zum Beweis von Satz 6 brauchen wir also nur noch zu zeigen, daß unter der Voraussetzung (V) jeder Punkt $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ der abgeschlossenen komprimierten Menge $\mathfrak{K}$ zu $k(\mathfrak{D})$ gehört. Betrachten wir nun die der ersten Koordinatenachse parallele Gerade $x_1 = x_1^* + t$, $x_\nu = x_\nu^*$ $(\nu \neq 1)$. Wegen (V) gehört diese Gerade g' nicht ganz zu $\mathfrak{K}$ und wegen der Komprimiertheit und Abgeschlossenheit von $\mathfrak{K}$ muß es also ein $t = t' \geqq 0$ geben, sodaß der zugehörige Punkt $X' = (x_1', \ldots, x_n')$ von g' (sowie jeder zu $t < t'$ gehörende Punkt) in $\mathfrak{K}$ liegt, hingegen jeder Punkt $t > t'$ außerhalb $\mathfrak{K}$. Ebenso sieht man, daß es auf der durch $x_2 = x_2' + t$, $x_\nu = x_\nu'$ $(\nu \neq 2)$ definierten Geraden g'' für ein $t'' \geqq 0$ einen Punkt X'' geben muß, der selbst, ebenso wie jeder Punkt $t < t''$, in $\mathfrak{K}$ liegt, während die Punkte $t > t''$ außerhalb $\mathfrak{K}$ liegen. Schließlich kommt man so auf der durch $x_n = x_n^{(n-1)} + t$, $x_\nu = x_\nu^{(n-1)}$ $(\nu \neq n)$ definierten Geraden $g^{(n)}$ zu einem Punkt $X^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)})$, von dem leicht zu sehen ist, daß er ein Deckungspunkt von $\mathfrak{K}$ ist. Da nun alle Ungleichungen $x_\nu^* \leqq x_\nu^{(n)}$ gelten, gehört X^* zu $k(\mathfrak{D})$, d. h. es ist $\mathfrak{K} \subseteq k(\mathfrak{D})$. Wegen (13) ist damit Satz 6 bewiesen.

14. Neben der abgeschlossenen Hülle $a(\mathfrak{M})$ und der komprimierten Hülle $k(\mathfrak{M})$ einer gegebenen Menge $\mathfrak{M}$ ist auch die Menge $t(\mathfrak{M})$ von Interesse, die definiert werde als der Durchschnitt aller Mengen $\mathfrak{N}$, die $\supseteq \mathfrak{M}$ und sowohl abgeschlossen als komprimiert sind. Die Menge $t(\mathfrak{M})$, die demgemäß als „kleinste" $\mathfrak{M}$ enthaltende abgeschlossene komprimierte Menge angespro-

$\mathfrak{K}$ die (in $\mathfrak{F}$ abgeschlossene) Menge aller zu $\mathfrak{F}$ gehörenden Punkte, für die entweder $x \leqq 0$, $y \leqq 1$ oder $x \leqq 1$, $y \leqq 0$ ist. $\mathfrak{D}$ besteht dann aus dem einzigen Punkt $(1, 0)$ und es ist offenbar $k(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{K}$. (Ein noch einfacheres Beispiel hat man, wenn $\mathfrak{F}$ alle Punkte der Ebene ausgenommen $y = x$, $x \geqq 0$ umfaßt und $\mathfrak{K}$ durch $x \leqq 0$, $y \leqq 0$ definiert ist; dann fällt $\mathfrak{D}$ und $k(\mathfrak{D})$ leer aus.)

chen werden kann, möge etwa als totale Hülle (oder totale Füllung, vgl. Anm. 15) von $\mathfrak{M}$ bezeichnet werden. Bei Zugrundelegung des $\mathfrak{R}^n$ als Grundmenge gilt der

Satz 7[23]. Die totale Hülle einer Menge $\mathfrak{M}$ des $\mathfrak{R}^n$ ist gleich der abgeschlossenen Hülle ihrer komprimierten Hülle[24]: $t(\mathfrak{M}) = ak(\mathfrak{M})$.

Denn die abgeschlossene Menge $ak(\mathfrak{M}) \supseteq \mathfrak{M}$ ist nach Satz 2 außerdem komprimiert, gemäß Definition von $t(\mathfrak{M})$ ist also $ak(\mathfrak{M}) \supseteq t(\mathfrak{M})$. Andererseits folgt aber aus $\mathfrak{M} \subseteq t(\mathfrak{M})$, daß gemäß (2) $k(\mathfrak{M}) \subseteq kt(\mathfrak{M}) = t(\mathfrak{M})$ und daher $ak(\mathfrak{M}) \subseteq at(\mathfrak{M}) = t(\mathfrak{M})$ ist.

Daß in Satz 7 die Reihenfolge der Operationen nicht vertauscht werden darf, daß also nicht allgemein $t(\mathfrak{M}) = ka(\mathfrak{M})$ ist, ist an Beispielen zu sehen. Nimmt man etwa $n = 2$ und für $\mathfrak{M}$ die Menge der Punkte $x = -\frac{1}{m}$, $y = m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, so ist $a(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ und $ka(\mathfrak{M})$ gleich der Menge aller Punkte $x < 0$, während $t(\mathfrak{M})$ durch $x \leqq 0$ gegeben ist. Hingegen ist offenbar[25] $t(\mathfrak{M}) = aka(\mathfrak{M})$.

15. Die Komplementärmenge $\mathfrak{H}$ einer komprimierten Menge hat offenbar die Eigenschaft: mit jedem zu $\mathfrak{H}$ gehörenden Punkt $Y' = (y_1', \ldots, y_n')$ gehört auch jeder Punkt $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ zu

---

[23] Satz 7 gilt (ebenso wie der beim Beweis verwendete Satz 2) nicht für eine beliebige Grundmenge $\mathfrak{F}$. Um dies zu sehen, wähle man $\mathfrak{F}$ wie im Beispiel der Anm. 13 und nehme für $\mathfrak{M}$ die dort betrachtete Menge $\mathfrak{K}$. Dann umfaßt $ak(\mathfrak{M}) = a(\mathfrak{M})$ alle Punkte $x \leqq 0$ der Geraden $y = x$, jedoch $t(\mathfrak{M})$ außerdem den Punkt $(-1, 0)$.

[24] Wir schreiben abgekürzt $ak(\mathfrak{M})$ für $a(k(\mathfrak{M}))$. Bei Betrachtungen, bei denen Operationen an Mengen, wie $k(\mathfrak{M})$, $a(\mathfrak{M})$ usw. nacheinander ausgeführt werden, empfiehlt sich eine für die Zusammensetzung geeignete Bezeichnung dieser Operationen. Darin liegt der Grund für die in Anm. 12 erwähnte Abweichung von einer sonst üblichen Bezeichnung.

[25] Diese für $\mathfrak{F} = \mathfrak{R}^n$ gültige Aussage gilt nicht für jede beliebige Grundmenge $\mathfrak{F}$. Um dies zu sehen, wähle man $\mathfrak{F}$ wie im Beispiel der Anm. 17, jedoch noch vermehrt um den Punkt $(0, -1)$. Wählt man $\mathfrak{M}$ ebenso wie dort (also in $\mathfrak{F}$ abgeschlossen), so wird $ka(\mathfrak{M}) = k(\mathfrak{M})$ wieder die aus allen Punkten $x < 0$ der beiden Geraden $y = x$, $y = x + 1$ bestehende Menge, aus der $aka(\mathfrak{M})$ durch Hinzunahme des Punktes $(0, 0)$ entsteht, während $t(\mathfrak{M})$ außerdem den Punkt $(0, -1)$ enthält.

$\mathfrak{H}$, für den $y_\nu \geqq y'_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) gilt. Eine Menge mit dieser letzteren Eigenschaft möge etwa als „antikomprimiert" bezeichnet werden (im Vergleich zur Komprimiertheit ist für alle Koordinaten die Rolle der positiven mit der negativen Richtung vertauscht), wobei offenbar die Komplementärmenge einer antikomprimierten Menge notwendig komprimiert ist.

Man braucht nur in den entsprechenden Betrachtungen für komprimierte Mengen die Zeichen $<$ und $>$ geeignet zu vertauschen (anders gesagt: eine Spiegelung am Anfangspunkt vorzunehmen), um die Begriffe Deckungspunkt usw. für antikomprimierte Mengen zu erhalten[26].

16. Die in Nr. **7–14** über komprimierte Mengen entwickelten Überlegungen weisen eine große Analogie auf mit Überlegungen über konvexe Punktmengen, also über solche Punktmengen $\mathfrak{K}$, daß mit irgend zwei zu $\mathfrak{K}$ gehörenden Punkten X, Y auch alle Punkte der Strecke XY zu $\mathfrak{K}$ gehören (falls nicht der $\mathfrak{R}^n$, sondern irgend eine Grundmenge $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{R}^n$ zugrundegelegt wird, dann ist die Zugehörigkeit zu $\mathfrak{K}$ natürlich nur für die zu $\mathfrak{F}$ gehörenden Punkte der Strecke XY zu fordern). Der komprimierten Hülle (Füllung) von $\mathfrak{M}$ entspricht die konvexe als „kleinste" konvexe Menge $\supseteq \mathfrak{M}$, wobei $\mathfrak{M}$ als eine die konvexe Hülle „erzeugende" Menge erscheint. Insbesondere hat man die Menge $\mathfrak{D}^*(\mathfrak{K})$ als Durchschnitt der die abgeschlossene Hülle $a(\mathfrak{K})$ von $\mathfrak{K}$ erzeugenden Mengen in ihrer Beziehung zur Menge $\mathfrak{D}(\mathfrak{K})$ der Deckungspunkte von $\mathfrak{K}$. Dabei ist ein Punkt X' dann als „Deckungspunkt" der konvexen Menge $\mathfrak{K}$ zu bezeichnen, wenn X' selbst zu $a(\mathfrak{K})$ gehört, während andererseits kein Punkt Z' zu $a(\mathfrak{K})$ gehört, der auf einer Verbindungsgeraden von X' mit einem (von X' verschiedenen) zu $a(\mathfrak{K})$ gehörenden Punkt Y' in der Anordnung $Y'X'Z'$ liegt. (Bei den konvexen Mengen bilden also die Deckungspunkte in gewissem Sinn einen Schutz der übrigen Punkte nach außen, während es sich bei den komprimierten Mengen um einen Schutz gegen Einwirkung aus positiven Richtungen handelte.) Es mag hier dieser kurze Hinweis auf weitgehende Analogien zu unseren Betrachtungen über komprimierte Mengen genügen.

[26] Natürlich gelten die Bemerkungen von Nr. **15** ebenso wie für $\mathfrak{F} = \mathfrak{R}^n$ auch für eine beliebige Grundmenge $\mathfrak{F}$.

§ 4. Die Eckpunkte einer komprimierten Gitterpunktmenge.

17. Wenn in § 3 einige allgemeinere Betrachtungen über komprimierte Punktmengen eingeschaltet wurden, so kehren wir nun zurück zu unserem eigentlichen Gegenstand: den komprimierten Gitterpunktmengen, wie sie in Nr. **2** erklärt wurden. Ein Beispiel einer solchen Menge in $n = 2$ Dimensionen stellt Figur 1 (Nr. **21**) dar. Wenn wir die durch kleine schwarze Kreise ● markierten Punkte betrachten und von den auf den Achsen liegenden Punkten absehen, so stellen die übrigen (durch achsenparallele Einheitsstrecken miteinander verbundenen) 30 Punkte ersichtlich eine komprimierte Gitterpunktmenge dar[27]. Die Bezeichnung einiger dieser Punkte unserer Menge $\mathfrak{K}_{30}^{2}$ mit den Buchstaben A bis K spielt erst bei späteren Betrachtungen eine Rolle. Wohl aber werden wir alsbald (in Nr. **18**) auf die „Eckpunkte" zu sprechen kommen, die in der Figur dadurch gekennzeichnet sind, daß bei ihnen der kleine Kreis ● noch von einem äußeren Kreis umgeben ist (◉).

Die Menge $\mathfrak{H}$ der nicht zur betrachteten $\mathfrak{K}_m^n$ gehörenden Gitterpunkte mit positiven Koordinaten (anders gesagt: die Komplementärmenge $\mathfrak{H} = \mathfrak{Q} - \mathfrak{K}_m^n$) ist natürlich „antikomprimiert", d. h. mit jedem zu $\mathfrak{H}$ gehörenden Punkt $Y' = (y_1', \ldots, y_n')$ gehört auch jeder den Ungleichungen $y_\nu \geqq y_\nu'$ genügende Gitterpunkt $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ zu $\mathfrak{H}$ (vgl. Nr. **15**). In Fig. 1 sind die in den Rahmen der Figur fallenden Punkte von $\mathfrak{H}$ durch kleine innen weiß gelassene Kreise ○ gekennzeichnet[28].

Beispiele 3-dimensionaler komprimierter Gitterpunktmengen findet man in Tafel III, u. zw. wird sowohl durch die Figur

[27] Die beiden gemäß Nr. **4** zu dieser Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}_{30}^{2}$ gehörenden Partitionen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ der Zahl $m = 30$ sind $\mathfrak{A}' = (9, 6, 5, 4, 2^2, 1^2)$ und $\mathfrak{A}'' = (8, 6, 4^2, 3, 2, 1^3)$. Wegen der Schreibweise vgl. Anm. 3a.

[28] Wenn man zu jedem Gitterpunkt (x_1', x_2') einer $\mathfrak{K}_m^2$ die Menge aller Punkte des Quadrates $x_1' - 1 < x_1 \leqq x_1'$, $x_2' - 1 < x_2 \leqq x_2'$ bildet, so erhält man jene „Quadratfigur", die neben der „Gitterpunktfigur" $\mathfrak{K}_m^2$ in der in Anm. 1 zitierten Arbeit eingeführt (l. c. [1], S. 4) und dort bevorzugt wurde.

Ganz analog kann man in n Dimensionen statt der komprimierten Gitterpunktmengen auch komprimierte Würfelmengen verwenden; vgl. l. c. [1], S. 7, Nr. **22**.

im mittleren (doppelt umrahmten) Sechseck, als auch durch jede Figur in einem der übrigen 12 Sechsecke eine $\mathfrak{K}_{13}^{3}$ dargestellt[29]. Wieder sind in jeder Figur die „Eckpunkte" (vgl. Nr. **18**) so, wie in Fig. 1, gekennzeichnet (◉).

18. Sei $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^n$ eine n-dimensionale Gitterpunktmenge vom Grad m und $X^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ ein Punkt von $\mathfrak{K}$. Seien $X' = (x_1^0 + 1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, $X'' = (x_1^0, x_2^0 + 1, x_3^0, \ldots, x_n^0)$, $X^{(n)} = (x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0 + 1)$ jene n Punkte, die durch Vergrößerung einer Koordinate von X^0 um eine Einheit erhalten werden. Ein Punkt X^0 von $\mathfrak{K}$ heiße ein „Eckpunkt" von $\mathfrak{K}$, wenn zu $\mathfrak{K}$ keiner der genannten n Punkte $X', \ldots, X^{(n)}$ gehört[30]. Es gehören also die n Punkte $X^{(\nu)}$ zur Komplementärmenge[31] $\mathfrak{H} = \mathfrak{Q} - \mathfrak{K}$. Ist E ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}$, so folgt aus der eben gegebenen Definition, daß, ebenso wie $\mathfrak{H}$, auch die Menge $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H} + \{E\}$, die aus $\mathfrak{H}$ durch Hinzunahme des Eckpunktes E entsteht, antikomprimiert ist[31a]. Bezeichnet also $\mathfrak{M}$ irgend eine den Punkt E nicht enthaltende Teilmenge von $\mathfrak{K}$, so ist wegen $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{K} - \{E\}$ notwendig[32]

$$k(\mathfrak{M}) \subseteq k(\mathfrak{K} - \{E\}) = \mathfrak{K} - \{E\}; \tag{14}$$

die Menge $\mathfrak{M}$ ist also sicher nicht eine erzeugende Menge[33] von $\mathfrak{K}$. Jeder Eckpunkt E von $\mathfrak{K}$ muß also jeder erzeugenden Menge

---

[29] Bei jeder dieser Figuren einer $\mathfrak{K}_{13}^{3}$ sind die drei gemäß Nr. **4** zur $\mathfrak{K}_{13}^{3}$ gehörigen Partitionen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$ der Zahl $m = 13$ mit angegeben; sie sind beispielsweise für die mittlere Figur: $\mathfrak{A}' = (7, 4, 2)$, $\mathfrak{A}'' = (6, 5, 2)$, $\mathfrak{A}''' = (7, 5, 1)$.

[30] Ein solcher Punkt X^0 ist eine ausspringende Ecke der zu $\mathfrak{K}_m^n$ für $n \geqq 3$ gehörenden „Würfelfigur" (bzw. „Quadratfigur" für $n = 2$), wie sie in Anm. 28 erwähnt wurde.

[31] Da $\mathfrak{H}$ antikomprimiert ist (vgl. Nr. **17**), so gehören alle von X^0 verschiedenen, den Ungleichungen $x_\nu \geqq x_\nu^0$ genügenden Gitterpunkte $X = (x_1, \ldots, x_n)$ zu $\mathfrak{H}$. Die Menge $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ der Eckpunkte von $\mathfrak{K}$ ist also in unserem Falle $\mathfrak{F} = \mathfrak{Q}$ nichts anderes als die in § 3 mit $\mathfrak{D}(\mathfrak{K})$ bezeichnete Deckungsmenge.

[31a] Das Gleiche gilt allgemein für $\mathfrak{H} + \mathfrak{N}$, wenn $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ ist.

[32] Unter $k(\mathfrak{M})$ werde (vgl. Nr. **10**) die kleinste komprimierte Gitterpunktmenge $\supseteq \mathfrak{M}$ verstanden. Wegen der Zeichen $\subseteq$ usw. vgl. Nr. **7**, Anm 10; zu Ungleichung (14) vgl. (2) in Nr. **10**.

[33] „Erzeugende Menge" von $\mathfrak{K}$ heißt eine Menge $\mathfrak{M}$ von Gitterpunkten aus $\mathfrak{Q}$, für welche $k(\mathfrak{M}) = \mathfrak{K}$ ist (vgl. Nr. **10**).

von $\mathfrak{K}$, daher auch dem Durchschnitt $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D}^*(\mathfrak{K})$ aller erzeugenden Mengen von $\mathfrak{K}$ angehören: für die Menge $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ aller Eckpunkte von $\mathfrak{K}$ gilt somit $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{D}^*$. Andererseits ist leicht zu sehen, daß die Eckpunktmenge $\mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ selbst eine erzeugende Menge von $\mathfrak{K}$ ist. Ist nämlich X^0 ein Punkt von $\mathfrak{K}$, der nicht Eckpunkt ist, so muß es einen Eckpunkt $E = (e_1, \ldots, e_n)$ von $\mathfrak{K}$ geben, für den alle Ungleichungen $x_\nu^0 \leqq e_\nu$ gelten[34], woraus folgt, daß X^0 zu $k(\mathfrak{E})$ gehört; es ist also $\mathfrak{D}^* \subseteq \mathfrak{E}$. Damit haben wir die Sätze[35]

Satz 8. Die Eckpunktmenge $\mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ einer komprimierten Gitterpunktmenge ist gleich dem Durchschnitt $\mathfrak{D}^*(\mathfrak{K})$ aller erzeugenden Mengen von $\mathfrak{K}$.

Satz 9. Eine komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}$ ist durch ihre Eckpunktmenge $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ eindeutig festgelegt; es ist nämlich $\mathfrak{K} = k(\mathfrak{E})$.

19. Gelegentlich wird es zweckmäßig sein (vgl. Nr. **21**, **29**, **37**), zu einer komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}$ (die wir, wie schon in Nr. **2** gesagt, stets als endlich voraussetzen) noch alle Gitterpunkte des $\mathfrak{R}^n$ mit wenigstens einer Koordinate $\leqq 0$ hinzuzunehmen. Die derart gebildete Menge $\mathfrak{G}$ ist selbstverständlich eine (bezüglich der aus allen Gitterpunkten des $\mathfrak{R}^n$ bestehenden Grundmenge $\mathfrak{P}$) komprimierte Menge von Gitterpunkten und ihre Eckpunktmenge $\mathfrak{E}(\mathfrak{G})$ stimmt überein[36] mit der Menge $\mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ der Eckpunkte von $\mathfrak{K}$.

Die Menge $\mathfrak{P} - \mathfrak{G}$ aller nicht zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Gitterpunkte des $\mathfrak{R}^n$ ist dann zugleich die oben (Nr. **17**) mit $\mathfrak{H}$ bezeichnete

---

[34] Da nämlich X^0 nicht Eckpunkt ist, muß wenigstens einer der oben genannten Punkte $X', \ldots, X^{(n)}$ zu $\mathfrak{K}$ gehören, beispielsweise $X^{(\nu)} = Y^0$. Ist Y^0 nicht Eckpunkt, so muß unter den entsprechend gebildeten Punkten $Y', \ldots, Y^{(n)}$ wenigstens einer zu $\mathfrak{K}$ gehören. So fortfahrend muß man (wegen der Endlichkeit der Menge $\mathfrak{K}$) auf einen Eckpunkt E mit $e_\nu \geqq x_\nu^0$ stoßen.

[35] Mit diesen Sätzen über die Eckpunktmenge $\mathfrak{E}$ (zu denen man noch Anm. 31 vergleiche) sind für komprimierte Gitterpunktmengen die wesentlichen Feststellungen gewonnen, die in § 3 für die Deckungsmenge $\mathfrak{D}$ einer komprimierten Menge gemacht wurden (vgl. dort Satz 5 und 6 in Nr. **12** und **13**).

[36] Es liegt hier eine gewisse Analogie vor mit der in Nr. **9** festgestellten Übereinstimmung der Deckungsmengen $\mathfrak{D}(\mathfrak{B})$ und $\mathfrak{D}(\mathfrak{L})$.

Menge $\mathfrak{Q} - \mathfrak{K}$ aller nicht zu $\mathfrak{K}$ gehörenden Gitterpunkte mit positiven Koordinaten.

§ 5. Elementarer Umbau einer zweidimensionalen komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}_m^2$. Stammbaum der Mengen $\mathfrak{K}_m^2$ von gleichem Grad m.

20. Abgesehen von § 10 werden wir uns weiterhin (§§ 6 bis 9) in dieser Note auf die Dimensionszahl $n = 3$ beschränken. Doch sollen vorher (Nr. **21–25**) bekannte auf $n = 2$ bezügliche Tatsachen zwecks späterer Verwendung zusammengestellt werden[37].

