Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1940. Heft II/III

Sitzungen Juli-Dezember

München 1940
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren III.

Ein Satz über das Verhältnis der Lösungsanzahlen gewisser Partitionsaufgaben.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgetragen in der Sitzung vom 6. Juli 1940.

§ 1. Der Satz über Lösungsanzahlen.

1. Es handelt sich im Folgenden um eine Verallgemeinerung eines Satzes, über den bei früherer Gelegenheit berichtet wurde[1]. Der dort mitgeteilte Satz[2] läßt sich so auffassen, daß er sich auf gewisse Aufgaben über zweidimensionale Gitterpunktfiguren bezieht[3]. Nunmehr soll, wie l. c.[1] am Schluß angedeutet, eine Verallgemeinerung auf eine beliebige Anzahl von Dimensionen angegeben werden (vgl. unten, Satz 1).

2. Bereits in einer früheren Note[3] ist die folgende Aufgabe besprochen worden: Gegeben ist eine Gesamtheit von $n+1$ Partitionen derselben Zahl m — sie mögen mit

$$\mathfrak{A}^{(\nu)} = (a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)}, \ldots, a_{k_\nu}^{(\nu)}) \qquad (0 \leqq \nu \leqq n)$$

bezeichnet werden, sodaß also jedes $a_\mu^{(\nu)}$ $(0 \leqq \nu \leqq n,\ 1 \leqq \mu \leqq k_\nu)$ ganz und $\geqq 0$, sowie für jedes ν

$$a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \ldots + a_{k_\nu}^{(\nu)} = m$$

---

[1] Siehe Sitz.ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., 1939, S. 16* (Sitzung vom 2. 12. 1939).

[2] Vgl. hierüber Monatshefte f. Math. u. Physik, **49** (1940) „Über symmetrische Funktionen von endlich oder abzählbar unendlich vielen Veränderlichen II“, Nr. **41–45** (Satz VIII und IX). Siehe auch ebenda Bd. **48** (1939), Nr. **1**, S. 488, Aussage VI.

[3] Sitz.ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., 1940, S. 23–54, „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren I. Rekursionsformeln“, Nr. **2**, **3**, **10**.

ist, — es wird dann die Aufgabe gestellt, zu diesen vorgegebenen Partitionen eine Figur von m Gitterpunkten zu finden, so daß in jeder Ebene $x_\nu = \mu$ genau $a_\mu^{(\nu)}$ Gitterpunkte der Figur liegen. Diese Aufgabe wurde l. c. als das Problem $\mathfrak{P}\,(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{A}'\,|\dots|\,\mathfrak{A}^{(n)})$ und die Anzahl seiner Lösungen, d. h. die Anzahl der Gitterpunktfiguren, deren jede den verlangten Bedingungen genügt, mit $N\,(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{A}'\,|\dots|\,\mathfrak{A}^{(n)})$ bezeichnet.

Andererseits bestehen innerhalb der Gesamtheit aller Partitionen derselben Zahl m gewisse Ordnungsbeziehungen[4]. Der Satz, den wir beweisen wollen, lautet nun:

Satz 1. Wenn $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \dots, \mathfrak{A}^{(n)}$ und $\mathfrak{A}^*$ Partitionen derselben Zahl m sind ($n+1 \geqq 2$), wenn dabei für die $n+1$ Partitionen $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ $(0 \leqq \nu \leqq n)$ das Problem $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\,(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{A}'\,|\dots|\,\mathfrak{A}^{(n)})$ lösbar, also

$$N = N\,(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{A}'\,|\dots|\,\mathfrak{A}^{(n)}) > 0$$

ist und wenn zwischen den Partitionen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^*$ die Beziehung[4]

$$\mathfrak{A} > \mathfrak{A}^*$$

besteht, dann ist auch das Problem $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}\,(\mathfrak{A}^*|\mathfrak{A}'|\dots|\mathfrak{A}^{(n)})$ lösbar und es ist

$$N^* > N, \tag{1}$$

wo N^* die Lösungsanzahl $N\,(\mathfrak{A}^*\,|\,\mathfrak{A}'\,|\dots|\,\mathfrak{A}^{(n)})$ bedeutet. Genauer gilt[5]

$$N^* \geqq \left(1 + \frac{1}{\left[\frac{m}{2}\right]}\right) N. \tag{2}$$

Für $n+1 = 2$ (wo die Zahlen $N\,(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{A}')$ die Cayley-Perron'sche Matrix bilden) ist das die l. c.