21. Es bezeichne $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^2$ eine zweidimensionale komprimierte Gitterpunktmenge ($m \geqq 1$) in der xy-Ebene. Wir wollen erklären, was unter einem elementaren yx-Umbau (vom Typus I, II oder III) von $\mathfrak{K}$ verstanden werden soll. Zu diesem Zweck unterscheiden wir zunächst verschiedene Fälle bezüglich der Eckpunkte von $\mathfrak{K}$. Sei also $G_1 = (\xi_1, \eta_1)$ ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}$. Wir fragen zunächst, zu welcher der beiden in Nr. **19** erklärten Mengen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ der Punkt $P_1 = (\xi_1 + 1, \eta_1 - 1)$ gehört[38] (der Punkt G_1 ist natürlich ein Punkt von $\mathfrak{G}$, wobei wir, wie überhaupt im Folgenden, mit G_1, G_3 udgl. Punkte bezeichnen, die zu $\mathfrak{G}$ gehören, und mit H_2, H_3 Punkte von $\mathfrak{H}$).

Im Falle A), daß P_1 zu $\mathfrak{H}$ gehört, wandern wir vom Punkt P_1 aus in der negativen y-Richtung und suchen unter allen zu $\mathfrak{H}$ gehörenden Gitterpunkten $(\xi_1 + 1, y)$ auf der Geraden $x = \xi_1 + 1$ denjenigen mit kleinster y-Koordinate; es sei dies der Punkt $H_2 = (\xi_1 + 1, \eta_2)$, wobei $\eta_2 \leqq \eta_1 - 1$ ist und der Punkt $G_3 = (\xi_1 + 1, \eta_2 - 1)$ zu $\mathfrak{G}$ gehört[39]. Offenbar entsteht aus $\mathfrak{K}$ eine neue komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}'$ (vom gleichen Grad m), wenn man zu $\mathfrak{K}'$ alle von G_1 verschiedenen Gitterpunkte aus $\mathfrak{K}$ nimmt und außerdem (anstelle des Gitterpunktes

---

[37] Eben um dieser Anpassung willen weicht die Darstellung in diesem § 5 etwas ab von der l. c. [1] gegebenen, auf die im übrigen wegen weiterer Ausführungen hingewiesen sei.

[38] Für die in Fig. 1 dargestellte Menge $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_{30}^2$ liegt der erste Fall A) vor für die Eckpunkte A und E (hier ist $P_1 = M$ bzw. $= S$), der zweite Fall B) für die Eckpunkte C, D, H, K (wo P_1 bzw. $= D$, E, J, W ist).

[39] Im Falle der Fig. 1 findet man $H_2 = N$, $G_3 = C$ für $G_1 = A$, $P_1 = M$; und $H_2 = S$, $G_3 = G$ für $G_1 = E$, $P_1 = S$.

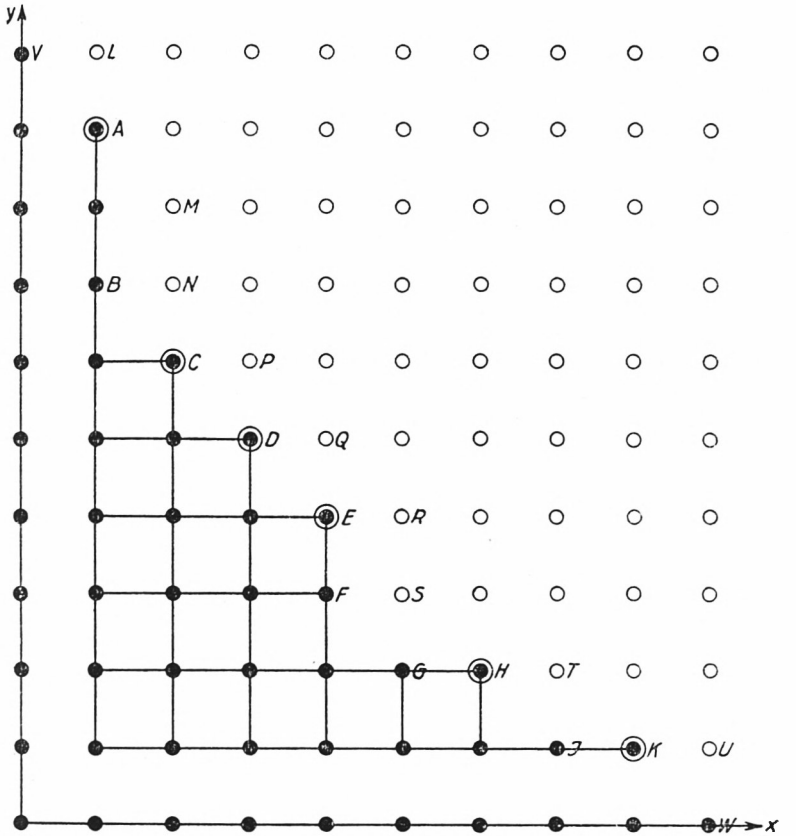


Fig. 1.

G_1) den Gitterpunkt H_2. Dieser Übergang von $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{R}'$ stellt das dar, was wir im vorliegenden Fall A) einen „elementaren yx-Umbau" nennen, wobei wir sagen werden, daß dieser Umbau am Eckpunkt G_1 ausgeführt wird[40].

Im Falle B), daß P_1 zu $\mathfrak{G}$ gehört, nehmen wir zunächst an, es sei $\eta_1 \geqq 2$. Wir wandern dann vom Punkt P_1 aus in der posi-

[40] Auf die Einteilung solcher Umbauten in zwei Typen, je nachdem $\eta_2 = \eta_1 - 1$ oder $< \eta_1 - 1$ ist, kommen wir noch in Nr. **25** zu sprechen.

Die Bezeichnung „yx"-Umbau weist darauf hin, daß eine Verlagerung von der y- zur x-Achse hin erfolgt; vgl. auch das in Nr. **23** über H_y und H_x Gesagte.

tiven x-Richtung und suchen unter allen zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Gitterpunkten $(x, \eta_1 - 1)$ auf der Geraden $y = \eta_1 - 1$ denjenigen mit größter x-Koordinate (einen solchen muß es geben, da wegen $\eta_1 - 1 \geqq 1$ auf der Geraden $y = \eta_1 - 1$ Punkte von $\mathfrak{H}$ liegen müssen); es sei dies der Punkt $G_2 = (\xi_2, \eta_1 - 1)$, wobei $\xi_2 \geqq \xi_1 + 1$ und G_2 offenbar wieder ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}$ ist, während $H_3 = (\xi_2 + 1, \eta_1 - 1)$ zu $\mathfrak{H}$ gehört. Es ist dann zu unterscheiden, ob für diesen Eckpunkt G_2 wieder der Fall B) vorliegt oder der Fall A), d. h. ob der Punkt $P_2 = (\xi_2 + 1, \eta_2 - 1)$ zu $\mathfrak{G}$ oder zu $\mathfrak{H}$ gehört. Nur dann, wenn für G_2 wieder Fall B) vorliegt, also P_2 zu $\mathfrak{G}$ gehört, soll ein „elementarer yx-Umbau", der am Eckpunkt G_1 ausgeführt wird, definiert werden: die neue komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}'$ entstehe aus $\mathfrak{K}$ dadurch, daß der Gitterpunkt G_1 ersetzt wird durch H_3, während alle anderen Gitterpunkte aus $\mathfrak{K}$ beibehalten werden[41].

Wenn dagegen im Falle B) für den aus dem Eckpunkt G_1 hergeleiteten Eckpunkt G_2 der Fall A) vorliegt[42], desgleichen wenn $\eta_1 = 1$ ist[43], dann wollen wir sagen, daß es keinen am Eckpunkt G_1 ausführbaren elementaren yx-Umbau gibt.

22. Wenn wir uns fragen, wie eine komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}_m^2$ beschaffen sein muß, damit an keinem ihrer Eckpunkte ein elementarer yx-Umbau ausgeführt werden kann, so sieht man zunächst, daß dann für keinen Eckpunkt der Fall A) vorliegen darf; aber auch der Fall B) eines Eckpunktes $G_1 = (\xi_1, \eta_1)$ mit $\eta_1 \geqq 2$ darf nicht vorliegen, da dann stets, ob für G_2 Fall B) oder A) vorliegt, ein elementarer yx-Umbau von $\mathfrak{K}_m^2$ möglich ist, sei es ausführbar an G_1 selbst oder an G_2. Es bleibt dann nichts anderes übrig, als daß alle Gitterpunkte von $\mathfrak{K}_m^2$ auf der Geraden $y = 1$ liegen, da es andernfalls unter den Eckpunkten (x, y) notwendig wenigstens einen mit $y \geqq 2$ geben müßte[44]. $\mathfrak{K}_m^2$ kann also nichts anderes sein, als die Menge der

[41] Daß für G_2 wieder Fall B) vorliegt, tritt in Fig. 1 bei $G_1 = C$ ein (wo $G_2 = D$, $H_3 = Q$ ist), sowie bei $G_1 = H$ (wo $G_2 = K$, $H_3 = U$ ist).

[42] Dies tritt im Falle der Fig. 1 beim Eckpunkt $G_1 = D$ ein, wo $G_2 = E$ (und $H_3 = R$) ist.

[43] Diesen Fall hat man in Fig. 1 beim Eckpunkt $G_1 = K$.

[44] Aus $k(\mathfrak{E}) = \mathfrak{K}$ (Satz 9, Nr. 18) folgt ja: wenn $\mathfrak{E}$ ganz zu $y = 1$ gehört, gehört auch $\mathfrak{K}$ zu $y = 1$.

Gitterpunkte $1 \leqq x \leqq m$, $y = 1$ mit dem einzigen Eckpunkt $(m, 1)$. Wir haben damit den

Satz 10. An jeder zweidimensionalen komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{R}^2_m$, die nicht mit der durch $1 \leqq x \leqq m$, $y = 1$ definierten Menge $\underset{\smile}{\mathfrak{R}} = \underset{\smile}{\mathfrak{R}}^2_m$ zusammenfällt, ist ein elementarer yx-Umbau ausführbar.

Übrigens braucht man, um alle an einer $\mathfrak{R}^2_m$ ausführbaren elementaren yx-Umbautenzu erhalten, nur die verschiedenen Eckpunkte von $\mathfrak{R}^2_m$ gemäß Nr. **21** durchzuprobieren[45].

23. Da bei jedem elementaren yx-Umbau ein einziger Gitterpunkt seine Lage ändert, wobei seine x-Koordinate einen größeren, seine y-Koordinate einen kleineren Wert erhält, so muß bei Ausführung einer oder mehrerer aufeinanderfolgender elementarer yx-Umbauten die über alle Gitterpunkte von $\mathfrak{R}^2_m$ erstreckte Summe $\Sigma y = H_y$ ständig abnehmen, hingegen die Summe $\Sigma x = H_x$ ständig zunehmen. Es kann also niemals nach mehreren elementaren yx-Umbauten dieselbe Gitterpunktmenge $\mathfrak{R}$ wiederkehren. Da es aber zu gegebenem Grad m nur endlich viele komprimierte Gitterpunktmengen $\mathfrak{R}^2_m$ gibt, so folgt aus Satz 10, daß man durch genügend oftmalige Ausführung elementarer yx-Umbauten von jeder $\mathfrak{R}^2_m$ ausgehend schließlich bei $\underset{\smile}{\mathfrak{R}}^2_m$ anlangen muß[46]. Es gilt also

Satz 11. Von jeder zweidimensionalen komprimierten Gitterpunktmenge m-ten Grades, die nicht mit der in Satz 10 erklärten Menge $\underset{\smile}{\mathfrak{R}}$ zusammenfällt, kann man

---

[45] So sind wir (vgl. Anm. 38, 39, 41) bei der in Fig. 1 dargestellten $\mathfrak{R}^2_{30}$ zu vier an den Ecken A, E, C und H ausführbaren elementaren yx-Umbauten gelangt.

Beispiele von Mengen $\mathfrak{R}^2_m$ mit mehreren elementaren yx-Umbauten erhält man auch aus den in Monatshefte f. Math. u. Phys. **49** verschiedentlich gegebenen Beispielen, wenn man die dortigen mit „Zahlensystemen" operierenden Betrachtungen ins Geometrische, die dortigen „Quadratfiguren" in „Gitterpunktfiguren" umsetzt. Vgl. etwa l. c. [1], S. 13, Nr. **27**.

[46] In der in Anm. 45 genannten Arbeit in den Monatsheften **49** werden die elementaren Umbauten der $\mathfrak{R}^2_m$ in Beziehung gebracht zu Ordnungsbeziehungen zwischen den Partitionen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, die (gemäß Nr. **4**) zu den $\mathfrak{R}^2_m$ gehören.

durch eine endliche Anzahl elementarer yx-Umbauten zu $\underset{\smile}{\mathfrak{R}}$ gelangen.

24. Unter Vertauschung der Rolle der beiden Koordinaten x, y ist aus der in Nr. **21** gegebenen Definition des elementaren yx-Umbaues sogleich die Definition des „elementaren xy-Umbaues" abzulesen, der sich als zum yx-Umbau inverser Prozeß erweist; es ergibt sich dann der zu Satz 11 analoge Satz:

Satz 12. Von jeder zweidimensionalen komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{R}_m^2$, die nicht mit der durch $x = 1$, $1 \leqq y \leqq m$ definierten Menge $\hat{\mathfrak{R}} = \hat{\mathfrak{R}}_m^2$ zusammenfällt, kann man durch eine endliche Anzahl elementarer xy-Umbauten zu $\hat{\mathfrak{R}}$ gelangen; anders ausgedrückt: Von $\hat{\mathfrak{R}}$ aus kann man durch elementare yx-Umbauten jede andere $\mathfrak{R}_m^2$ gewinnen.

In den Sätzen 11 und 12 liegt die Möglichkeit ausgesprochen, für jeden Grad m die komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{R}_m^2$ in einen von $\hat{\mathfrak{R}}$ ausgehenden und in $\underset{\smile}{\mathfrak{R}}$ endigenden „Stammbaum" anzuordnen, in dem jede Verbindung von einem Element zu einem anderen einem elementaren yx-Umbau entspricht[47].

Der Ausdehnung dieser, bereits l. c. [1], §§ 5–7 in etwas anderer Weise entwickelten Tatsache auf den Fall von $n = 3$ Dimensionen werden wir uns in §§ 6–9 zuwenden.

25. Man kann, wie schon erwähnt, bei den elementaren yx-Umbauten drei Typen I, II, III unterscheiden. Um mit der Numerierung dieser Typen in Einklang zu bleiben mit der in Monatsh. **49** (l. c. [1], Nr. **26**) gegebenen Numerierung[47a], müssen

---

[47] Vgl. l. c. [1], S. 20, Fig. 3, wo für den Grad $m = 6$ der zugehörige Stammbaum dargestellt ist (anstelle der Gitterpunktmengen sind dort die zugehörigen „Quadratfiguren" gezeichnet, vgl. Anm. 28).

[47a] Genauer gesagt sind die Beziehungen zu der l. c. gegebenen Typeneinteilung die folgenden: Wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'(\mathfrak{R})$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}''(\mathfrak{R})$ die zu einer $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_m^2$ gemäß Nr. **4** gehörenden Partitionen sind, dann entspricht einem elementaren yx-Umbau vom Typus I, bzw. II, bzw. III ein Abbau der Partition $\mathfrak{A}$ vom gleichen Typus I, bzw. II, bzw. III, hingegen ein Aufbau der Partition $\mathfrak{B}$ vom Typus III, bzw. II, bzw. I.

Wird für einen elementaren yx-Umbau, bei welchem der Gitterpunkt $G = (\xi', \eta')$ durch den Gitterpunkt $H = (\xi'', \eta'')$ ersetzt wird, als „Index"

wir die Reihenfolge in der Aufzählung ändern gegenüber der Aufzählung der Fälle in Nr. **21**.

Typus I. Dieser Typus eines elementaren yx-Umbaues liege vor, wenn für den Eckpunkt G_1, an dem der Umbau ausgeführt wird und ebenso auch für den aus G_1 hergeleiteten Eckpunkt G_2 der Fall B) vorliegt, wenn also $G_1 = (\xi_1, \eta_1)$ übergeführt wird in die Lage des Punktes $H_3 = (\xi_2 + 1, \eta_1 - 1)$ mit $\xi_2 \geqq \xi_1 + 1$[48].

Typus II eines elementaren yx-Umbaues liege vor, wenn für den Eckpunkt G_1 der Fall A) vorliegt und für den aus G_1 hergeleiteten Punkt $H_2 = (\xi_1 + 1, \eta_2)$ die Gleichung $\eta_2 = \eta_1 - 1$ gilt, wenn also $G_1 = (\xi_1, \eta_1)$ übergeführt wird in $H_2 = (\xi_1 + 1, \eta_1 - 1)$[49].

Typus III eines elementaren yx-Umbaues liege vor, wenn für den aus dem Eckpunkt G_1 im Falle A) hergeleiteten Punkt $H_2 = (\xi_1 + 1, \eta_2)$ die Ungleichung $\eta_2 < \eta_1 - 1$ gilt; dabei wird G_1 in H_2 übergeführt[50].

Der zu einem yx-Umbau vom Typus I, II oder III inverse Prozeß ist ein xy-Umbau bzw. vom Typus III, II oder I (vgl. l. c. [1], Nr. **28**).

§ 6. Elementarer Umbau einer dreidimensionalen komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{R}_m^3$.

26. Nunmehr wollen wir erklären, was unter einem „elementaren zy-Umbau" einer dreidimensionalen komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_m^3$ verstanden werden soll. Es sei $x = \xi$ eine Ebene, in der Punkte von $\mathfrak{R}$ vorkommen; diese Punkte bilden dann notwendig eine zweidimensionale komprimierte Gitterpunktmenge, die wir mit $\mathfrak{R}^2(\xi)$ bezeichnen[51]. Für eine zwei-

---

die Zahl $I = \Delta_x - \Delta_y = (\xi'' - \xi') - (\eta' - \eta'')$ eingeführt (wobei stets Min $(\Delta_x, \Delta_y) = 1$ ist), so kann man die Typen I, II, III des yx-Umbaues durch $I > 0$, $I = 0$, $I < 0$ kennzeichnen. Der zu einem yx-Umbau vom Index I inverse xy-Umbau hat den Index $\Delta_y - \Delta_x = -I$.

[48] Dieser Typus liegt in Fig. 1 vor für $G_1 = C$, $H_3 = Q$ und für $G_1 = H$, $H_3 = U$.

[49] Dieser Typus II liegt in Fig. 1 vor für $G_1 = E$, $H_2 = S$.

[50] Dieser Typus III liegt in Fig. 1 vor für $G_1 = A$, $H_2 = N$.

[51] Genauer gesagt wird eine komprimierte zweidimensionale Gitterpunktmenge $\mathfrak{L}_l^2$ in einer yz-Ebene gebildet von der Menge $\mathfrak{L}$ jener Punkte (y, z),

dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge ist nun aus § 5 ersichtlich, was unter einem elementaren Umbau zu verstehen ist, wobei wir — da jetzt die Koordinaten y, z heißen, — sowohl von zy-Umbauten wie von yz-Umbauten sprechen[51a]. Ein solcher elementarer zy-Umbau von $\mathfrak{R}^2(\xi)$ wird freilich durchaus nicht immer als ein Umbau von $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^3_m$ (im Sinne eines Übergangs von $\mathfrak{R}$ zu einer anderen, wiederum komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{R}'$) brauchbar sein[52]. Gleichwohl werden uns diese zy-Umbauten der Teilmengen $\mathfrak{R}^2(\xi)$ zur Erklärung des elementaren zy-Umbaues einer Menge $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^3_m$ verhelfen.

27. Wir wollen annehmen, daß es zwei Paare von Koordinatenwerten (η', ζ'), (η'', ζ'') und zwei x-Werte ξ_1, ξ_2 mit $1 \leqq \xi_2 \leqq \xi_1$ gibt, sodaß für jeden der Ungleichung

$$\xi_2 \leqq \xi \leqq \xi_1 \tag{15}$$

genügenden Wert $x = \xi$ ein elementarer zy-Umbau der in Nr. **26** erklärten Teilmenge $\mathfrak{R}^2(\xi)$ möglich ist, der darin besteht, daß der Punkt (ξ, η', ζ') ersetzt wird durch den Punkt (ξ, η'', ζ''). Wir wollen dann von einer Schar paralleler elementarer zy-Umbauten in den Ebenen $x = \xi_1$ bis $x = \xi_2$ sprechen[52a].

Es soll nun allemal dann, wenn durch eine solche Schar paralleler elementarer zy-Umbauten aus $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^3_m$ wieder eine kom-

---

denen ein zu $\mathfrak{R}^3_m$ gehöriger Punkt (ξ, y, z) entspricht. Es ist aber bequem, — statt mit $\mathfrak{x}$ — mit der in der Ebene $x = \xi$ liegenden Menge $\mathfrak{R}^2(\xi)$ zu arbeiten. Dementsprechend sind im Folgenden auch die zy-Umbauten oder yz-Umbauten als Umgruppierungen von Punkten in der Ebene $x = \xi$ aufzufassen.

[51a] Die in Nr. **25** angegebene Einteilung der elementaren yx-Umbauten in drei Typen I, II, III ergibt natürlich unmittelbar, indem man y durch z und x durch y ersetzt, eine entsprechende Typeneinteilung der elementaren zy-Umbauten.

Wegen der Bezeichnung „zy"-Umbau vgl. das in Anm. 40 Gesagte, sowie die Ungleichungen (16) in Nr. **30**.

[52] Wenn nämlich dabei der Punkt (ξ, η', ζ') ersetzt wird durch (ξ, η'', ζ''), so ist dafür, daß die hiedurch aus $\mathfrak{R}$ entstehende Menge komprimiert ausfällt, notwendig, daß der Punkt $(\xi - 1, \eta'', \zeta'')$ zu $\mathfrak{R}$ gehört oder daß $\xi = 1$ ist; und weiter ist dazu notwendig, daß der Punkt $(\xi + 1, \eta', \zeta')$ in $\mathfrak{R}$ fehlt, was beides nicht der Fall zu sein braucht.

[52a] Offenbar sind die Umbauten einer Schar stets vom gleichen Typus im Sinn der in Nr. **25** bzw. in Anm. 51 a, gegebenen Typeneinteilung.

primierte dreidimensionale Gitterpunktmenge entsteht, von einem elementaren zy-Umbau von $\mathfrak{R}^3_m$ gesprochen werden[52b].

28. Beispielsweise können wir Fig. 2 (Nr. **39**) als Bild einer komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{R}^3_{26}$ von $m = 26$ Gitterpunkten ansehen[53]. Nehmen wir $\eta' = 1$, $\zeta' = 4$, $\eta'' = 2$, $\zeta'' = 2$, $\xi_1 = 5$, $\xi_2 = 2$, so sehen wir, daß für jeden der Ungleichung (15), also $2 \leqq \xi \leqq 5$ genügenden Wert ξ in der Ebene $x = \xi$ ein elementarer zy-Umbau ausführbar ist, bei dem der Punkt $(\xi, \eta', \zeta') = (\xi, 1, 4)$ durch den Punkt $(\xi, \eta'', \zeta'') = (\xi, 2, 2)$ ersetzt wird. Führen wir diese ganze Schar paralleler zy-Umbauten gleichzeitig aus, so werden dabei die in der Fig. 2 mit 1 und mit 8 bezeichneten Punkte, sowie überhaupt alle vier Gitterpunkte auf der Verbindungsstrecke $\overline{1, 8}$ dieser Punkte ersetzt durch die vier Gitterpunkte der Verbindungsstrecke $\overline{3, 5}$ der in der Figur mit 3 und 5 bezeichneten Punkte. Die so entstehende Gitterpunktmenge ist wieder komprimiert; somit haben wir ein Beispiel eines elementaren zy-Umbaus vor uns.

Ein weiteres Beispiel entnehmen wir aus Tafel III. Wir betrachten die in der Mitte der Tafel in doppelter sechseckiger Umrahmung eingeschlossene Figur einer $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^3_{13}$, für welche die gemäß Nr. **4** zugehörigen Partitionen $\mathfrak{A}' = (7, 4, 2)$, $\mathfrak{A}'' = (6, 5, 2)$, $\mathfrak{A}''' = (7, 5, 1)$ innerhalb der Umrahmung mit vermerkt sind. Die vier (durch ◉ markierten) Eckpunkte von $\mathfrak{R}$ haben die Koordinaten $E_1 = (1, 3, 2)$, $E_2 = (1, 1, 3)$, $E_3 = (2, 2, 2)$, $E_4 = (3, 2, 1)$. Wenn wir den Eckpunkt E_3 (das ist die eine mit ◉ markierte Ecke des in der Figur enthaltenen Würfels) von unserer Gitterpunktmenge wegnehmen und ihn ersetzen durch den Punkt (2, 3, 1), dann gelangen wir zu jener, in Tafel III links

---

[52b] Ein solcher elementarer zy-Umbau einer $\mathfrak{R}^3_m$ soll selbst vom Typus I, bzw. II, bzw. III heißen, wenn die einzelnen parallelen Umbauten der ihn bildenden Schar gemäß Anm. 52a von diesem Typus sind.

[53] Die zu $\mathfrak{R}$ gehörenden Gitterpunkte sind durch kleine schwarz ausgefüllte Kreise ● gekennzeichnet. Die mit x, y, z bezeichneten Halbgeraden sollen dabei nicht die Koordinatenachsen bedeuten, sondern die ihnen parallelen vom Punkt $(x = 1, y = 1, z = 1)$ ausgehenden Geraden. (Diese letzte Bemerkung über die eingezeichneten drei Halbgeraden betrifft nur die hier, für Nr. **28**, maßgebliche Auffassung der Fig. 2 und weicht von der späteren Auffassung in Nr. **38** ff. ab; vgl. Anm. 78.)

unten gezeichneten komprimierten Gitterpunktmenge, zu der die Partitionen $\mathfrak{A}' = (7, 4, 2)$, $\mathfrak{A}'' = (6, 4, 3)$, $\mathfrak{A}''' = (8, 4, 1)$ gehören. Dabei handelt es sich auch hier um einen elementaren zy-Umbau der betrachteten Menge $\mathfrak{R}$, wobei jetzt $\eta' = 2$, $\zeta' = 2$, $\eta'' = 3$, $\zeta'' = 1$, $\xi_1 = \xi_2 = 2$ ist. Wegen $\xi_1 = \xi_2$ umfaßt hier die „Schar paralleler zy-Umbauten" nur einen einzigen zy-Umbau in der einen Ebene $x = \xi_1 = \xi_2$.

Ein weiteres Beispiel eines elementaren Umbaues derselben $\mathfrak{R}^3_{13}$ erhält man, wenn man den Eckpunkt E_1 ersetzt durch den Punkt (1, 4, 1), wodurch man zu jener ebenfalls in Tafel III gezeichneten komprimierten Gitterpunktmenge gelangt, deren zugehörige Partitionen $\mathfrak{A}' = (7, 4, 2)$, $\mathfrak{A}'' = (6, 5, 1, 1)$, $\mathfrak{A}''' = (8, 4, 1)$ sind[54].

29. Die in Nr. **27** gegebene Definition des elementaren zy-Umbaues einer Menge $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^3_m$ enthält die Forderung, daß durch die betrachtete Schar paralleler zy-Umbauten der einzelnen Teilmengen $\mathfrak{R}^2(\xi)$ eine dreidimensionale Gitterpunktmenge entsteht, die wieder komprimiert ist. Diese letztere Forderung wollen wir noch etwas anders ausdrücken. Dabei wird es bequem sein, die Menge $\mathfrak{H} = \mathfrak{Q} - \mathfrak{R}$ aller nicht zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Gitterpunkte mit positiven Koordinaten sowie jene Menge $\mathfrak{G}$ zu benützen, die aus $\mathfrak{R}$ durch Hinzunahme aller Gitterpunkte des $\mathfrak{R}^3$ mit wenigstens einer Koordinate $\leqq 0$ entsteht (vgl. Nr. **19**). Wenn nun der betrachtete Umbau von $\mathfrak{R}$ darin besteht, daß für jeden der Ungleichung (15) genügenden Wert ξ der Punkt (ξ, η', ζ') durch den Punkt (ξ, η'', ζ'') ersetzt wird, dann wird die so aus $\mathfrak{R}$ ent-

---

[54] Auf alles das, was sonst in Tafel III dargestellt ist, kommen wir später (Nr. **35**) zu sprechen. Doch sei auf einen elementaren Umbau hingewiesen, der wieder an derselben Menge $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^3_{13}$ ausführbar ist und bei dem gleichzeitig zwei Gitterpunkte versetzt werden. Allerdings handelt es sich nicht um einen zy-Umbau, sondern um einen zx-Umbau (bei dessen Definition nur die Rolle von x und y in der Definition des zy-Umbaues zu vertauschen ist); er wird dargestellt durch den Übergang von unserer Menge $\mathfrak{R}$ zu jener anderen komprimierten Gitterpunktmenge (mit den zugehörigen Partitionen 7222 | 652 | 931), zu der in Tafel III die strich-punktierte Linie mit einer beigesetzten (2) führt, und die man erhält, wenn man $\xi' = 2$, $\zeta' = 2$, $\xi'' = 4$, $\zeta'' = 1$, $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 1$ nimmt, wenn man also die Punkte (2, 2, 2), (2, 1, 2) ersetzt durch die Punkte (4, 2, 1), (4, 1, 1).

stehende Gitterpunktmenge $\mathfrak{R}'$ offenbar dann und nur dann komprimiert sein, wenn jeder der drei Punkte

$$L_1 = (\xi_1 + 1, \eta', \zeta'),\ L_2 = (\xi_2, \eta' + 1, \zeta'),\ L_3 = (\xi_2, \eta', \zeta' + 1)$$

zu $\mathfrak{H}$ gehört und jeder der drei Punkte

$$M_1 = (\xi_2 - 1, \eta'', \zeta''),\ M_2 = (\xi_1, \eta'' - 1, \zeta''),$$
$$M_3 = (\xi_1, \eta'', \zeta'' - 1)$$

zu $\mathfrak{G}$. Wenn wir aber beachten, daß der Ersatz des Punktes (ξ_2, η', ζ') durch den Punkt (ξ_2, η'', ζ'') ein elementarer zy-Umbau von $\mathfrak{R}^2(\xi_2)$, ebenso der Ersatz von (ξ_1, η', ζ') durch (ξ_1, η'', ζ'') ein elementarer zy-Umbau von $\mathfrak{R}^2(\xi_1)$ sein soll, so ist die Zugehörigkeit der Punkte L_2, L_3 zu $\mathfrak{H}$ sowie die Zugehörigkeit der Punkte M_2, M_3 zu $\mathfrak{G}$ hierin schon enthalten. Es bleiben also nur mehr die auf L_1 und M_1 bezüglichen Bedingungen, d. h. wir haben

Satz 13. Eine Schar paralleler elementarer zy-Umbauten jener Teilmengen $\mathfrak{R}^2(\xi)$, für welche ξ der Ungleichung (15) genügt, stellt dann und nur dann einen elementaren zy-Umbau von $\mathfrak{R}_m^3$ dar, wenn der Punkt $(\xi_1 + 1, \eta', \zeta')$ zu $\mathfrak{H}$ und der Punkt $(\xi_2 - 1, \eta'', \zeta'')$ zu $\mathfrak{G}$ gehört.

Da außer $L_1 = (\xi_1 + 1, \eta', \zeta')$, — zugleich mit L_2, L_3, — auch die Punkte $(\xi_1, \eta' + 1, \zeta')$, $(\xi_1, \eta', \zeta' + 1)$ zur (antikomprimierten) Menge $\mathfrak{H}$ gehören, so ist der Punkt $E = (\xi_1, \eta', \zeta')$ gemäß Nr. **18** ein Eckpunkt von $\mathfrak{R}$ und er ist offenbar der einzige Eckpunkt von $\mathfrak{R}$, der beim Umbau weggenommen wird und somit nicht zu den Punkten der umgebauten Menge $\mathfrak{R}'$ gehört. Außerdem ist sofort zu sehen, daß es nicht zwei verschiedene elementare zy-Umbauten von $\mathfrak{R}$ geben kann, bei denen derselbe Eckpunkt weggenommen und durch einen anderen Gitterpunkt ersetzt wird. Es gilt also

Satz 14. Von jedem elementaren zy-Umbau einer $\mathfrak{R}_m^3$ wird ein einziger Eckpunkt von $\mathfrak{R}_m^3$ betroffen. Verschiedene Umbauten betreffen stets verschiedene Eckpunkte.

Daher braucht man, um alle an einer $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_m^3$ ausführbaren elementaren zy-Umbauten zu erhalten, nur der Reihe nach die einzelnen Eckpunkte von $\mathfrak{R}$ vorzunehmen und zu prüfen, ob es einen elementaren zy-Umbau gibt, von dem dieser Eckpunkt betroffen wird[55]. So erhält man beispielsweise in Tafel II bei der mit A bezeichneten komprimierten Gitterpunktmenge zwei elementare zy-Umbauten, — sie betreffen die Eckpunkte (1, 3, 2) und (2, 1, 3), — während zum dritten Eckpunkt (3, 2, 1) kein zy-Umbau gehört. Die Figuren der einzelnen Gitterpunktmengen (nebst den zugehörigen Partitionen) sind in Tafel II durch Recktecke umrahmt. Von dem Rechteck, das zu der mit A bezeichneten Gitterpunktmenge $\mathfrak{R}$ gehört, führen zwei Pfeile zu den beiden Rechtecken, in denen jene Gitterpunktmengen dargestellt sind, die aus $\mathfrak{R}$ durch einen elementaren zy-Umbau erhalten werden. Die entsprechende Bedeutung haben alle anderen Pfeile in Tafel II (vgl. Nr. **34**).

§ 7. Der Hauptsatz über den Umbau dreidimensionaler komprimierter Gitterpunktmengen.

30. In § 6 wurde erklärt, was unter einem elementaren zy-Umbau einer komprimierten $\mathfrak{R}_m^3$ zu verstehen ist. Allgemein sprechen wir von einem „zy-Umbau" dann, wenn entweder ein elementarer zy-Umbau oder eine Folge elementarer zy-Umbauten vorliegt.

Ist $\mathfrak{R}$ eine komprimierte dreidimensionale Gitterpunktmenge vom Grad m, sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die gemäß Nr. **4** zu $\mathfrak{R}$ gehörenden Partitionen von m und geht aus $\mathfrak{R}$ durch einen zy-Umbau die komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{R}'$ hervor, dann ist aus der gegebenen Erklärung eines „zy-Umbaues" ersichtlich, daß von den

[55] In dem Beispiel der in der Mitte von Tafel III dargestellten Menge $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{13}^3$ haben wir (vgl. Nr. **28**) zu zwei von den vier Eckpunkten E_1, E_2, E_3, E_4, nämlich zu E_3 und zu E_1 je einen, diesen Eckpunkt betreffenden elementaren zy-Umbau besprochen. Zu den beiden anderen Ecken E_2 und E_4 gibt es keinen solchen Umbau, u. zw. beidemal einfach deshalb nicht, weil in der Ebene $x = 1$, bzw. $x = 3$, in der der Eckpunkt E_2, bzw. E_4 liegt, gar kein zweidimensionaler elementarer zy-Umbau existiert, der an der betreffenden Ecke von $\mathfrak{R}_2(1)$ bzw. $\mathfrak{R}_2(3)$ ausführbar wäre.

drei zu $\mathfrak{K}'$ gehörenden Partitionen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ notwendig die erste, $\mathfrak{A}'$, mit der entsprechenden Partition $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{K}$ übereinstimmen muß, da ja jeder bei einem solchen Umbau aus einer Lage in eine neue Lage verbrachte Gitterpunkt dabei die Ebene $x = \text{const.}$, in der er sich befindet, nicht verläßt, sodaß für jedes μ die Anzahl a'_μ der Gitterpunkte von $\mathfrak{K}'$ in der Ebene $x = \mu$ übereinstimmt mit der Anzahl a_μ der Gitterpunkte von $\mathfrak{K}$ in dieser Ebene.

Führt man die über alle Gitterpunkte von $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^3$ erstreckten Summen $H_x = \Sigma x$, $H_y = \Sigma y$, $H_z = \Sigma z$ ein (vgl. Nr. **23**), bezeichnet man mit H'_x, H'_y, H'_z die entsprechenden Summen für $\mathfrak{K}'$, so hat man dem Gesagten gemäß jedenfalls $H'_x = H_x$, während andererseits

$$H'_y > H_y, \quad H'_z < H_z \tag{16}$$

sein muß[56], da ja die Gitterpunkte, die ihre Lage ändern, in ihrer y-Koordinate wachsen, in ihrer z-Koordinate abnehmen.

31. Wir betrachten nun für eine spezielle Partition $\mathfrak{A}_0$ von m die Gesamtheit $\Gamma_1(\mathfrak{A}_0)$ aller solchen komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}$, daß von den drei zu $\mathfrak{K}$ gehörigen Partitionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die erste mit $\mathfrak{A}_0$ übereinstimmt[57]: $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0$. Es ist dann klar, daß man durch irgend einen zy-Umbau (desgl. durch einen yz-Umbau) niemals diese Gesamtheit $\Gamma_1(\mathfrak{A}_0)$ verläßt.

Übrigens ist diese Gesamtheit gewiß nicht leer, da sie ja die beiden Gitterpunktmengen

$$\underset{\vee}{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}(\mathfrak{A}_0 \mid \mathfrak{A}_0^{-1} \mid m) \text{ und } \hat{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}(\mathfrak{A}_0 \mid m \mid \mathfrak{A}_0^{-1})$$

enthält, von denen die erste, $\underset{\vee}{\mathfrak{K}}$, ganz in $z = 1$ liegt und durch die zugehörigen Partitionen[58] $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_0^{-1}$, $\mathfrak{C} = (m)$ ein-

---

[56] Unter Heranziehung der l. c. [1] (vgl. Anm. 46) eingeführten Ordnungsbeziehungen zwischen Partitionen hat man überdies:

$$\mathfrak{B} > \mathfrak{B}', \quad \mathfrak{C} < \mathfrak{C}'.$$

[57] Der Index 1 in der Bezeichnung $\Gamma_1(\mathfrak{A}_0)$ weist darauf hin, daß $\mathfrak{A}$ die erste der drei zugehörigen Partitionen ist; vgl. Anm. 97, wo dieselbe Gesamtheit durch $\Gamma^{(3)}$ $(\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_0)$ bezeichnet wird.

[58] Es bedeutet $\mathfrak{A}_0^{-1}$ die zu $\mathfrak{A}_0$ konjugierte Partition; vgl. Nr. **5** und Monatshefte, l. c. [6]. — Wegen der kurz mit (m) und (1^m) bezeichneten Partitionen vgl. Anm. 3a.

deutig bestimmt ist, während die zweite, $\hat{\mathfrak{K}}$, ganz in $y = 1$ liegt und eindeutig bestimmt ist[59] durch die zugehörigen Partitionen $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B} = (m)$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_0^{-1}$. Dabei ist $\hat{\mathfrak{K}}$ stets $\neq \check{\mathfrak{K}}$, außer es ist[60] $\mathfrak{A}_0 = (1^m)$.

Ferner umfaßt die Gesamtheit $\Gamma_1(\mathfrak{A}_0)$ sicher nur endlich viele[61] Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}_m^3$.

Das Ziel der folgenden Überlegungen (in §§ 7 bis 9) ist es nun zu zeigen, daß man innerhalb der Gesamtheit $\Gamma_1(\mathfrak{A}_0)$ durch zy-Umbauten und ihre inversen Prozesse (yz-Umbauten) von jeder Menge $\mathfrak{K}$ zu jeder anderen gelangen kann[62]. Genauer gesagt wollen wir die beiden folgenden Sätze beweisen:

Satz 15. Es sei $\mathfrak{K}$ eine in der Gesamtheit $\Gamma_1(\mathfrak{A}_0)$ enthaltene komprimierte Gitterpunktmenge m-ten Grades, es sei also $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0$, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die drei zu $\mathfrak{K}$ gehörenden Partitionen von m sind. Wenn dann $\mathfrak{K}$ verschieden ist von der Gitterpunktmenge $\check{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}(\mathfrak{A}_0 \mid \mathfrak{A}_0^{-1} \mid m)$, so kann man von $\mathfrak{K}$ zu $\check{\mathfrak{K}}$ durch einen zy-Umbau gelangen, d. h. durch eine ein- oder mehrgliedrige Kette von elementaren zy-Umbauten.

Satz 16. Es sei $\mathfrak{K}$ eine von $\hat{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}(\mathfrak{A}_0 \mid m \mid \mathfrak{A}_0^{-1})$ verschiedene Gitterpunktmenge aus $\Gamma_1(\mathfrak{A}_0)$; dann kann man von $\mathfrak{K}$ zu $\hat{\mathfrak{K}}$ durch einen yz-Umbau gelangen, d. h. durch eine Kette elementarer yz-Umbauten.

Im wesentlichen handelt es sich hier um einen einzigen Satz (Hauptsatz über den Umbau). Ersichtlich geht nämlich

---

[59] Im allgemeinen ist eine $\mathfrak{K}_m^3$ durch ihre zugehörigen Partitionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nicht eindeutig bestimmt, wohl aber hier, wo es sich eigentlich um zweidimensionale komprimierte Gitterpunktmengen handelt.

[60] In diesem Fall besteht $\hat{\mathfrak{K}} = \check{\mathfrak{K}}$ aus den m Gitterpunkten $(\xi, 1, 1)$ mit $1 \leqq \xi \leqq m$ und es ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{C} = (m)$.

[61] Die Endlichkeit von $\Gamma_1(\mathfrak{A}_0)$ folgt einfach daraus, daß die Gesamtheit aller Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}_m^3$ von gegebenem Grad endlich ist; jede $\mathfrak{K}_m^3$ ist ja Teilmenge der Gitterpunktmenge $\mathfrak{J}^3(m)$ (vgl. Nr. 49), die alle m^3 Gitterpunkte mit positiven Koordinaten $\leqq m$ umfaßt und als endliche Menge hat $\mathfrak{J}^3(m)$ nur endlich viele Teilmengen.

[62] Von dem trivialen Fall $\mathfrak{A}_0 = (1^m)$ — (vgl. Anm. 60) —, wo $\Gamma_1(\mathfrak{A}_0)$ nur eine einzige Menge $\mathfrak{K}$ umfaßt, kann natürlich abgesehen werden.

Satz 16 aus Satz 15 einfach durch Vertauschung der Koordinaten y und z hervor, sodaß es genügt, Satz 15 zu beweisen. Der Beweis dieses Satzes soll in § 9 erbracht werden. Wir wollen aber sogleich (§ 8) die Folgerungen besprechen, die sich aus den Sätzen 15 und 16 für die Zusammenhänge unter den komprimierten Gitterpunktmengen gleichen Grades ergeben.

§ 8. Stammbäume für die Mengen $\mathfrak{R}_m^3$ vom gleichen Grad m.

32. Die Schilderung dieser Zusammenhänge geschieht wohl am einfachsten an Hand der figürlichen Darstellung in den Tafeln I, II und III. Beginnen wir mit Tafel I. Hier sind beispielsweise in Fig. Ic für den Grad $m = 4$ sämtliche dreidimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen vierten Grades, — es sind ihrer 13, — dargestellt[63]. Greifen wir aus dieser Gesamtheit eine Teilgesamtheit heraus, für welche die Partition $\mathfrak{A}$ die gleiche ist; wir wählen etwa $\mathfrak{A}_0 = (3, 1)$. Die zugehörige Teilgesamtheit — nach der oben eingeführten Bezeichnungsweise mit $\Gamma_1(3, 1)$ zu bezeichnen — besteht aus 3 komprimierten Gitterpunktmengen. Die — in Fig. Ic den Bildern dieser Gitterpunktmengen beigefügten — zugehörigen Partitionen $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}$ sind[64]

$$(3,1 \mid 4 \mid 2,1^2), \quad (3,1 \mid 3,1 \mid 3,1), \quad (3,1 \mid 2,1^2 \mid 4);$$

die entsprechenden Gitterpunktmengen selbst mögen $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$, $\mathfrak{K}'''$ heißen. Da $(2,1^2)$ nichts anderes ist, als die zu $\mathfrak{A}_0 = (3,1)$ konjugierte Partition, so ist $\mathfrak{K}'$, bzw. $\mathfrak{K}'''$ nichts anderes als die oben mit $\hat{\mathfrak{K}}$, bzw. $\check{\mathfrak{K}}$ bezeichnete Gitterpunktmenge, für welche die zugehörigen Partitionen $\mathfrak{A}_0 \mid m \mid \mathfrak{A}_0^{-1}$ bzw. $\mathfrak{A}_0 \mid \mathfrak{A}_0^{-1} \mid m$ sind. In Fig. Ic haben nun einfache, voll ausgezogene Linien zwischen den die einzelnen Gitterpunktmengen repräsentierenden Sechs-

[63] Das Bild jeder dieser Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}_4^3$ ist in einen sechseckigen Rahmen eingeschlossen, innerhalb dessen auch die drei zu $\mathfrak{K}_4^3$ gehörigen Partitionen $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}$ angegeben sind.

[64] Wenn wir in diesem Beispiel ($m = 4$) die einzelnen Gitterpunktmengen einfach durch Angabe der zugehörigen Partitionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ kennzeichnen können, so ist das bei größeren Werten von m durchaus nicht immer der Fall; vgl. Anm. 71.

ecken die Bedeutung von elementaren zy-Umbauten, wobei ein solcher zy-Umbau in Richtung des gezeichneten Pfeiles zu verstehen ist. So führt ein elementarer zy-Umbau von $\mathfrak{K}' = \widehat{\mathfrak{K}}$ zu $\mathfrak{K}''$, ein weiterer von $\mathfrak{K}''$ zu $\mathfrak{K}''' = \underset{\smile}{\mathfrak{K}}$. Dieselben Linien, entgegengesetzt zur Pfeilrichtung durchlaufen, stellen natürlich elementare yz-Umbauten dar. Wir haben hier ein besonders einfaches Beispiel für die Sätze 15 und 16 vor uns. In Anlehnung an die im zweidimensionalen Fall (§ 5) und vorher an anderer Stelle[65] gebrauchte Bezeichnung wollen wir den eben beschriebenen auf die 3 Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$, $\mathfrak{K}'''$ bezüglichen Teil der Figur Ic den Stammbaum der Gesamtheit $\Gamma_1(3, 1)$ von komprimierten Gitterpunktmengen nennen.

In analoger Weise enthält die Fig. Ic noch weitere Gesamtheiten $\Gamma_1(\mathfrak{A}_0)$ und die zugehörigen Stammbäume: Für $\mathfrak{A}_0 = (4)$ eine Gesamtheit von 5 komprimierten Gitterpunktmengen[66], für $\mathfrak{A}_0 = (2^2)$, desgleichen für $\mathfrak{A}_0 = (2, 1^2)$ eine Gesamtheit von 2 Gitterpunktmengen, schließlich für $\mathfrak{A}_0 = (1^4)$ eine einzige komprimierte Gitterpunktmenge. (Wegen der abgekürzten Bezeichnung der Partitionen, z. B. (2^2) für $(2, 2)$, vgl. Anm. 3a.)

33. In gleicher Weise wie die elementaren zy-Umbauten zwischen den verschiedenen $\mathfrak{K}_4^3$, so sind in derselben Fig. Ic auch die elementaren zx- und yx-Umbauten dargestellt, erstere durch strich-punktierte Linien, letztere durch Doppel-Linien. So ist z. B. am rechten oberen Rand der Figur der Stammbaum aller jener 5 komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}_4^3$ dargestellt, die zur Gesamtheit $\Gamma_2(4)$ gehören, also durch $\mathfrak{B} = (4)$ gekennzeichnet sind; am unteren Rand der Figur aber hat man den Stammbaum der durch $\mathfrak{C} = (4)$ gekennzeichneten Gesamtheit $\Gamma_3(4)$.

---

[65] Vgl. l. c.[1], § 7, S. 19–21.

[66] Der zugehörige Stammbaum deckt sich im wesentlichen mit dem Stammbaum aller Partitionen der Zahl 4 (über den „Stammbaum aller Partitionen einer Zahl p" vgl. l. c.[65]). Um dies zu sehen, braucht man in der Gesamtheit $\Gamma_1(\mathfrak{A}_0) = \Gamma_1(4)$ nur auf die zu den einzelnen Gitterpunktmengen gehörigen Partitionen $\mathfrak{B}$ zu achten; die Partitionen $\mathfrak{C}$ sind dann einfach $= \mathfrak{B}^{-1}$. — Ganz analog deckt sich allgemein der Stammbaum der Gesamtheit $\Gamma_1(\mathfrak{A}_0)$ für $\mathfrak{A}_0 = (m)$ im wesentlichen mit dem Stammbaum der Partitionen der Zahl m, wobei man statt der Gitterpunktmengen aus $\Gamma_1(m)$ nur die zugehörigen Partitionen $\mathfrak{B}$ zu nehmen braucht und wobei allemal $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}^{-1}$ ist.

Das was in Fig. Ic für den Grad $m = 4$ dargestellt ist, findet man in den noch einfacheren Figuren Ia und Ib für die Gradzahlen $m = 2$ und $m = 3$. Der Fall $m = 1$ macht eine besondere Darstellung entbehrlich, da es hier nur eine einzige komprimierte Gitterpunktmenge gibt, die aus dem einen Gitterpunkt mit den Koordinaten $x = y = z = 1$ besteht.

34. An Hand weiterer Figuren werde noch besprochen, wie bei höheren Gradzahlen kompliziertere Verhältnisse vorliegen. Beschränken wir uns zunächst etwa nur auf die zy- bzw. yz-Umbauten. Bei dem in Nr. **32** besprochenen Beispiel des Stammbaumes für die Gesamtheit $\Gamma_1(3, 1)$ enthält der Stammbaum eine einzige von $\widehat{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}'$ über $\mathfrak{R}''$ nach $\underset{\vee}{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}'''$ führende Folge. Es gibt also zu jeder komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{R}$ aus $\Gamma_1(3,1)$ nur eine einzige Art, um von ihr aus durch einen elementaren zy-Umbau zu einer anderen Gitterpunktmenge der Gesamtheit zu gelangen (natürlich abgesehen von der Gitterpunktmenge $\mathfrak{R} = \underset{\vee}{\mathfrak{R}}$, die überhaupt keinen zy-Umbau gestattet). Das Entsprechende gilt bei $m = 4$ auch für alle anderen Gesamtheiten $\Gamma_1(\mathfrak{A}_0)$: der Stammbaum verläuft in einer einfachen Folge von $\widehat{\mathfrak{R}}$ zu $\underset{\vee}{\mathfrak{R}}$.

Was hier an den Stammbäumen für $m = 4$ festgestellt wurde, gilt ebenso für die in Fig. Ia und Ib dargestellten Stammbäume für $m = 2$ und $m = 3$ und ließe sich auch für $m = 5$ ohne Mühe bestätigen[67]. Für $m \geqq 6$ aber liegen die Dinge insoferne anders, als dann schon Stammbäume mit Verzweigungen auftreten; anders gesagt, es kommt vor, daß von einer komprimierten Gitterpunktmenge auf mehr als eine Art ein Übergang durch einen elementaren zy-Umbau zu einer anderen komprimierten Gitterpunktmenge ausführbar ist. So treten bei $m = 6$ im Stammbaum für die aus 11 komprimierten Gitterpunktmengen bestehende Gesamtheit $\Gamma_1(6)$ an zwei Stellen Verzweigungen auf[68].

[67] Man hat hier 24 komprimierte Gitterpunktmengen $\mathfrak{R}_5^3$, die sich auf die 7 Teilgesamtheiten $\Gamma_1(5)$, $\Gamma_1(4, 1)$, $\Gamma_1(3, 2)$, $\Gamma_1(3, 1^2)$, $\Gamma_1(2^2, 1)$, $\Gamma_1(2, 1^3)$, $\Gamma_1(1^5)$ verteilen lassen (diese Teilgesamtheiten umfassen der Reihe nach 7, 5, 4, 3, 2, 2, 1 Gitterpunktmengen). Für jede Teilgesamtheit $\Gamma_1(\mathfrak{A}_0)$ besteht der Stammbaum aus einer einfachen Folge.

[68] Der hier erwähnte Stammbaum für $\Gamma_1(6)$ deckt sich im wesentlichen (vgl. Anm. 66) mit dem l. c. [47] dargestellten Stammbaum für die 11 Partitionen der Zahl 6.

Tafel II möge zeigen, wie kompliziert die Dinge bei etwas größeren Werten von m aussehen können. Es ist hier $m = 13$ gewählt und ein Ausschnitt aus dem Stammbaum für die durch $\mathfrak{A}_0 = (7, 4, 2)$ gekennzeichnete Gesamtheit $\Gamma_1(7, 4, 2)$ dargestellt. Dabei sei bemerkt, daß in Tafel II nur 32 komprimierte Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}^3_{13}$ mit $\mathfrak{A} = (7, 4, 2)$ aufgenommen sind[69], während der volle — die ganze Gesamtheit $\Gamma_1(7, 4, 2)$ darstellende — Stammbaum 70 komprimierte Gitterpunktmengen umfassen würde[70]; in Tafel II fehlt nämlich sowohl der obere in $\widehat{\mathfrak{K}}$ gipfelnde, als der untere in $\underset{\smile}{\mathfrak{K}}$ endende Teil des Stammbaumes und nur das mittlere Stück ist dargestellt. Doch ist im oberen ebenso wie im unteren Teil der Tafel durch angesetzte Linienstücke (mit Pfeilen) der Anschluß an die nicht dargestellten Teile des Stammbaums angedeutet. Wie man sieht ist hier keine Rede mehr von einer einfachen Folge von Gitterpunktmengen; vielmehr führt von den meisten der dargestellten Gitterpunktmengen mehr als ein elementarer zy-Umbau zu anderen Gitterpunktmengen und das Gleiche gilt von den elementaren yz-Umbauten, die durch die entgegengesetzt der Pfeilrichtung zu durchlaufenden Linien dargestellt sind[71, 72].

---

[69] Die Darstellung ist ähnlich, wie in Anm. 63 geschildert, nur daß hier das Bild jeder einzelnen $\mathfrak{K}^3_{13}$ in rechteckigem Rahmen eingeschlossen ist. Außerdem sind in Tafel II nur die zy-Umbauten (durch einfache Linien mit Pfeil) dargestellt, nicht aber außerdem (wie in Tafel I) die zx- und yx-Umbauten.

[70] Vgl. Nr. 65, Formel (43).

[71] An den beiden in Tafel II (nahe der Mitte befindlichen) mit A und B bezeichneten Gitterpunktmengen erkennt man, daß es vorkommen kann, daß zu verschiedenen komprimierten Gitterpunktmengen dieselben Partitionen $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}$ gehören; vgl. Anm. 64, sowie § 2, Nr. 6. [Siehe ferner eine Arbeit im Journ. f. Math., „Komprimierte Gitterpunktmengen und eine additiv-zahlentheoretische Aufgabe", sowie diese Sitz.ber., Sitzung vom 6. 7. 1940, Punkt 2, Jahrgg. 1940, S. 9* (Zusatz bei der Korrektur)].

[72] Tafel II zeigt noch ein Beispiel dafür, daß es für $n \geqq 3$ vorkommen kann, daß n-dimensionale komprimierte Gitterpunktmengen existieren, die in den zugehörigen Partitionen $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \ldots, \mathfrak{A}^{(n-1)}$ übereinstimmen, jedoch nicht in der Partition $\mathfrak{A}^{(n)}$ (im Gegensatz dazu ist für $n = 2$ die Partition $\mathfrak{A}''$ stets durch $\mathfrak{A}'$ eindeutig als die zu $\mathfrak{A}'$ „konjugierte" Partition bestimmt). Wählt man nämlich $n = 3$, $m = 13$, $\mathfrak{A} = (7, 4, 2)$, $\mathfrak{B} = (7, 4, 2)$, so erhält man vier komprimierte Gitterpunktmengen, zu denen diese Partitionen gehören. Für

35. Natürlich gelangt man zu noch komplizierteren Bildern, wenn man in derselben Figur, so wie dies für $m = 2, 3$ und 4 in Tafel I geschah, nicht nur die zy-Umbauten sondern auch die zx- und die yx-Umbauten darstellt, wenn man also die dreifache Aufteilung in die Gesamtheiten $\Gamma_1(\mathfrak{A}_0)$, in die Gesamtheiten $\Gamma_2(\mathfrak{B}_0)$ und in die Gesamtheiten $\Gamma_3(\mathfrak{C}_0)$ nebst ihren Stammbäumen ersichtlich macht.

Von einem solchen Gesamtbild für $m = 13$ gibt Tafel III einen kleinen Ausschnitt, wobei zu bemerken ist: In das Bild aufgenommen sind, außer der in der Mitte in doppeltem sechseckigen Rahmen dargestellten Gitterpunktmenge $\mathfrak{R}^*$, gewissermaßen nur jene aus der unmittelbaren Umgebung von $\mathfrak{R}^*$, nämlich nur jene, die aus $\mathfrak{R}^*$ durch einen elementaren Umbau (zy-, yz-, zx-, xz-, yx- oder xy-Umbau) herleitbar sind. Demgemäß enthält dieser Ausschnitt außer $\mathfrak{R}^*$ nur 12 weitere komprimierte Gitterpunktmengen, während die volle Figur (also das Analogon für $m = 13$ zu den in Tafel I dargestellten Fällen $m = 2$, $m = 3$ und $m = 4$) insgesamt 2481 Gitterpunktmengen enthalten würde[73].

Bemerkt sei, daß $\mathfrak{R}^*$ (mit $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C} = 7, 4, 2 \mid 6, 5, 2 \mid 7, 5, 1$) auch in Tafel II (Reihe 2 von unten, Platz 5) sich findet, wo auch jene Gitterpunktmengen vorkommen, die in Tafel III mit $\mathfrak{R}^*$ durch einfache Linien verbunden erscheinen (also durch Linien, die einem zy- oder yz-Umbau entsprechen). Somit enthält Ta-

zwei von ihnen, — es sind die in Anm. 71 erwähnten, — ist $\mathfrak{C} = (7, 4, 2)$, für die beiden anderen, die in Tafel II in der gleichen Zeile wie die beiden vorgenannten dargestellt sind, erhält man $\mathfrak{C} = (6^2, 1)$ und $\mathfrak{C} = (8, 3, 1^2)$. (Das gleiche Vorkommnis tritt übrigens schon für $m = 6$ auf, wo man leicht feststellt, daß es eine komprimierte Gitterpunktmenge mit den zugehörigen Partitionen $(4, 2 \mid 4, 2 \mid 3, 3)$ gibt und eine andere mit den zugehörigen Partitionen $(4, 2 \mid 4, 2 \mid 4, 1, 1)$, daß es also zwei komprimierte Gitterpunktmengen gibt, die in den Partitionen $\mathfrak{A} = (4, 2)$ und $\mathfrak{B} = (4, 2)$ übereinstimmen, nicht aber in der Partition $\mathfrak{C}$). [Vgl. hiezu noch „Über Tripel konjugierter Partitionen", Math. Abhandl. Hamburg, Bd. 14, sowie diese Sitz.ber., Sitzung vom 5. 10. 1940, Punkt 2, Jahrgg. 1940, S. 10* (Zusatz bei der Korrektur)].

Nebenbei bemerkt, kann es für $n \geqq 3$ auch vorkommen, daß es zu $n - 1$ Partitionen $\mathfrak{A}', \ldots, \mathfrak{A}^{(n-1)}$ derselben Zahl m keine solche n-te Partition $\mathfrak{A}^{(n)}$ gibt, daß eine n-dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge existiert, zu der diese n Partitionen gehören.

[73] Vgl. Nr. **65**, Formel (44).

fel III selbst einen kleinen Ausschnitt aus dem zu $\Gamma_1(7, 4, 2)$ gehörigen Stammbaum (von dem in Tafel II ein größeres Stück vorliegt); zugleich aber enthält Tafel III einen kleinen Ausschnitt des zu $\Gamma_2(6, 5, 2)$, sowie des zu $\Gamma_3(7, 5, 1)$ gehörigen Stammbaumes, der eine durch die strich-punktierten Linien, der andere durch die Doppel-Linien dargestellt[74].

§ 9. Beweis des Hauptsatzes.

36. Um unseren Hauptsatz (Satz 15) zu beweisen, genügt nun der Nachweis des folgenden Satzes:

Satz 17. Wenn die der Gesamtheit $\Gamma_1(\mathfrak{A}_0)$ angehörende komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}$ nicht selbst mit der in Nr. **31** erklärten komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}$ zusammenfällt, dann gibt es wenigstens einen an $\mathfrak{K}$ ausführbaren zy-Umbau U.

Daß mit Satz 17 tatsächlich zugleich Satz 15 mitbewiesen sein wird, ist sofort einzusehen. Denn entweder ist die aus $\mathfrak{K}$ durch U entstehende komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}'$ selbst $= \mathfrak{K}$ oder es läßt sich auf $\mathfrak{K}'$ anstelle von $\mathfrak{K}$ neuerdings Satz 17 anwenden. Ist nun

$$\mathfrak{K},\ \mathfrak{K}',\ \mathfrak{K}'',\ \ldots \tag{17}$$

die so entstehende Folge von Gitterpunktmengen, sind dann H_x, H_y, H_z die gemäß Nr. **30** zu $\mathfrak{K}$ gehörigen Zahlen Σx, Σy, Σz, ferner $H_x^{(\nu)}$, $H_y^{(\nu)}$, $H_z^{(\nu)}$ die entsprechenden zu $\mathfrak{K}^{(\nu)}$ gehörigen Zahlen ($\nu = 1, 2, \ldots$), so folgt aus den gemäß (16), (Nr. **30**), geltenden Ungleichungen[75]

$$H_y < H_y' < H_y'' < \ldots, \quad H_z > H_z' > H_z'' > \ldots,$$

---

[74] Der volle zu $\Gamma_2(6, 5, 2)$ gehörige Stammbaum umfaßt 34, der zu $\Gamma_3(7, 5, 1)$ gehörige 39 komprimierte Gitterpunktmengen; vgl. Anm. 105, Nr. **65**.

[75] oder auch aus den gemäß Anm. 56, Nr. **30**, geltenden Beziehungen

$$\mathfrak{B} > \mathfrak{B}' > \mathfrak{B}'' > \ldots, \quad \mathfrak{C} < \mathfrak{C}' < \mathfrak{C}'' < \ldots,$$

wenn $(\mathfrak{A}_0 \mid \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C})$, $(\mathfrak{A}_0 \mid \mathfrak{B}' \mid \mathfrak{C}')$, $(\mathfrak{A}_0 \mid \mathfrak{B}'' \mid \mathfrak{C}'')$, ... die Partitionen-Systeme sind, die zu den Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$, ... gehören.

daß in dieser Folge (17) niemals dieselbe Gitterpunktmenge wiederkehren kann. Wegen der Endlichkeit der Menge $\Gamma_1(\mathfrak{A}_0)$ (s. Nr. **31**, Anm. 61) muß dann (17) notwendig abbrechen, was gemäß Satz 17 nur so möglich ist, daß ein $\mathfrak{R}^{(\nu)} = \underset{\sim}{\mathfrak{R}}$ ist. Damit aber ist Satz 15 nachgewiesen.

37. Zum Beweis von Satz 17 gehen wir aus von der in Nr. **18** erklärten Menge $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathfrak{R})$ der Eckpunkte von $\mathfrak{R}$; da $\mathfrak{R} \neq \underset{\sim}{\mathfrak{R}}$ ist, also nicht sämtliche Gitterpunkte von $\mathfrak{R}$ in $z = 1$ liegen, so muß es auch solche Eckpunkte von $\mathfrak{R}$ geben, die nicht in $z = 1$ liegen[76]. Sei $G_1 = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ ein solcher Eckpunkt, wobei also

$$\zeta_1 \geqq 2 \tag{18}$$

ist. Wir werden nun ein Verfahren angeben, um — ausgehend von G_1 — zu einem solchen Eckpunkt von $\mathfrak{R}$ zu gelangen, der (im Sinne von Nr. **29**, Satz 14) von einem zugehörigen elementaren zy-Umbau U betroffen wird. Damit wird Satz 17 bewiesen sein.

Bei diesen Betrachtungen lassen sich gewisse Fallunterscheidungen vermeiden, wenn wir wieder (vgl. Nr. **29**) diejenige Menge $\mathfrak{G}$ einführen, die aus $\mathfrak{R}$ erhalten wird, wenn man zu $\mathfrak{R}$ noch alle Gitterpunkte des xyz-Raumes mit wenigstens einer Koordinate $\leqq 0$ hinzunimmt; $\mathfrak{G}$ ist selbst (vgl. Nr. **19**) eine komprimierte Menge (in $\mathfrak{P}$). Mit $\mathfrak{H}$ werde wieder die Menge aller nicht zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Gitterpunkte bezeichnet; $\mathfrak{H}$ besteht also aus allen nicht zu $\mathfrak{R}$ gehörenden Gitterpunkten des ersten Oktanten $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Gewisse im Folgenden auftretende Gitterpunkte, die zu $\mathfrak{G}$ gehören, werden wir mit dem Buchstaben G und einem Index bezeichnen: $G_1, G_4, G_6, G_7, \ldots$, während $H_2, H_3, \ldots$ zu $\mathfrak{H}$ gehörende Punkte bedeuten[77].

38. Das Verfahren, das wir ausgehend vom Eckpunkt G_1 einschlagen werden, verläuft nun verschieden, je nachdem ob der Punkt $P_1 = (\xi_1, \eta_1 + 1, \zeta_1 - 1)$ zu $\mathfrak{H}$ oder zu $\mathfrak{G}$ gehört,

[76] Vgl. die analoge Überlegung in Nr. **22**, Anm. 44.

[77] In den Figuren 2 bis 7 sind Punkte wie G_1, H_2, H_3, G_4 nur mit ihren Nummern 1, 2, 3, 4 bezeichnet. Dabei sind die zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Punkte durch ●, die zu $\mathfrak{H}$ gehörenden durch ○ markiert.

und wir unterscheiden demgemäß bezüglich eines Eckpunktes $G_1 = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ (mit $\zeta_1 \geqq 2$) die Fälle:

A) $P_1 = (\xi_1, \eta_1 + 1, \zeta_1 - 1)$ gehört zu $\mathfrak{H}$;
B) P_1 gehört zu $\mathfrak{G}$.

In jedem dieser Fälle gehört, weil G_1 Eckpunkt ist, der Punkt $H_2 = (\xi_1, \eta_1 + 1, \zeta_1)$ zu $\mathfrak{H}$ und wir wollen von H_2 aus[78] in der negativen z-Richtung wandern, bis wir auf einen zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Punkt stoßen, was im Falle B) bereits beim Punkt P_1, im Falle A) erst bei einem späteren Punkt eintritt.

39. Im Falle A) sei unter allen zu $\mathfrak{H}$ gehörenden Punkten $(\xi_1, \eta_1 + 1, z)$ der Punkt $H_3 = (\xi_1, \eta_1 + 1, \zeta_3)$ derjenige mit kleinstem Wert der z-Koordinate, sodaß $G_4 = (\xi_1, \eta_1 + 1, \zeta_3 - 1)$ zu $\mathfrak{G}$ gehört. Offenbar ist $1 \leqq \zeta_3 \leqq \zeta_1 - 1$ (vgl. Fig. 2, wo $\zeta_1 - \zeta_3 = 2$ gewählt ist; ebenso in Fig. 3). Wir gehen nun von

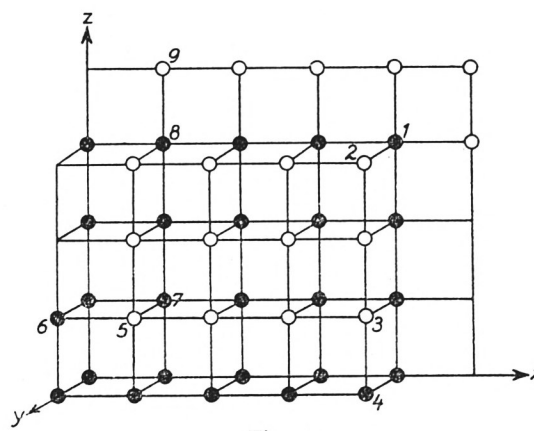


Fig. 2

[78] In Fig. 2 bis 7 ist (vgl. Anm. 77) der Punkt G_1 durch ● und die Ziffer 1, der Punkt H_2 durch O und die Ziffer 2 markiert und Analoges gilt von den anderen Punkten. Bemerkt sei, daß die mit x, y oder z und mit einem Pfeil bezeichneten Geraden in den Figuren 2 bis 7 nicht die Koordinatenachsen selbst sind oder zu sein brauchen; es soll vielmehr durch diese Geraden nur die positive Richtung der drei Achsen gekennzeichnet sein. Es ist also durchaus nicht so, als ob notwendig die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{R}$ gehörenden Gitterpunkte in der gezeichneten Figur enthalten sein müßte, die vielmehr nur als ein Ausschnitt aus der Gesamtfigur anzusehen ist (abweichend von der speziell für Fig. 2 in Nr. **28** zugrundegelegten Auffassung).

H_3 aus in negativer x-Richtung weiter; es sei dann unter allen zu $\mathfrak{H}$ gehörenden Punkten $(x, \eta_1 + 1, \zeta_3)$ der Punkt $H_5 = (\xi_5, \eta_1 + 1, \zeta_3)$ derjenige mit kleinster x-Koordinate, also $G_6 = (\xi_5 - 1, \eta_1 + 1, \zeta_3)$ ein zu $\mathfrak{G}$ gehörender Punkt $(1 \leqq \xi_5 \leqq \xi_1)$. Der Punkt $G_7 = (\xi_5, \eta_1, \zeta_3)$ dessen Koordinaten sämtlich $\leqq$ den entsprechenden von G_1 sind, gehört dann notwendig zu $\mathfrak{G}$ (da $\mathfrak{G}$ eine komprimierte Menge ist). Von G_7 aus wandern wir in positiver z-Richtung und es sei unter den zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Punkten (ξ_5, η_1, z) der Punkt $G_8 = (\xi_5, \eta_1, \zeta_8)$ derjenige mit größter z-Koordinate, also $H_9 = (\xi_5, \eta_1, \zeta_8 + 1)$ ein zu $\mathfrak{H}$ gehörender Punkt. Dabei ist sicher $\zeta_8 \geqq \zeta_1$ da (wegen der Komprimiertheit von $\mathfrak{G}$) der Punkt $Q = (\xi_5, \eta_1, \zeta_1)$ (vgl. Fig. 3) notwendig ebenso wie G_1 zu $\mathfrak{G}$ gehört. Wenn nun, wie in Fig. 2, $\zeta_8 = \zeta_1$ (also $G_8 = Q$) ist, dann sieht man sofort, daß ein elementarer zy-Umbau dadurch bewirkt wird, daß die Gitterpunkte (x, η_1, ζ_1) mit $\xi_5 \leqq x \leqq \xi_1$ übergeführt werden in die Gitterpunkte $(x, \eta_1 + 1, \zeta_3)$; in der auf diese Weise aus $\mathfrak{R}$ entstehenden komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{R}'$ erscheinen also anstelle der Gitterpunkte, die auf der Strecke $G_1 G_8$ liegen[79], nunmehr die Gitterpunkte der Strecke $H_3 H_5$. Dieser elementare zy-Umbau (von dem der Eckpunkt G_1 betroffen wird) ist vom Typus III oder II, je nachdem $\zeta_1 - \zeta_3 \geqq 2$ oder $\zeta_1 - \zeta_3 = 1$ ist[80].

Wenn aber, wie in Fig. 3, $\zeta_8 > \zeta_1$ ist, dann wandern wir von G_8 in positiver x-Richtung; es sei dann unter den zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Punkten (x, η_1, ζ_8) der Punkt $G_{10} = (\xi_{10}, \eta_1, \zeta_8)$ derjenige mit größter x-Koordinate, somit $H_{11} = (\xi_{10} + 1, \eta_1, \zeta_8)$ ein Punkt von $\mathfrak{H}$; da G_8 zu $\mathfrak{G}$, hingegen der Punkt (ξ_1, η_1, ζ_8) zu $\mathfrak{H}$ gehört, so ist $\xi_5 \leqq \xi_{10} \leqq \xi_1 - 1$. Der Punkt $H_{12} = (\xi_{10}, \eta_1 + 1, \zeta_3)$ muß dann ebenso wie H_5 und alle Gitterpunkte der Strecke $H_5 H_{12}$ zu $\mathfrak{H}$ gehören (im Falle $\xi_{10} = \xi_5$ reduziert sich diese Strecke auf einen Punkt). Ein elementarer zy-Umbau U (u. zw. vom Typus III) liegt offenbar vor, wenn die Gitterpunkte (x, η_1, ζ_8) mit $\xi_5 \leqq x \leqq \xi_{10}$ — d. h. die Gitterpunkte der Strecke $G_8 G_{10}$ — übergeführt werden

---

[79] Falls $\xi_5 = \xi_1$ ist (wo dann H_5 mit H_3, desgl. G_8 mit G_1 zusammenfällt), reduziert sich diese Strecke auf einen einzigen Gitterpunkt.

[80] Wegen dieser Typeneinteilung vgl. Nr. **25**, sowie Anm. 51 a und 52 b. In Fig. 2, wo $\zeta_1 - \zeta_3 = 2$ ist, ist Typus III dargestellt.

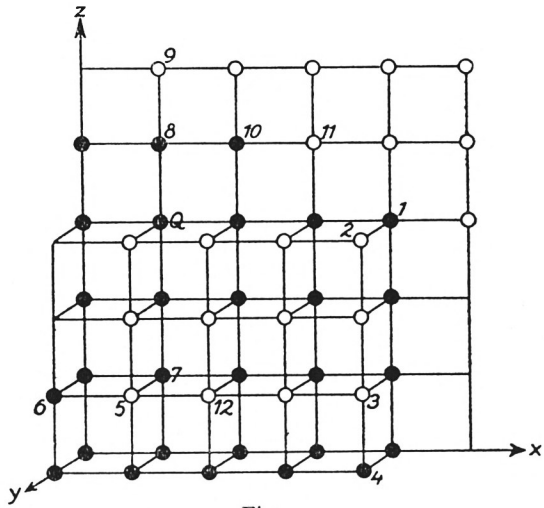


Fig. 3

in die Punkte $(x, \eta_1 + 1, \zeta_3)$, d. h. in die Gitterpunkte der Strecke $H_5 H_{12}$ (der vom Umbau $\mathfrak{U}$ betroffene Eckpunkt ist G_{10}).

Damit ist gezeigt, daß im Falle A) stets ein elementarer zy-Umbau an $\mathfrak{K}$ ausführbar ist.

40. Im Falle B), dem wir uns jetzt zuwenden, ist der (oben mit P_1 bezeichnete) Punkt $G_3 = (\xi_1, \eta_1 + 1, \zeta_1 - 1)$ ein Punkt aus $\mathfrak{G}$. Von G_3 aus wandern wir nun in der positiven y-Richtung; wegen (18) ist $\zeta_1 - 1 \geqq 1$, sodaß wir bei dieser Wanderung notwendig auf Punkte von $\mathfrak{H}$ treffen müssen; es sei dann unter den zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Punkten $(\xi_1, y, \zeta_1 - 1)$ der Punkt $G_4 = (\xi_1, \eta_4, \zeta_1 - 1)$ derjenige mit größter y-Koordinate $(\eta_4 \geqq \eta_1 + 1)$, somit $H_5 = (\xi_1, \eta_4 + 1, \zeta_1 - 1)$ ein Punkt von $\mathfrak{H}$ (vgl. Fig. 4, wo $\eta_4 - \eta_1 = 3$ gewählt ist; ebenso in den Fig. 5 bis 7).

41. Weiterhin ist zu unterscheiden, ob der Punkt $R = P_4 = (\xi_1, \eta_4 + 1, \zeta_1 - 2)$ zu $\mathfrak{H}$ oder zu $\mathfrak{G}$ gehört. Im ersten Falle, der in Fig. 4 dargestellt ist, braucht man nur (von G_4 aus in der positiven x-Richtung wandernd) unter den zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Punkten $(x, \eta_4, \zeta_1 - 1)$ denjenigen mit größter x-Koordinate zu bestimmen; es sei dies der Punkt $G_6 = (\xi_6, \eta_4, \zeta_1 - 1)$, wobei also $H_7 = (\xi_6 + 1, \eta_4, \zeta_1 - 1)$ zu $\mathfrak{H}$ gehört und $\xi_6 \geqq \xi_1$ ist; dann

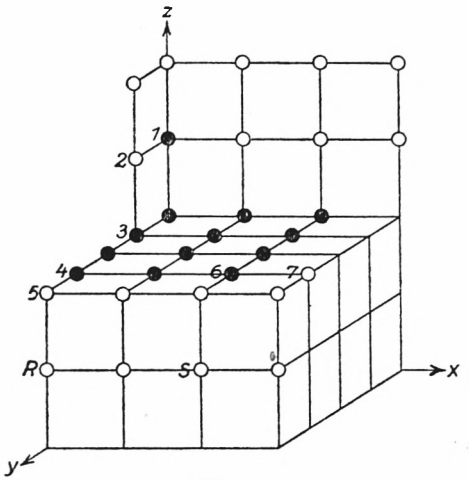


Fig. 4

ist G_6 offenbar ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}$, für den der Fall A) vorliegt, weil (wegen der Antikomprimiertheit von $\mathfrak{H}$) der Punkt $S = P_6 = (\xi_6, \eta_4 + 1, \zeta_1 - 2)$ ebenso wie $R = P_4$ zu $\mathfrak{H}$ gehört. Für diesen Fall A) ist aber die Möglichkeit eines elementaren zy-Umbaues von $\mathfrak{K}$ schon in Nr. **39** nachgewiesen.

42. Demnach können wir weiterhin annehmen, der Punkt $R = P_4$, den wir nunmehr mit $G_6 = (\xi_1, \eta_4 + 1, \zeta_1 - 2)$ bezeichnen wollen, gehöre zu $\mathfrak{G}$ (vgl. Fig. 5). Wir wandern nun

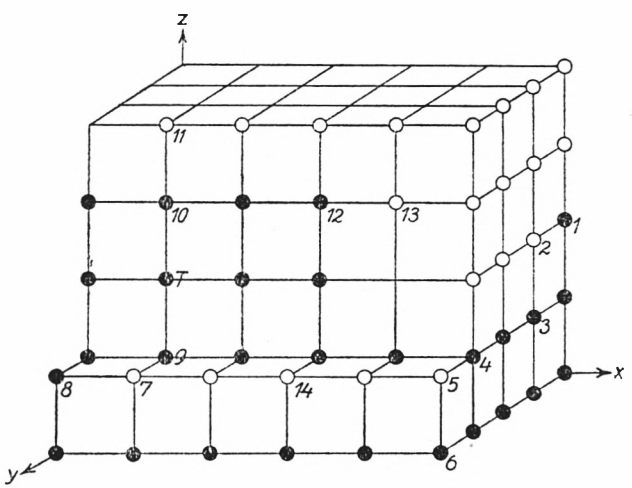


Fig. 5

von H_5 aus in der negativen x-Richtung und es sei $H_7 = (\xi_7, \eta_4 + 1, \zeta_1 - 1)$ unter den zu $\mathfrak{H}$ gehörenden Punkten $(x, \eta_4 + 1, \zeta_1 - 1)$ derjenige mit kleinster x-Koordinate, also $G_8 = (\xi_7 - 1, (\eta_4 + 1, \zeta_1 - 1)$ zu $\mathfrak{G}$ gehörig und $1 \leqq \xi_7 \leqq \xi_1$. (In Fig. 5 ist $\xi_1 - \xi_7 = 4$ gewählt, desgl. in Fig. 6 und 7). Der in negativer y-Richtung an H_7 anschließende Punkt $G_9 = (\xi_7, \eta_4, \zeta_1 - 1)$ gehört offenbar, ebenso wie G_4, zu $\mathfrak{G}$.

43. Nunmehr ist zu unterscheiden, ob der an G_9 in positiver z-Richtung anschließende Punkt $T = (\xi_7, \eta_4, \zeta_1)$ zu $\mathfrak{G}$ oder zu $\mathfrak{H}$ gehört. Der erste in Fig. 5 dargestellte Fall ist rasch zu erledigen: Unter den zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Punkten (ξ_7, η_4, z) bestimmen wir denjenigen mit größter z-Koordinate; es sei dies $G_{10} = (\xi_7, \eta_4, \zeta_{10})$, also $H_{11} = (\xi_7, \eta_4, \zeta_{10} + 1)$ zu $\mathfrak{H}$ gehörig und (da T zu $\mathfrak{G}$ gehört) $\zeta_{10} \geqq \zeta_1$; von G_{10} aus wandern wir in positiver x-Richtung und es sei $G_{12} = (\xi_{12}, \eta_4, \zeta_{10})$ zu $\mathfrak{G}$ gehörig, $H_{13} = (\xi_{12} + 1, \eta_4, \zeta_{10})$ zu $\mathfrak{H}$; dabei gilt $\xi_7 \leqq \xi_{12} \leqq \xi_1 - 1$, wobei zu beachten ist, daß wegen der Zugehörigkeit von H_2 zur (antikomprimierten) Menge $\mathfrak{H}$ notwendig auch der Punkt $(\xi_1, \eta_4, \zeta_{10})$ zu $\mathfrak{H}$ gehört. Da der Punkt $P_{12} = (\xi_{12}, \eta_4 + 1, \zeta_{10} - 1)$ notwendig, ebenso wie H_7, zu $\mathfrak{H}$ gehört, so liegt für den Eckpunkt G_{12} von $\mathfrak{K}$ der Fall A) vor, womit die Möglichkeit eines elementaren zy-Umbaues schon gesichert ist[81].

44. Wir können also weiterhin annehmen, daß der Punkt T, den wir jetzt mit $H_{10} = (\xi_7, \eta_4, \zeta_1)$ bezeichnen wollen, zu $\mathfrak{H}$ gehört (s. Fig. 6). Von H_{10} aus in negativer y-Richtung wandernd, bestimmen wir $G_{12} = (\xi_7, \eta_{12}, \zeta_1)$ unter den zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Punkten (ξ_7, y, ζ_1) als denjenigen mit größter y-Koordinate, sodaß $H_{11} = (\xi_7, \eta_{12} + 1, \zeta_1)$ zu $\mathfrak{H}$ gehört; offenbar ist $\eta_1 \leqq \eta_{12} \leqq \eta_4 - 1$, wobei die Zugehörigkeit des Punktes G_1 und somit des Punktes (ξ_7, η_1, ζ_1) zu $\mathfrak{G}$ zu beachten ist (in Fig. 6 ist $\eta_{12} - \eta_1 = 1$ gewählt; desgl. in Fig. 7).

45. Nun ist weiterhin zu unterscheiden, ob der in positiver z-Richtung an G_{12} anschließende Punkt $U = (\xi_7, \eta_{12}, \zeta_1 + 1)$ zu

[81] Übrigens ist ein solcher Umbau sofort anzugeben (vgl. Fig. 5): er besteht in der Überführung der zur Strecke $G_{10}G_{12}$ gehörenden Gitterpunkte in die Gitterpunkte der Strecke H_7H_{14}, unter H_{14} den Punkt $(\xi_{12}, \eta_4 + 1, \zeta_1 - 1)$ verstanden. Natürlich reduzieren sich diese Strecken, falls $\xi_{12} = \xi_7$ ist, auf je einen Punkt.

$\mathfrak{G}$ oder zu $\mathfrak{H}$ gehört. Der erste in Fig. 6 dargestellte Fall ist leicht zu erledigen: Man bestimmt, von G_{12} in positiver z-Richtung fortschreitend, unter den zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Punkten (ξ_7, η_{12}, z) denjenigen mit größter z-Koordinate; es sei dies $G_{13} = (\xi_7, \eta_{12}, \zeta_{13})$, sodaß $H_{14} = (\xi_7, \eta_{12}, \zeta_{13} + 1)$ zu $\mathfrak{H}$ gehört und (wegen der Zugehörigkeit von U zu $\mathfrak{H}$) $\zeta_{13} \geqq \zeta_1 + 1$ ist; von G_{13} aus wan-

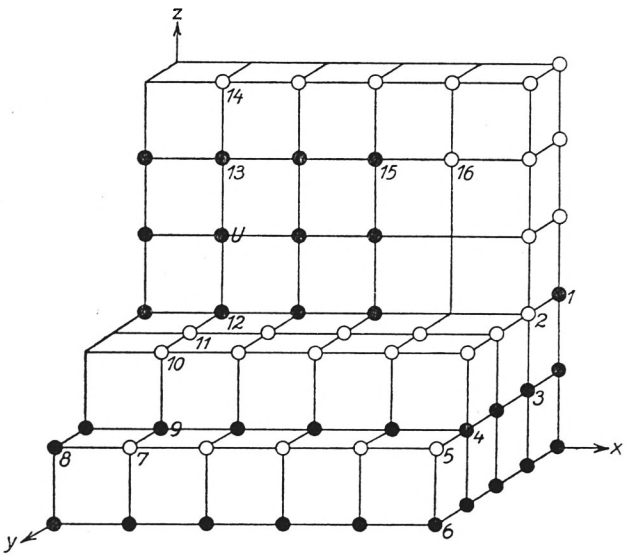


Fig. 6

dern wir in positiver x-Richtung und es sei $G_{15} = (\xi_{15}, \eta_{12}, \zeta_{13})$ unter den zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Punkten $(x, \eta_{12}, \zeta_{13})$ derjenige mit größter x-Koordinate, also[82] $\xi_7 \leqq \xi_{15} \leqq \xi_1 - 1$ und $H_{16} = (\xi_{15} + 1, \eta_{12}, \zeta_{13})$ ein Punkt von $\mathfrak{H}$. Da nun der Punkt $P_{15} = (\xi_{15}, \eta_{12} + 1, \zeta_{13} - 1)$ ebenso wie H_{11} zu $\mathfrak{H}$ gehört, so ist G_{15} ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}$, für den der Fall A) vorliegt, sodaß gemäß Nr. **39** ein elementarer zy-Umbau von $\mathfrak{K}$ möglich ist.

46. Demgemäß können wir fernerhin annehmen, der Punkt U, den wir nun mit $H_{13} = (\xi_7, \eta_{12}, \zeta_1 + 1)$ bezeichnen, gehöre zu $\mathfrak{H}$ (vgl. Fig. 7). Von G_{12} aus in positiver x-Richtung wandernd be-

[82] Man beachte, daß der Punkt $(\xi_1, \eta_{12}, \zeta_{13})$ ebenso wie $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1 + 1)$ zu $\mathfrak{H}$ gehört.

stimmen wir dann $G_{14} = (\xi_{14}, \eta_{12}, \zeta_1)$ unter den zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Punkten (x, η_{12}, ζ_1) als denjenigen mit größter x-Koordinate, sodaß (da $(\xi_1 + 1, \eta_{12}, \zeta_1)$ ebenso wie $(\xi_1 + 1, \eta_1, \zeta_1)$ zu $\mathfrak{H}$ gehört) $\xi_7 \leqq \xi_{14} \leqq \xi_1$ gilt[83] und $H_{15} = (\xi_{14} + 1, \eta_{12}, \zeta_1)$ ein Punkt von $\mathfrak{H}$ ist. Ferner sei $H_{16} = (\xi_{14}, \eta_4 + 1, \zeta_1 - 1)$, wobei H_{16} offenbar ebenso wie H_7 zu $\mathfrak{H}$ gehört. Ersichtlich ist G_{14} ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}$, für den Fall B) vorliegt, da der Punkt $P_{14} = (\xi_{14}, \eta_{12} + 1, \zeta_1 - 1)$ ebenso wie G_4 zu $\mathfrak{G}$ gehört. Ein elementarer zy-Umbau U kann nun so ausgeführt werden, daß die Gitterpunkte (x, η_{12}, ζ_1) mit $\xi_7 \leqq x \leqq \xi_{14}$, das sind die Gitterpunkte der Strecke $G_{12}G_{14}$

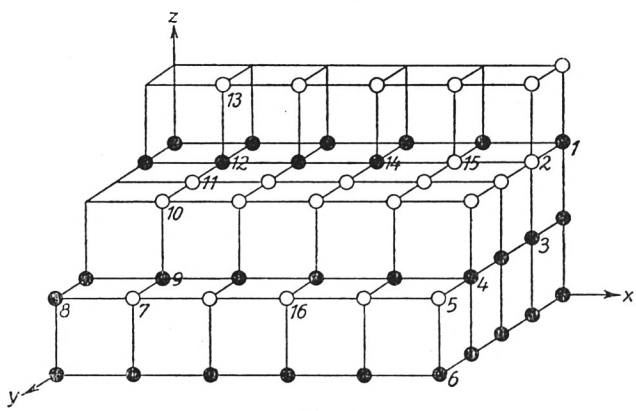


Fig. 7

übergeführt werden in die Gitterpunkte $(x, \eta_4 + 1, \zeta_1 - 1)$, also in die Gitterpunkte der Strecke H_7H_{16}. (Der vom Umbau[84] U betroffene Eckpunkt ist der Punkt G_{14}.)

Es ist also allemal, ob nun für den Eckpunkt G_1 der Fall A) oder der Fall B) vorliegt, die Möglichkeit eines elementaren zy-Umbaues von $\mathfrak{K}$ festgestellt. Damit ist Satz 17 – gemäß Nr. 36 also auch der Hauptsatz 15 – bewiesen.

---

[83] Außerdem gilt, wenn $\eta_{12} > \eta_1$ ist, $\xi_{14} < \xi_1$, da dann der Punkt $(\xi_1, \eta_{12}, \zeta_1)$ ebenso wie H_2 zu $\mathfrak{H}$ gehört. Dieser Fall $\eta_{12} > \eta_1$ ist in Fig. 7 dargestellt (wobei $\eta_{12} - \eta_1 = 1$ gewählt ist), während im Falle $\eta_{12} = \eta_1$ offenbar G_{14} mit G_1 zusammenfällt.

[84] Nach unserer Typeneinteilung (vgl. Anm. 80) gehört dieser Umbau zum Typus I.

§ 10. Rekursionsformeln für Anzahlen gewisser Gitterpunktmengen.

47. In der vorangegangenen Note I wurde gelegentlich eine Rekursionsformel für Anzahlen von Partitionen erwähnt[85]. Das Folgende betrifft verschiedene Verallgemeinerungen dieser Formel.

Vorausgeschickt sei, daß wir die bereits an früherer Stelle (vgl. Anm. 10) verwendeten Bezeichnungen

$$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$$

dafür, daß $\mathfrak{b}$ Teilmenge, bzw. echte Teilmenge von $\mathfrak{a}$ ist, jetzt (wie schon in Nr. **18**) für den Fall heranziehen, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ komprimierte Gitterpunktmengen sind. Dabei soll auch die leere Menge $\mathfrak{o}$ zu den komprimierten Gitterpunktmengen gerechnet werden und dabei $\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{a}$ für jede komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{a}$ gelten.

Der Grad einer komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{a}$ werde mit $m(\mathfrak{a})$ bezeichnet; also: $m(\mathfrak{R}_m^n) = m$, $m(\mathfrak{o}) = 0$.

48. Die einer n-dimensionalen Gitterpunktmenge $\mathfrak{a} = \mathfrak{R}_m^n$ gemäß Nr. **4** zugeordneten n Partitionen von m sollen mit $\mathfrak{A}^{(\nu)}(\mathfrak{R}_m^n)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ bezeichnet werden.

Jede $(n-1)$-dimensionale Gitterpunktmenge, die etwa im Raum der Koordinaten $x_1, \ldots, x_{n-1}$ liegen möge, kann natürlich auch als n-dimensionale Gitterpunktmenge angesehen werden, für deren sämtliche Punkte $x_n = 1$ ist. Wird in dieser Weise eine Menge $\mathfrak{R}_m^{n-1}$ als n-dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge aufgefaßt, so ist die zur n-ten Koordinate x_n gehörige Partition $\mathfrak{A}^{(n)}(\mathfrak{R}_m^{n-1}) = (m)$, da ja $a_1^{(n)} = m$, $a_\mu^{(n)} = 0$ für $\mu > 1$ ist.

49. Ersichtlich gilt für jede n-dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{R}_m^n$ vom Grad m die Beziehung

$$\mathfrak{R}_m^n \subseteq \mathfrak{Z}^n(m)$$

wenn $\mathfrak{Z}^n(m)$ die Menge bedeutet, die aus allen $M = m^n$ Gitterpunkten mit $1 \leqq x_\nu \leqq m$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ besteht. Es gibt also zu

[85] Vgl. l. c. [8], Anm. 2, Formel (1), S. 23 sowie im Folgenden in Nr. **54** die Formeln (27), (28).

gegebenem m und n eine komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{J}^n(m)$, die alle Mengen $\mathfrak{K}_m^n$ enthält[86].

50. Sei $n \geqq 1$, $m \geqq 1$ und sei $\mathfrak{K}_m^n$ eine komprimierte Gitterpunktmenge im $x_1 \ldots x_n$-Raum. Sei $\mathfrak{k}' = (\mathfrak{K}_m^n)_1$ die Menge, die aus allen in $x_1 = 1$ liegenden Punkten von $\mathfrak{K}_m^n$ besteht[87]; es werde dann die Menge der nicht zu $\mathfrak{k}'$ gehörenden Punkte von $\mathfrak{K}_m^n$ parallel zur x_1-Achse in negativer Richtung um eine Einheit verschoben, also so, daß jeder dieser Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ durch den Punkt $(x_1 - 1, x_2, \ldots, x_n)$ ersetzt wird. Die so entstehende Menge heiße $\mathfrak{r}'$. Offenbar sind sowohl $\mathfrak{k}'$ wie die „Restmenge" $\mathfrak{r}'$ selbst komprimierte Gitterpunktmengen (wobei $\mathfrak{k}'$ als $(n-1)$-dimensional aufgefaßt werden kann[88]) und es ist

$$(\mathfrak{r}')_1 \subseteq \mathfrak{k}' \tag{19}$$

sowie

$$m(\mathfrak{k}') \geqq 1, \quad m(\mathfrak{k}') + m(\mathfrak{r}') = m. \tag{20}$$

So wie aus $\mathfrak{K}_m^n$ die der Beziehung (19) genügenden komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{k}'$ und $\mathfrak{r}'$ herleitbar sind, so kann man umgekehrt ausgehen von einer beliebigen $(n-1)$-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{k}'$, deren Grad $m(\mathfrak{k}')$ die Ungleichung $1 \leqq m(\mathfrak{k}') \leqq m$ erfüllt, — gelegen in der Ebene $x_1 = 1$ des $x_1 \ldots x_n$-Raumes, — sowie von einer der Bedingung (19) genügenden komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{r}'$ vom Grad $m - m(\mathfrak{k}')$. Wird dann $\mathfrak{r}'$ in der positiven x_1-Richtung um eine

---

[86] Im allgemeinen wird dasselbe, wie die in obiger Weise erklärte Menge $\mathfrak{J}^n(m)$, bereits eine komprimierte Gitterpunktmenge wesentlich niedrigeren Grades leisten. So sind beispielsweise für $n = 2$, $m = 4$ alle $\mathfrak{K}_4^2$ als Teilmengen in der komprimierten Gitterpunktmenge enthalten, die aus den 8 Punkten $(1, y)$ für $1 \leqq y \leqq 4$, $(1, 1)$, $(x, 1)$ für $2 \leqq x \leqq 4$ besteht. Die im Text genannte Menge ist nur deshalb für $\mathfrak{J}^n(m)$ gewählt, weil sie sich am einfachsten kennzeichnen läßt.

[87] In derselben Weise läßt sich für jedes ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$ eine Menge $\mathfrak{k}^{(\nu)} = (\mathfrak{K}_m^n)_\nu$ als Durchschnitt von $\mathfrak{K}_m^n$ mit $x_\nu = 1$ einführen.

[88] Zu den o-dimensionalen Gitterpunktmengen ist außer der Menge $\mathfrak{o}$ nur die aus einem einzigen Gitterpunkt bestehende komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{e}$ zu zählen; im Falle $n = 1$ liegt wegen $m \geqq 1$ für $\mathfrak{k}'$ notwendig der letztere Fall $\mathfrak{k}' = \mathfrak{e}$ vor.

Einheit verschoben und die Vereinigung dieser Menge mit $\mathfrak{k}'$ gebildet, so entsteht eine n-dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}_m^n$ vom Grad m und offenbar kann jede $\mathfrak{K}_m^n$ auf diese Art, u. zw. genau einmal, hergestellt werden[89].

Die Bildung von $\mathfrak{k}'$ und $\mathfrak{r}'$ aus $\mathfrak{K}_m^n$ läßt sich auch auf $m = 0$, $\mathfrak{K}_m^n = \mathfrak{o}$ ausdehnen und liefert dann natürlich $\mathfrak{k}' = \mathfrak{r}' = \mathfrak{o}$.

51. Sei $n \geqq 1$, $m \geqq 0$. Es bedeute $\mathfrak{g}'$ eine $(n-1)$-dimensionale in der Ebene $x_1 = 1$ des $x_1 \ldots x_n$-Raumes gelegene komprimierte Gitterpunktmenge von einem Grad $m(\mathfrak{g}') \geqq 0$. Es werde mit $\Gamma^n(m)$ die Gesamtheit aller komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}_m^n$, ferner mit $\Gamma^n(m; \mathfrak{g}')$ die Gesamtheit aller jener komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}_m^n$ bezeichnet, für welche die soeben in Nr. **50** erklärte Menge $\mathfrak{k}' = (\mathfrak{K}_m^n)_1$ der Bedingung

$$\mathfrak{k}' = (\mathfrak{K}_m^n)_1 \subseteq \mathfrak{g}' \tag{21}$$

genügt[89a]. Mit $P^n(m)$ werde die Anzahl aller $\mathfrak{K}_m^n$ überhaupt, ferner mit $P^n(m; \mathfrak{g}')$ die Anzahl der zu $\Gamma^n(m; \mathfrak{g}')$ gehörenden Mengen $\mathfrak{K}_m^n$ bezeichnet[90].

Für $m = 0$ besteht natürlich die Gesamtheit $\Gamma^n(0)$ — und ebenso die Gesamtheit $\Gamma^n(0; \mathfrak{g}')$ für jedes beliebige $\mathfrak{g}'$ — aus der einen Menge $\mathfrak{o}$ und dementsprechend ist

$$P^n(0) = 1, \quad P^n(0; \mathfrak{g}') = 1. \tag{22}$$

---

[89] In etwas allgemeinerer Weise könnte für irgend eine ganze positive Zahl a die Teilmenge $\mathfrak{k}'$ der in $1 \leqq x_1 \leqq a$ liegenden Punkte von $\mathfrak{K}_m^n$ sowie ihre „Restmenge" $\mathfrak{r}'$ betrachtet werden, wobei (19) zu ersetzen wäre durch $(\mathfrak{r}')_1 \subseteq \mathfrak{k}'(a)$, wenn unter $\mathfrak{k}'(a)$ jene Menge verstanden wird, die aus den in $x_1 = a$ liegenden Punkten von $\mathfrak{k}'$ durch Parallelverschiebung um $a - 1$ in negativer x_1-Richtung entsteht.

[89a] Analog ist $\Gamma^n(m; \mathfrak{g}^{(\nu)})$ durch $\mathfrak{k}^{(\nu)} \subseteq \mathfrak{g}^{(\nu)}$ gekennzeichnet; vgl. Anm. 87.

[90] Nach den eingeführten Gesichtspunkten kann man natürlich sehr leicht auch diejenigen $\mathfrak{K}_m^n$ kennzeichnen, für welche $\mathfrak{k}'$ gleich einer vorgegebenen $(n-1)$-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{g}$ ist: Jede solche $\mathfrak{K}_m^n$ ist ja (bei festgehaltenem $\mathfrak{g}$) vollständig durch die zugehörige Restmenge $\mathfrak{r}'$ charakterisiert und diese Mengen $\mathfrak{r}'$ bilden nichts anderes als die Gesamtheit $\Gamma^n(m - m(\mathfrak{g}); \mathfrak{g})$. Demgemäß ist $P^n(m - m(\mathfrak{g}); \mathfrak{g})$ die Anzahl der komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}_m^n$ mit $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}$.

Wenn wir die leere Punktmenge $\mathfrak{o}$ und die Gradzahl $m = 0$ mit einbezogen haben, um bei späteren Betrachtungen zusätzliche Bemerkungen sparen zu können, so treffen wir aus dem gleichen Grunde noch gewisse Festsetzungen für $m < 0$. Es sollen nämlich für $m < 0$ die Gesamtheiten $\Gamma^n(m)$ und $\Gamma^n(m; \mathfrak{g}')$ für jedes $\mathfrak{g}' \supset \mathfrak{o}$ als leer angesehen werden und es ist demgemäß

$$P^n(m) = 0, \quad P^n(m; \mathfrak{g}') = 0 \text{ für } m < 0, \ \mathfrak{g}' \supset \mathfrak{o}. \tag{23}$$

Hingegen wird zweckmäßiger Weise $\Gamma^n(m; \mathfrak{o})$ für $m < 0$ überhaupt nicht eingeführt; und da $\Gamma^n(m; \mathfrak{o})$ für $m \geqq 1$ leer ist und für $m = 0$ aus $\mathfrak{o}$ allein besteht (s. o.), ist demgemäß

$$\begin{aligned} &P^n(m; \mathfrak{o}) = 0 \text{ für } m > 0, \quad P^n(0; \mathfrak{o}) = 1 \\ &P^n(m; \mathfrak{o}) \text{ nicht definiert für } m < 0. \end{aligned} \tag{24}$$

52. Sei $\mathfrak{g}' \supseteq \mathfrak{o}$ gegeben. Sei $m \geqq 0$. Für eine der Bedingung (21) genügende $\mathfrak{R}^n_m$ sei $\mathfrak{r}$ die gemäß Nr. **50** gebildete Restmenge. Nach dem dort Gesagten hat bei gegebenem $\mathfrak{k}'$ die komprimierte n-dimensionale Gitterpunktmenge $\mathfrak{r}$ vom Grad $m - m(\mathfrak{k}')$ nur der einen Bedingung (19) zu genügen, die nichts anderes besagt, als daß $\mathfrak{r}$ zur Gesamtheit $\Gamma^n(m - m(\mathfrak{k}'); \mathfrak{k}')$ gehört. Läßt man also $\mathfrak{k}'$ alle $(n-1)$-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen $\subseteq \mathfrak{g}'$ durchlaufen, läßt man ferner für jedes $\mathfrak{k}'$ die Menge $\mathfrak{r}$ die Gesamtheit $\Gamma^n(m - m(\mathfrak{k}'); \mathfrak{k}')$ durchlaufen, so erhält man (durch Vereinigung zugehöriger $\mathfrak{k}'$ und $\mathfrak{r}$ in dem in Nr. **50** beschriebenen Sinn) jede zu $\Gamma^n(m; \mathfrak{g}')$ gehörende $\mathfrak{R}^n_m$, u. zw. jede genau einmal. Man hat daher[91], wenn wir noch anstelle von $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{k}'$ einfach $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ schreiben:

Satz 18. Die Anzahl $P^n(m; \mathfrak{g})$ jener Mengen $\mathfrak{R}^n_m$, für welche die in Nr. **50** erklärte Menge $(\mathfrak{R}^n_m)_1 \subseteq \mathfrak{g}$ ist, genügt der Rekursionsformel

$$P^n(m; \mathfrak{g}) = \sum_{\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}} P^n(m - m(\mathfrak{k}); \mathfrak{k}). \tag{25}$$

[91] Man beachte in (25) für $m > 0$, daß der auf $\mathfrak{k} = \mathfrak{o}$ bezügliche Summand gemäß (24) von selbst null wird. Für $m = 0$ aber ist, ob nun $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{o}$ oder $= \mathfrak{o}$ ist, stets der eine auf $\mathfrak{k} = \mathfrak{o}$ bezügliche Summand gemäß (22) gleich 1, während im Falle $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{o}$ die übrigen (auf alle $\mathfrak{k}$ mit $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ bezüglichen) Summanden gemäß (23) null werden. Die für $m \geqq 0$, $\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{o}$ hergeleitete Formel (25) gilt übrigens wegen (23) auch für $m < 0$, $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{o}$.

53. Wählt man für $\mathfrak{g}$ die in Nr. **49** erklärte Menge $\mathfrak{F}^{n-1}(m)$, so wird $\mathfrak{k}$ in (25) überhaupt alle $(n-1)$-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen von einem Grad $\leqq m$ durchlaufen[92]; es wird dann $\Gamma^n(m; \mathfrak{g}) = \Gamma^n(m)$ und aus Satz 18 wird

Satz 19. Die Anzahl $P^n(m)$ aller n-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}_m^n$ vom Grad m genügt der Formel

$$P^n(m) = \sum_{\mathfrak{k}}' P^n(m - m(\mathfrak{k}); \mathfrak{k}), \tag{26}$$

wobei die Summation über alle $(n-1)$-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{k}$ zu erstrecken ist[93].

54. Im Falle $n = 2$ erkennt man in (25) und (26) einfache Formeln zwischen Anzahlen von Partitionen gegebener Zahlen. Für $n = 2$ stellt ja eine in $x_1 = 1$ gelegene $(n-1)$-dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{g}$ vom Grad $m(\mathfrak{g}) = g$ nichts anderes als die Menge der g Gitterpunkte $(1, x_2)$ mit $1 \leqq x_2 \leqq g$ dar; $P^2(m, \mathfrak{g})$ aber fällt zusammen mit der Anzahl $P_g(m)$ derjenigen Partitionen $(a_1, a_2, \ldots)$ der Zahl m, für welche $g \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots$ gilt, während $P^2(m)$ gleich der Anzahl $P(m)$ aller Partitionen von m ist. Aus (25) und (26) wird also

$$P_g(m) = \sum_{k=0}^{g}{}' P_k(m - k) \tag{27}$$

und

$$P(m) = \sum_{k=0}^{m}{}' P_k(m - k), \tag{28}$$

wobei (28) in (27) für $g \geqq m$ enthalten ist[94]. Der erste, $k = 0$ entsprechende Summand in (27) ist gemäß (24) gleich 1 oder 0,

---

[92] Mengen $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ mit einem Grad $m(\mathfrak{k}) > m$ kann man in der Summe (25) wegen der Festsetzung (23) von vorneherein weglassen.

[93] Offenbar gilt (26) auch für $m < 0$, wobei der Summand mit $\mathfrak{k} = 0$ entfällt. Im Falle $m \geqq 0$ kann man die Summation selbstverständlich (vgl. Anm. 92) auf Mengen $\mathfrak{k}$ von einem Grad $\leqq m$ beschränken.

[94] Man kann die Zahlen $P_g(m)$ für $g \geqq 0$, $-\infty < m < +\infty$ tabellarisch so angeordnet denken, daß den einzelnen Kolonnen die Werte $g = 0$, $g = 1$,

je nachdem $m = 0$ oder $m > 0$ ist, kann also im letzteren Fall weggelassen werden. Man erhält dann die Formel in der früher[95] erwähnten Gestalt.

55. Man kann natürlich in Verallgemeinerung der Definition von $\Gamma^n(m; \mathfrak{g}^{(\nu)})$ auch allgemeinere Gesamtheiten, wie $\Gamma^n(m; \mathfrak{g}', \ldots, \mathfrak{g}^{(p)})$ einführen, die — anstelle nur einer Bedingung nach Art von (21) — durch p Bedingungen

$$\mathfrak{k}^{(\nu)} \subseteq \mathfrak{g}^{(\nu)} \quad (1 \leqq \nu \leqq p)$$

gekennzeichnet sind.

Auch die Bildung der zu einer gegebenen Menge $\mathfrak{R}_m^n$ gehörenden Mengen $\mathfrak{k}^{(\nu)}$ und $\mathfrak{r}^{(\nu)}$ ist nur ein Sonderfall des folgenden allgemeineren Verfahrens. Von den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ seien p herausgegriffen $(1 \leqq p \leqq n)$; es seien dies etwa die Koordinaten $x_\nu (\nu = 1, \ldots, p)$; es seien für jedes ν $(1 \leqq \nu \leqq p)$ gewisse der Ungleichung

$$1 \leqq \lambda_{\nu,1} < \lambda_{\nu,2} < \ldots < \lambda_{\nu,h_\nu}$$

genügende ganzzahlige Werte $\lambda_{\nu,\varrho}$ gewählt $(h_\nu \geqq 1)$. In eine Menge $\mathfrak{k}$ werde ein Punkt $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ dann und nur dann aufgenommen, wenn der Punkt mit den Koordinaten

$$x_\nu = \lambda_{\nu,\xi_\nu} \ (1 \leqq \nu \leqq p), \quad x_\nu = \xi_\nu \ (p+1 < \nu \leqq n)$$

zu $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_m^n$ gehört. In eine Menge $\mathfrak{r}$ aber werde $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ aufgenommen, wenn der Punkt

$$x_\nu = \mu_{\nu,\xi_\nu} \ (1 \leqq \nu \leqq p), \quad x_\nu = \xi_\nu \ (p+1 < \nu \leqq n)$$

zu $\mathfrak{R}$ gehört, wobei $\mu_{\nu,1}, \mu_{\nu,2}, \ldots$ diejenige Zahlenfolge bedeute, die aus der Zahlenfolge $1, 2, 3, \ldots$ nach Streichen der Zahlen $\lambda_{\nu,1}, \lambda_{\nu,2}, \ldots, \lambda_{\nu,h_\nu}$ übrig bleibt. Die oben genannten Mengen $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{r}'$ entsprechen dann dem Fall $p = 1$, $h_1 = 1$, $\lambda_{1,1} = 1$.

$g = 2, \ldots.$ und den Zeilen die Werte von m: $\ldots..$, $m = -1$, $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$, $\ldots..$ entsprechen; in jeder Zeile für ein negatives m stehen dabei gemäß (23) und (24) in den Kolonnen für $g \geqq 1$ lauter Nullen, während der Platz in der Kolonne für $g = 0$ leer bleibt; in der Kolonne für $g = 0$ steht gemäß (24) in der Zeile für $m = 0$ die Zahl 1, in allen folgenden Zeilen (für $m \geqq 1$) eine Null.

Man kann dann Formel (27) folgendermaßen deuten: Um der Reihe nach für $m = 0, 1, 2, \ldots.$ die Zahlen der m-ten Zeile zu gewinnen, wenn die vorhergehenden Zeilen schon bekannt sind, ziehe man beginnend mit dem Anfangsglied der m-ten Zeile eine diagonal nach rechts oben verlaufende Linie. Bildet man von der Zahlenfolge, die auf dieser Diagonale steht, die Summenzahlen, so erhält man die Zahlen der m-ten Zeile, die natürlich von $g \geqq m$ an sich nicht mehr ändern (und $= P(m)$ sind).

[95] Vgl. Note I (l. c. [3]), Anm. 2, Formel (1), diese Sitz.ber. S. 23.

56. In Nr. **51** ist die Gesamtheit $\Gamma^n(m)$ aller komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}_m^n$ einer Art Klassifizierung unterworfen worden bezüglich ihres Durchschnittes $\mathfrak{k}'$ mit der Ebene $x_1 = 1$. Man kann innerhalb $\Gamma^n(m)$ auch klassifizieren im Hinblick auf eine der Partitionen $\mathfrak{A}^{(\nu)} = \mathfrak{A}^{(\nu)}(\mathfrak{K}_m^n)$ (vgl. Nr. **48**), die zu einer $\mathfrak{K}_m^n$ gehören. Demgemäß möge etwa, wenn $\mathfrak{B}' = (b_1', b_2', \ldots)$ eine vorgegebene Partition von m ist[96], mit $\Gamma^n(m; \mathfrak{B}')$ die Gesamtheit aller komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}_m^n$ bezeichnet werden, für welche $\mathfrak{A}'(\mathfrak{K}_m^n) = \mathfrak{B}'$ ist, und eine analoge Bedeutung möge $\Gamma^n(m; \mathfrak{B}^{(\nu)})$ haben[97]. Mit $P^n(m; \mathfrak{B}^{(\nu)})$ werde die Anzahl der zur Gesamtheit $\Gamma^n(m; \mathfrak{B}^{(\nu)})$ gehörenden Gitterpunktmengen bezeichnet[98]. Natürlich gilt

Satz 20. Die Anzahl $P^n(m)$ aller komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}_m^n$ genügt der Formel

$$P^n(m) = \sum_{\mathfrak{B}}{}' P^n(m; \mathfrak{B}), \tag{29}$$

wobei die Summe über alle Partitionen $\mathfrak{B}$ der Zahl m zu erstrecken ist.

57. Man kann die beiden Klassifikationsprinzipien, von denen wir in Nr. **56** gesprochen haben, auch kombinieren. Demgemäß werde mit $\Gamma^n(m; \mathfrak{B}^{(\nu)}; \mathfrak{g}^{(\lambda)})$ die Gesamtheit jener $\mathfrak{K}_m^n$ bezeichnet, die den beiden Bedingungen

$$\mathfrak{A}^{(\nu)}(\mathfrak{K}_m^n) = \mathfrak{B}^{(\nu)},$$
$$\mathfrak{k}^{(\lambda)} \subseteq \mathfrak{g}^{(\lambda)}$$

---

[96] Selbstverständlich ist $b_1' \geqq b_2' \geqq \ldots$ vorauszusetzen, da anders geordnete Partitionen bei einer komprimierten Gitterpunktmenge nicht auftreten können.

[97] Falls eine Partition $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ zahlenmäßig vorliegt, wird natürlich die Koordinate x_ν, auf welche sich die Partition $\mathfrak{B}^{(\nu)} = \mathfrak{A}^{(\nu)}(\mathfrak{K}_m^n)$ bezieht, besonders ersichtlich zu machen sein; andererseits kann in einem solchen Fall die Angabe der Zahl m unterbleiben, die ja aus den Zahlen der Partition $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ abgelesen werden kann. Man wird also beispielsweise, wenn $n = 3$, $m = 13$, $\nu = 2$, $\mathfrak{B}'' = (7, 4, 2)$ ist, schreiben: $\Gamma^3(\mathfrak{A}'' = (7, 4, 2))$ oder $\Gamma_2^3(7, 4, 2)$ odgl.

[98] Da diese Anzahl offenbar unabhängig davon ist, um welche Koordinate x_ν es sich handelt, so könnte etwa in dem in Anm. 97 erwähnten Beispiel einfach $P^3(7, 4, 2)$ geschrieben werden. Der Wert von $P^3(7, 4, 2)$ ist übrigens 70; vgl. Nr. **65**, Formel (43).

Für $n = 2$ ist natürlich $P^2(m; \mathfrak{B}) = 1$ für jede Partition $\mathfrak{B}$ der Zahl m.

genügen; die Anzahl dieser $\mathfrak{K}_m^n$ heiße $P^n(m; \mathfrak{B}^{(\nu)}; \mathfrak{g}^{(\lambda)})$. Natürlich gilt

$$P^n(m; \mathfrak{g}^{(\lambda)}) = \sum_{\mathfrak{B}^{(\nu)}} P^n(m; \mathfrak{B}^{(\nu)}; \mathfrak{g}^{(\lambda)}), \tag{30}$$

wobei $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ alle Partitionen von m durchläuft[99].

Es ist aber für die fraglichen Gesamtheiten Γ ebenso wie für die zugehörigen Anzahlen P von Wichtigkeit, ob $\nu \neq \lambda$ oder $\nu = \lambda$ ist. Wir beginnen (in Nr. **60**) mit dem ersten Fall, wobei notwendig $n \geqq 2$ ist und wobei wir etwa $\nu = 2$, $\lambda = 1$ setzen; doch sei vorher noch eine später verwendete Bezeichnung eingeführt.

58. Es seien $\mathfrak{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ und $\mathfrak{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ zwei Systeme von je k nicht-negativen Zahlen ($k \geqq 1$), wobei es jeweils auch auf die Anordnung innerhalb des Systems ankommt (die nicht notwendig der Größe nach getroffen sein muß). Wir setzen dann

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = (a_1 - b_1, \ldots, a_k - b_k)$$

und wir wollen

$$\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{B} \leqq \mathfrak{A} \tag{31}$$

schreiben, wenn alle Ungleichungen $a_\mu \geqq b_\mu$ gelten, also $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ selbst ein System nicht-negativer Zahlen ist; dabei bedeute

$$\mathfrak{A} \gg \mathfrak{B}, \tag{32}$$

daß zwar durchwegs $a_\mu \geqq b_\mu$ aber nicht durchwegs $a_\mu = b_\mu$ ist[100].

---

[99] Diese für $m \geqq 1$ entwickelte Formel behält auch für $m \leqq 0$ Geltung; u. zw. zunächst für $m = 0$, wenn man der Zahl 0 eine einzige Partition $\mathfrak{B}_0 = (0, 0, \ldots)$ zuweist und $\mathfrak{A}^{(\nu)}(0) = \mathfrak{B}_0$, demgemäß $P^n(0; \mathfrak{B}_0; \mathfrak{g}) = 1$ (für jedes $\mathfrak{g} \supseteq 0$) setzt; für $m < 0$ aber, wo man die Formel auf $\mathfrak{g} \supset 0$ beschränkt (vgl. Nr. **51**), bleibt die Summe rechts leer, da es keine Partitionen von m gibt, und hat also den Wert 0, den auch die linke Seite von (30) gemäß (23) hat.

[100] Derartige Beziehungen spielen bereits bei früheren Betrachtungen herein (vgl. Note I, l. c. [3], Nr. **13**, S. 34, 35). Es würde nahe liegen, statt (31) bzw. (32) einfacher $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ zu schreiben, was sich aber deshalb verbietet, weil wir die Beziehungen (31), (32) nachher insbesondere bei Partitionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ anwenden wollen, für Partitionen aber die Zeichen $\geqq$ und $>$ schon in anderer Bedeutung verwendet werden (vgl. Monatshefte, l. c. [1] und die folgende Note III).

59. Die eingeführte Bezeichnung kann benützt werden, um bei zweidimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ die Beziehung $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ (vgl. Nr. **47**) etwas anders auszudrücken. Sind nämlich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei in der $x_1 x_2$-Ebene gelegene komprimierte Gitterpunktmengen vom Grad p bzw. q, sind ferner

$$\mathfrak{A}'(\mathfrak{a}) = \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{A}''(\mathfrak{a}) = \mathfrak{A}_2,$$
$$\mathfrak{A}'(\mathfrak{b}) = \mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{A}''(\mathfrak{b}) = \mathfrak{B}_2$$

die zugehörigen Partitionen (vgl. Nr. **48**), wobei $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, bzw. $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ zu einander konjugierte Partitionen von p bzw. q sind (u. zw. solche, die der Größe nach fallend geordnet sind), dann ist beispielsweise die komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{a}$ durch Angabe der zugehörigen Partitionen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ völlig festgelegt[101]; und da diese Partitionen einander eindeutig bestimmen, so ist $\mathfrak{a}$ durch Angabe einer dieser Partitionen bestimmt. Mit $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ gleichbedeutend ist dann, wie man leicht feststellt, jede der beiden Aussagen $\mathfrak{B}_1 \leqq \mathfrak{A}_1$ oder $\mathfrak{B}_2 \leqq \mathfrak{A}_2$; analog ist mit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ jede der Aussagen $\mathfrak{B}_1 \ll \mathfrak{A}_1$ oder $\mathfrak{B}_2 \ll \mathfrak{A}_2$ gleichbedeutend[102].

60. Wir kommen zum ersten der am Schluß von Nr. **57** erwähnten Fälle. Sei also $n \geqq 2$, $m \geqq 1$, ferner $\mathfrak{B}'' = (b_1'', b_2'', \ldots)$ eine Partition von m und $\mathfrak{g}'$ eine in der Ebene $x_1 = 1$ gelegene $(n-1)$-dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge. Angenommen, es sei die Gesamtheit $\Gamma^n(m; \mathfrak{B}''; \mathfrak{g}')$ der durch

$$\mathfrak{A}''(\mathfrak{K}_m^n) = \mathfrak{B}'', \quad (\mathfrak{K}_m^n)_1 \subseteq \mathfrak{g}'$$

gekennzeichneten komprimierten Gitterpunktmengen nicht leer und es sei $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^n$ eine ihr zugehörige komprimierte Gitterpunktmenge.

Gemäß Nr. **50** bilden wir $\mathfrak{k}' = (\mathfrak{K}_m^n)_1$ und die zugehörige Restmenge $\mathfrak{r}'$. Es sei $\mathfrak{A}''(\mathfrak{k}') = (t_1'', t_2'', \ldots)$. Da b_μ'' die Anzahl aller Punkte von $\mathfrak{K}$ in $x_2 = \mu$ ist, ferner t_μ'' die Anzahl aller Punkte von $\mathfrak{K}$ in $x_1 = 1$, $x_2 = \mu$, so muß $t_\mu'' \leqq b_\mu''$, d. h. (vgl. Nr. **58**)

$$\mathfrak{A}''(\mathfrak{k}') \leqq \mathfrak{B}'' \tag{33}$$

---

[101] Für eine Dimensionszahl $n > 2$ gilt das nicht. Es genüge hiefür auf Anm. 71 hinzuweisen.

[102] Diese Bemerkung kann man benützen, um die Summation in Formel (25), Nr. **52**, für den Fall $n = 3$ etwas anders zu beschreiben. Nimmt man wie dort an, es liegen die Mengen $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ in der Ebene $x_1 = 1$, in der die einzelnen Punkte durch ihre Koordinaten x_2, x_3 gegeben sind, so ist zur Festlegung einer in dieser Ebene gelegenen komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{a}$ irgend eine der Partitionen $\mathfrak{A}''(\mathfrak{a})$ oder $\mathfrak{A}'''(\mathfrak{a})$ ausreichend. Setzen wir $\mathfrak{A}''(\mathfrak{g}) = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}''(\mathfrak{k}) = \mathfrak{W}$, so ist die Summe in (25) über alle $\mathfrak{W} \leqq \mathfrak{B}$ zu erstrecken.

sein. Für $\mathfrak{r}'$ gilt dann

$$\begin{gathered}\mathfrak{A}''(\mathfrak{r}') = \mathfrak{B}'' - \mathfrak{A}''(\mathfrak{k}'), \\ (\mathfrak{r}')_1 \subseteq \mathfrak{k}'.\end{gathered} \tag{34}$$

Und da $\mathfrak{r}'$ komprimiert ist, müssen die Zahlen von $\mathfrak{A}''(\mathfrak{r}')$ der Größe nach fallend geordnet sein:

$$b_1'' - t_1'' \geqq b_2'' - t_2'' \geqq \ldots \geqq 0, \tag{35}$$

eine Bedingung, in der die Bedingung (33) mit enthalten ist.

Jede zu $\Gamma^n(m; \mathfrak{B}''; \mathfrak{g}')$ gehörende $\mathfrak{K}_m^n$ kann offenbar gewonnen werden, — u. zw. genau einmal, — wenn man $\mathfrak{k}'$ alle der Bedingung (35) genügenden $(n-1)$-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen durchlaufen läßt, wenn man ferner $\mathfrak{r}'$ (zu jedem $\mathfrak{k}'$) alle den Bedingungen (34) genügenden Mengen durchlaufen läßt; diese letzteren Mengen $\mathfrak{r}'$ bilden die Gesamtheit

$$\Gamma^n(m - m(\mathfrak{k}'); \mathfrak{B}'' - \mathfrak{A}''(\mathfrak{k}'); \mathfrak{k}').$$

Man erkennt daraus die Richtigkeit der Formel

$$P^n(m; \mathfrak{B}''; \mathfrak{g}') = \sum_{\mathfrak{k}' \subseteq \mathfrak{g}'} P^n(m - m(\mathfrak{k}'); \mathfrak{B}'' - \mathfrak{A}''(\mathfrak{k}'); \mathfrak{k}'), \tag{36}$$

wobei $\mathfrak{k}'$ alle in $x_1 = 1$ gelegenen komprimierten Gitterpunktmengen zu durchlaufen hat, die der Bedingung $\mathfrak{k}' \subseteq \mathfrak{g}'$ und außerdem der Bedingung (35) genügen, wenn $\mathfrak{A}''(\mathfrak{k}') = (t_1'', t_2'', \ldots)$ gesetzt ist. Man kann aber die Forderung, daß (35) erfüllt sei (einschließlich der darin enthaltenen Forderung (33)) weglassen, wenn man die Festsetzung trifft, daß das Zeichen $\Gamma^n(m; \mathfrak{B}^{(\nu)}; \mathfrak{g}^{(\lambda)})$ stets eine leere Gesamtheit, also $P^n(m; \mathfrak{B}^{(\nu)}; \mathfrak{g}^{(\lambda)})$ die Null bedeuten soll, wenn für $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ ein Zahlensystem genommen wird, in welchem die Zahlen $b_\mu^{(\nu)}$ nicht der Bedingung $b_1^{(\nu)} \geqq b_2^{(\nu)} \geqq \ldots \geqq 0$ genügen, sodaß entweder nicht alle $b_\mu^{(\nu)} \geqq 0$ sind, oder die $b_\mu^{(\nu)}$ nicht der Größe nach fallend geordnet sind.

So wie gezeigt wurde, daß die Summe in (36) nicht lauter Summanden null hat, wenn $\Gamma^n(m; \mathfrak{B}''; \mathfrak{g}')$ nicht leer ist, so ist umgekehrt zu sehen, daß wenn es zu gegebenem $m \geqq 1$, $\mathfrak{B}''$ und $\mathfrak{g}'$ ein $\mathfrak{k}' \subseteq \mathfrak{g}'$ gibt, für das $P^n(m - m(\mathfrak{k}'); \mathfrak{B}'' - \mathfrak{A}''(\mathfrak{k}'); \mathfrak{k}') > 0$

ausfällt, dann auch $\Gamma^n(m; \mathfrak{B}''; \mathfrak{g}')$ nicht leer sein kann. Ist also $\Gamma^n(m; \mathfrak{B}''; \mathfrak{g}')$ leer, so enthält die Summe in (36) keinen Summanden > 0, es gilt also (36) auch in diesem Fall[103].

61. Nimmt man für $\mathfrak{g}'$ die in Nr. **49** erklärte Menge $\mathfrak{Z}^{n-1}(m)$, so wird offenbar $\Gamma^n(m; \mathfrak{B}''; \mathfrak{g}') = \Gamma^n(m; \mathfrak{B}'')$; aus (36) wird dann

$$P^n(m; \mathfrak{B}'') = \sum_{\mathfrak{k}'} P^n(m - m(\mathfrak{k}'); \mathfrak{B}'' - \mathfrak{A}''(\mathfrak{k}'); \mathfrak{k}'), \quad (37)$$

wobei $\mathfrak{k}'$ alle in $x_1 = 1$ gelegenen $(n-1)$-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen von einem Grad $m(\mathfrak{k}') \leqq m$ durchläuft.

62. Wir kommen zum zweiten der am Schluß von Nr. **57** genannten Fälle. Wir wollen $\nu = \lambda = 1$ annehmen, beschäftigen uns also mit der Gesamtheit $\Gamma^n(m; \mathfrak{B}'; \mathfrak{g}')$, wobei $\mathfrak{B}' = (b_1', b_2', \ldots)$ sei. Ist diese Gesamtheit nicht leer und $\mathfrak{K}_m^n = \mathfrak{K}$ eine ihr zugehörige komprimierte Gitterpunktmenge, so gilt für den Durchschnitt $\mathfrak{k}'$ von $\mathfrak{K}$ mit $x_1 = 1$ jedenfalls $m(\mathfrak{k}') = b_1'$, also wegen $\mathfrak{k}' \subseteqq \mathfrak{g}'$ notwendig

$$b_1' \leqq m(\mathfrak{g}'). \quad (38)$$

Die gemäß Nr. **50** gebildete Restmenge $\mathfrak{r}'$ genügt dann den Bedingungen

$$(\mathfrak{r}')_1 \subseteqq \mathfrak{k}', \quad \mathfrak{A}'(\mathfrak{k}') = \mathfrak{B}_*',$$

wenn $(b_2', b_3', \ldots) = \mathfrak{B}_*'$ gesetzt wird. Es gehört also $\mathfrak{r}'$ zur Gesamtheit $\Gamma^n(m - m(\mathfrak{k}'); \mathfrak{B}_*'; \mathfrak{k}')$. Offenbar erhält man jede Menge $\mathfrak{K}$ aus $\Gamma^n(m; \mathfrak{B}'; \mathfrak{g}')$, u. zw. genau einmal, wenn man $\mathfrak{k}'$ alle $(n-1)$-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen vom Grad b_1', die $\subseteqq \mathfrak{g}'$ sind, durchlaufen läßt, ferner $\mathfrak{r}'$ alle Mengen aus $\Gamma^n(m - m(\mathfrak{k}'); \mathfrak{B}_*'; \mathfrak{k}')$. Daraus ergibt sich die Richtigkeit von

---

[103] Auch (36) läßt sich auf $m = 0$ ausdehnen: Für $m = 0$, $\mathfrak{g} \supseteqq 0$ hat man (vgl. Anm. 99) eine einzige Partition $\mathfrak{B}_0$ der Zahl 0 und in (36) rechts zufolge der eben getroffenen Festsetzung lauter verschwindende Summanden mit Ausnahme des einen Summanden $P^n(0; \mathfrak{B}_0; 0) = 1$, der sich für $\mathfrak{k}' = 0$ ergibt. Auf $m < 0$ läßt sich (36) nicht ausdehnen, weil es dann keine Partition $\mathfrak{B}''$ von m gibt.

Satz 21. Die Anzahl $P^n(m; \mathfrak{B}'; \mathfrak{g}')$ jener Mengen $\mathfrak{K}_m^n$, für welche $\mathfrak{A}'(\mathfrak{K}_m^n) = \mathfrak{B}' = (b_1', b_2', b_3', \ldots)$ und $(\mathfrak{K}_m^n)_1 \subseteq \mathfrak{g}'$ ist, genügt der Rekursionsformel

$$P^n(m; \mathfrak{B}'; \mathfrak{g}') = \sum_{\mathfrak{k}'} P^n(m - m(\mathfrak{k}'); \mathfrak{B}'_*; \mathfrak{k}'), \qquad (39)$$

wobei $\mathfrak{B}'_* = (b_2', b_3', \ldots)$ ist und die Summe über alle $(n-1)$-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{k}'$ zu erstrecken ist, die den Bedingungen

$$\mathfrak{k}' \subseteq \mathfrak{g}', \quad m(\mathfrak{k}') = b_1' \qquad (40)$$

genügen.

Natürlich fällt die Summe leer aus, wenn (38) nicht erfüllt ist, und beide Seiten von (39) sind dann null.

63. Wenn im besonderen $m(\mathfrak{g}') = b_1'$ ist, dann ist (40) nur so zu erfüllen, daß $\mathfrak{k}' = \mathfrak{g}'$ genommen wird und wir erhalten

Satz 22. Ist $\mathfrak{B}' = (b_1', b_2', \ldots)$ eine — der Größe nach absteigend geordnete — Partition von m und ist $\mathfrak{g}'$ eine $(n-1)$-dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge vom Grad $m(\mathfrak{g}') = b_1'$, dann ist

$$P^n(m; \mathfrak{B}'; \mathfrak{g}') = P^n(m - m(\mathfrak{g}'); \mathfrak{B}'_*; \mathfrak{g}'), \qquad (41)$$

wobei $\mathfrak{B}'_* = (b_2', \ldots)$ gesetzt ist. Für jede Menge $\mathfrak{K}$ aus $\Gamma^n(m; \mathfrak{B}'; \mathfrak{g}')$ ist dann $(\mathfrak{K})_1 = \mathfrak{k}'$ gleich $\mathfrak{g}'$.

64. Offenbar erhält man nun die Gesamtheit aller komprimierten Gitterpunktmengen aus $\Gamma^n(m; \mathfrak{B}')$, wenn man alle Gesamtheiten $\Gamma^n(m; \mathfrak{B}'; \mathfrak{k}')$ vereinigt, in denen $\mathfrak{k}' = \mathfrak{g}'$ irgend eine vorgegebene $(n-1)$-dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge vom Grad b_1' ist, sodaß

$$P^n(m; \mathfrak{B}') = \sum_{\mathfrak{g}'} (m; \mathfrak{B}'; \mathfrak{g}')$$

gilt, wenn die Summe über die ebengenannten Mengen $\mathfrak{g}'$ erstreckt wird. Unter Beachtung von Nr. **63**, Satz 22, erhält man daraus den

Satz 23. Die Anzahl $P^n(m; \mathfrak{B}')$ der der Bedingung $\mathfrak{A}'(\mathfrak{K}_m^n) = \mathfrak{B}'$ genügenden Mengen $\mathfrak{K}_m^n$ ist gegeben durch die Formel

$$P^n(m; \mathfrak{B}') = \sum_{\mathfrak{g}'} P^n(m - m(\mathfrak{g}'); \mathfrak{B}'_*; \mathfrak{g}'), \qquad (42)$$

wobei die Summe über alle $(n-1)$-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{g}'$ vom Grad b'_1 zu erstrecken ist.

65. Als Beispiel für die Anwendung der entwickelten Rekursionsformeln schreiben wir die Partition $\mathfrak{B}' = (7, 4, 2)$ vor und berechnen $P^3(7, 4, 2)$, das ist die Anzahl aller 3-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}$ vom Grad $m = 13$, für welche eine der Partitionen $\mathfrak{A}^{(\nu)}(\mathfrak{K})$, etwa $\mathfrak{A}'(\mathfrak{K})$, gleich der vorgeschriebenen Partition $(7, 4, 2)$ ist. Da $n = 3$ ist, brauchen wir, um (42) anzuwenden, alle 2-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{g}'$ vom Grad 7. Eine (in $x_1 = 1$ gelegene) 2-dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{g}'$ läßt sich nun sehr einfach durch Angabe einer der beiden Partitionen $\mathfrak{A}''(\mathfrak{g}')$, $\mathfrak{A}'''(\mathfrak{g}')$, etwa durch $\mathfrak{A}''(\mathfrak{g}')$ festlegen[104]. Nun geht durch bloße Vertauschung der beiden Koordinaten x_2 und x_3 aus einer zur Partition $\mathfrak{A}''(\mathfrak{g}') = \mathfrak{B}$ gehörigen komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{g}'$ eine andere komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{g}'_*$ hervor, für welche $\mathfrak{A}''(\mathfrak{g}'_*)$ gleich der zu $\mathfrak{B}$ konjugierten Partition $\mathfrak{B}^{-1}$ ist. Für zwei 2-dimensionale komprimierte Gitterpunktmengen $\mathfrak{g}'$ vom Grad $b'_1 = 7$, die durch konjugierte Partitionen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^{-1}$ gekennzeichnet sind, muß also $P^3(m-7; \mathfrak{B}'_*; \mathfrak{g}')$ denselben Wert haben. Statt also die Summe in (42) über alle 15 Partitionen $\mathfrak{B}$ von 7 (als Repräsentanten der zugehörigen zweidimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen vom Grad 7) zu erstrecken, kann man von zwei Partitionen von 7, die zu einander konjugiert und von einander verschieden sind, nur die eine aufnehmen und die Summe S'' der zugehörigen Glieder doppelt nehmen, wozu dann noch die einfache Summe S' über die zu sich selbst konjugierten Parti-

---

[104] Die andere, $\mathfrak{A}'''(\mathfrak{g}')$, ist dann die zu $\mathfrak{A}''(\mathfrak{g}')$ „konjugierte" Partition von $b'_1 = 7$.

tionen $\mathfrak{B}$ tritt. Dementsprechend erstrecke sich in unserem Falle (Gradzahl 7) S'' auf die 7 Partitionen

$$\mathfrak{B}_1 = (7), \quad \mathfrak{B}_2 = (6, 1), \quad \mathfrak{B}_3 = (5, 2), \quad \mathfrak{B}_4 = (5, 1^2),$$
$$\mathfrak{B}_5 = (4, 3), \quad \mathfrak{B}_6 = (4, 2, 1), \quad \mathfrak{B}_7 = (3^2, 1),$$

während S' nur den einen auf

$$\mathfrak{B}_8 = (4, 1^3)$$

bezüglichen Summanden hat und

$$P^3(7, 4, 2) = 2\,S'' + S'$$

ist.

Greifen wir nun beispielsweise in (42) jenes Glied v_3 der Summe S'' heraus, das sich auf die durch $\mathfrak{B}_3 = (5, 2)$ (gemäß $\mathfrak{A}''(\mathfrak{g}') = \mathfrak{B}_3$) charakterisierte 2-dimensionale Gitterpunktmenge $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}'_3$ bezieht (die also aus den 7 Punkten $(1, 1, x_3)$ mit $1 \leqq x_3 \leqq 5$, $(1, 2, x_3)$ mit $1 \leqq x_3 \leqq 2$ besteht). Da $m - 7 = 6$, $\mathfrak{B}'_* = (4, 2)$ ist, so ist $v_3 = P^3(6; (4, 2)'; \mathfrak{g}'_3)$. Zur Berechnung dieser Zahl haben wir gemäß (39) eine Summe über alle 2-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{k}'$ zu bilden, die den Bedingungen (40), also in unserem Falle den Bedingungen

$$\mathfrak{k}' \subseteq \mathfrak{g}'_3, \quad m(\mathfrak{k}') = 4$$

genügen. Da $\mathfrak{g}'_3$ durch $\mathfrak{A}''(\mathfrak{g}'_3) = (5, 2)$ gekennzeichnet ist, so ist leicht zu sehen, daß $\mathfrak{k}' \subseteq \mathfrak{g}'_3$ darauf hinausläuft, daß $\mathfrak{A}''(\mathfrak{k}') \ll (5, 2)$ ist (Nr. **58**), was für $\mathfrak{A}''(\mathfrak{k}') = \mathfrak{W}$ die drei Möglichkeiten

$$\mathfrak{W}_1 = (4, 0), \quad \mathfrak{W}_2 = (3, 1), \quad \mathfrak{W}_3 = (2, 2)$$

ergibt; die zugehörigen 2-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen vom Grad 4 mögen $\mathfrak{k}'_1$, $\mathfrak{k}'_2$, $\mathfrak{k}'_3$ heißen; Formel (39) liefert dann

$$v_3 = w_1 + w_2 + w_3,$$

wobei (wegen $6 - m(\mathfrak{k}') = 2$, $\mathfrak{B}'_* = (2)$)

$$w_\nu = P^3(2; (2)'; \mathfrak{k}'_\nu) \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

ist. Jedes w_ν ist also die Anzahl derjenigen 2-dimensionalen[104a] komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{k}$, die den Bedingungen

$$\mathfrak{k} \subseteqq \mathfrak{k}'_\nu, \quad m(\mathfrak{k}) = 2$$

genügen. Eine solche Menge $\mathfrak{k}$ ist charakterisierbar durch eine Partition $\mathfrak{A}''(\mathfrak{k})$ der Zahl 2, die der Bedingung $\mathfrak{A}''(\mathfrak{k}) \ll \mathfrak{B}_\nu$ genügt. Das gibt für $\nu = 1$ die eine Partition (2, 0), für $\nu = 2$ und $\nu = 3$ die zwei Partitionen (2, 0) und (1, 1), woraus sich $w_1 = 1$, $w_2 = w_3 = 2$ und $v_3 = 5$ ergibt.

In ähnlicher Weise erhält man $v_1 = 1$, $v_2 = 3$, $v_4 = v_5 = 5$, $v_6 = 7$, $v_7 = v_8 = 6$ und daher

$$S'' = v_1 + \ldots + v_7 = 32, \quad S'' = v_8 = 6$$

und

$$P^3(7, 4, 2) = 2\,S'' + S' = 70. \tag{43}$$

Um $P^3(m)$ für $m = 13$ zu berechnen, hat man gemäß (29) die Zahlen $P^3(13; \mathfrak{B})$ für alle 101 Partitionen $\mathfrak{B}$ der Zahl 13 zu berechnen. Wenn dies — ebenso wie soeben für $\mathfrak{B} = (7, 4, 2)$ — für die übrigen 100 Partitionen ausgeführt wird[105], erhält man als Summe[106]

$$P^3(13) = 2481. \tag{44}$$

66. Man kann aus der Gesamtheit $\Gamma^n(m)$ aller komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}^n_m$ in noch etwas allgemeinerer Weise, als bisher in diesem §, Teilgesamtheiten herausheben. Seien etwa $p_1, \ldots, p_n$ nicht-negative ganze Zahlen. Für jeden Wert von ν ($1 \leqq \nu \leqq n$) für den $p_\nu \geqq 1$ ist, sei ein den Ungleichungen

$$b_1^{(\nu)} \geqq b_2^{(\nu)} \geqq \ldots \geqq 0$$

[104a] Da die vorgeschriebene Partition $\mathfrak{B}'_* = (2)$ nur eine einzige Zahl enthält, reduziert sich die Dimensionszahl notwendig von 3 auf 2.

[105] Beispielsweise ist (was früher herangezogen wurde, vgl. Anm. 74) $P^3(6, 5, 2) = 34$, $P^3(7, 5, 1) = 39$.

[106] Wegen weiterer Zahlenangaben sei auf die spätere Note „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren IV. Formeln und Tabellen" verwiesen.

genügendes System $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ von p_ν ganzen Zahlen $b_\mu^{(\nu)}$ $(1 \leqq \mu \leqq p_\nu)$ gegeben, mit einer Summe $m(\mathfrak{B}^{(\nu)}) \leqq m$; ferner seien die $(n-1)$-dimensionalen Gitterpunktmengen $\mathfrak{g}', \ldots, \mathfrak{g}^{(n)}$ gegeben, wobei $\mathfrak{g}^{(\nu)}$ in der Ebene $x_\nu = 1$ gelegen sei. Sei $(a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)}, \ldots)$ die zu einer komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}_m^n$ zugehörige Partition $\mathfrak{A}^{(\nu)}(\mathfrak{K}_m^n)$. Die Menge $\mathfrak{K}_m^n$ werde dann zur Gesamtheit

$$\Gamma^n(m; \mathfrak{B}', \ldots, \mathfrak{B}^{(n)}; \mathfrak{g}', \ldots, \mathfrak{g}^{(n)}) \tag{45}$$

gerechnet (und die Anzahl der zu dieser Gesamtheit gehörigen $\mathfrak{K}_m^n$ werde mit

$$P^n(m; \mathfrak{B}', \ldots, \mathfrak{B}^{(n)}; \mathfrak{g}', \ldots, \mathfrak{g}^{(n)})$$

bezeichnet), wenn die Mengen $\mathfrak{k}^{(\nu)} = (\mathfrak{K}_m^n)_\nu$ den Ungleichungen

$$\mathfrak{k}^{(\nu)} \subseteq \mathfrak{g}^{(\nu)} \tag{46}$$

und die Partitionen $\mathfrak{A}^{(\nu)}(\mathfrak{K}_m^n)$ den Gleichungen

$$a_\mu^{(\nu)} = b_\mu^{(\nu)} \text{ für } 1 \leqq \mu \leqq p_\nu \tag{47}$$

genügen. Für diejenigen Indizes ν, für welche $p_\nu = 0$ ist, sei $\mathfrak{A}^{(\nu)}(\mathfrak{K}_m^n)$ keiner Bedingung unterworfen. Natürlich fällt die Gesamtheit (45) leer aus, wenn unter den Zahlen $b_1^{(\nu)}$ die Zahl null vorkommt (nämlich immer, wenn $m > 0$ ist, also abgesehen von dem trivialen Fall $m = 0$). Aber auch sonst kann (45) leer ausfallen, z. B., wie nicht näher ausgeführt werden soll, wenn man $m = 6$, $p_1 = 0$, $\mathfrak{B}'' = (3, 2, 1)$, $\mathfrak{B}''' = (4, 2)$, $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}''' = \mathfrak{J}^2(6)$ (vgl. Nr. **49**) und $\mathfrak{g}' =$ derjenigen 2-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmenge wählt, die durch $\mathfrak{A}''(\mathfrak{g}') = (3, 1, 1)$ — oder durch $\mathfrak{A}'''(\mathfrak{g}') = (3, 1, 1)$ — gekennzeichnet ist. Ebenso wie die Bedingungen (47) für diejenigen Werte ν wegfallen, für die $p_\nu = 0$ ist, so fallen die Bedingungen (46) weg (d. h. sind von selbst erfüllt) für diejenigen ν, für welche $\mathfrak{g}^{(\nu)} = \mathfrak{J}^{(n-1)}(m)$ gewählt wird. Man erhält also beispielsweise die in Nr. **60** betrachtete Gesamtheit $\Gamma^n(m; \mathfrak{B}''; \mathfrak{g}')$, wenn man $p_\nu = 0$ für $\nu \neq 2$, $m(\mathfrak{B}'') = m$, $\mathfrak{g}^{(\nu)} = \mathfrak{J}^{(n-1)}(m)$ für $\nu \neq 1$ wählt. Ohne auf diese allgemeineren Gesamtheiten sonst weiter einzugehen, werde nur für den Fall, daß $\mathfrak{B}^{(\nu_1)}, \ldots, \mathfrak{B}^{(\nu_r)}$ Partitionen von m sind $(0 \leqq r \leqq n)$ die Formel

$$P^n(m; \mathfrak{B}^{(\nu_1)}, \ldots, \mathfrak{B}^{(\nu_r)}; \mathfrak{g}') = \tag{48}$$

$$= \sum_{\mathfrak{k}' \subseteq \mathfrak{g}'} P^n(m - m(\mathfrak{k}'); \mathfrak{B}^{(\nu_1)} - \mathfrak{A}^{(\nu_1)}(\mathfrak{k}'), \ldots, \mathfrak{B}^{(\nu_r)} - \mathfrak{A}^{(\nu_r)}(\mathfrak{k}'); \mathfrak{k}')$$

erwähnt, wobei im Falle $\nu_1 = 1$ anstelle von $\mathfrak{B}^{(\nu_1)} - \mathfrak{A}^{(\nu_1)}(\mathfrak{k}')$ die in Nr. **62** erklärte Partition $\mathfrak{B}'_*$ zu setzen ist und im übrigen die früheren Erläuterungen sinngemäß Platz greifen.

Diese Formel (48) stellt unter den hier angeführten Formeln (vgl. Satz 18 bis 23, sowie (30), (36), (37)) die weitestgehende Verallgemeinerung der in Note I, l. c. [95] erwähnten Rekursionsformel (27) bzw. (28) für Anzahlen von Partitionen dar.

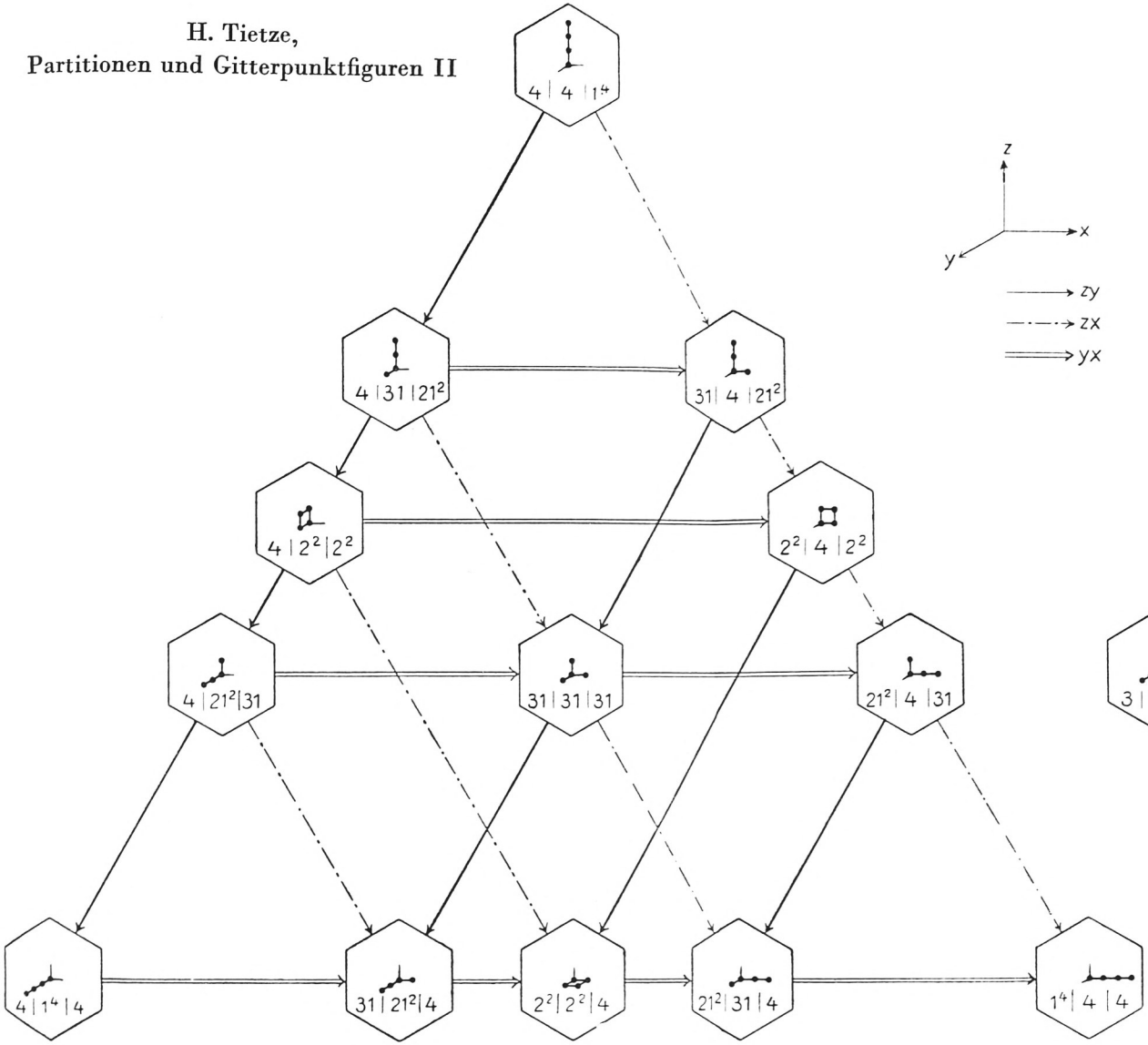


Fig. Ic.

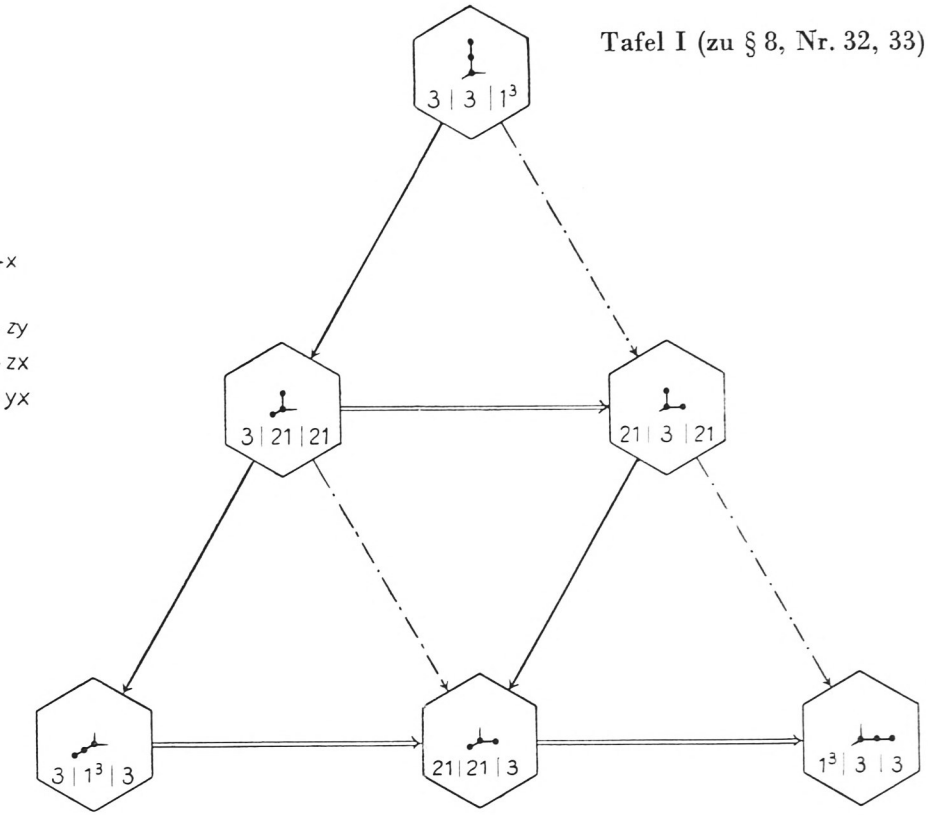


Fig. I b.

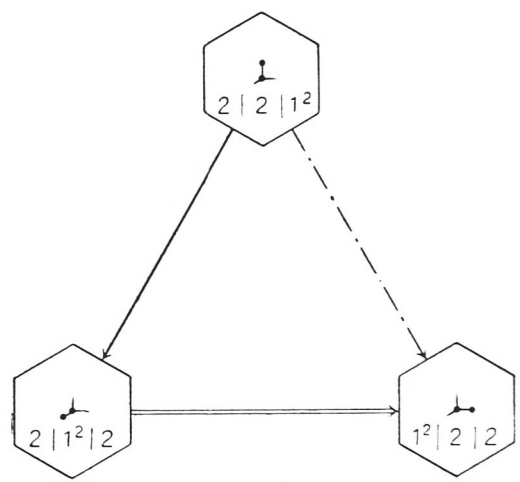
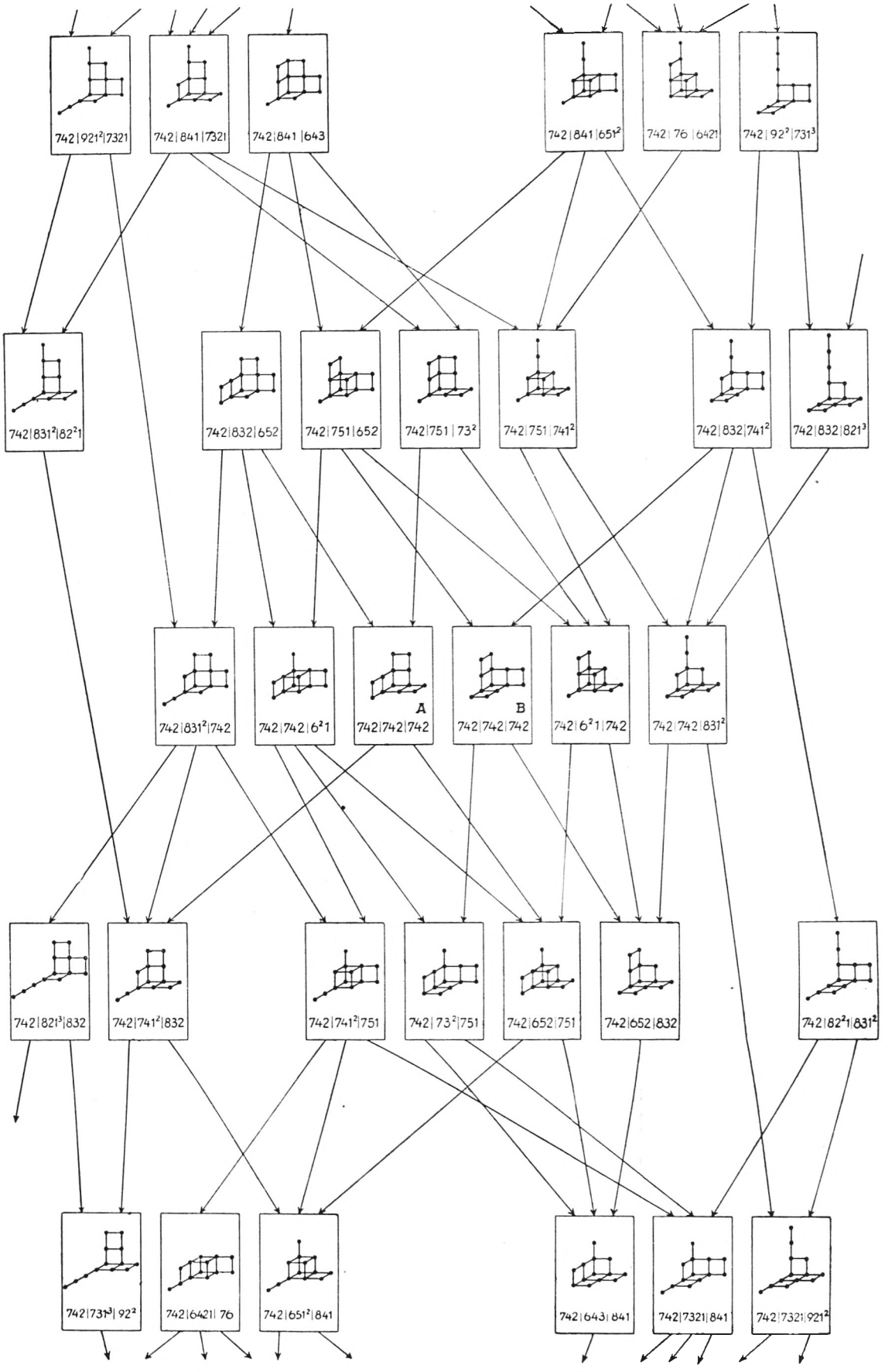


Fig. Ia


742|921²|7321
742|841|7321
742|841|643
742|841|651²
742|76|6421
742|92²|731³
742|831²|82²1
742|832|652
742|751|652
742|751|73²
742|751|741²
742|832|741²
742|832|821³
742|831²|742
742|742|6²1
A
742|742|742
B
742|742|742
742|6²1|742
742|742|831²
742|82¹³|832
742|741²|832
742|741²|751
742|73²|751
742|652|751
742|652|832
742|82²1|831²
742|731³|92²
742|6421|76
742|651²|841
742|643|841
742|7321|841
742|7321|921²

z
x
y
zy
zx
yx
832|652|742
742|742|661
742|742|742
742|661|742
751|643|751
742|652|751
733|742|751
7411|742|751
(2)
742|6511|841
742|643|841
643|652|76
7222|652|931
652|652|841

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1940

Band/Volume: 1940

Autor(en)/Author(s): Tietze Heinrich

Artikel/Article: Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren. Komprimierte Gitterpunktmengen 69-131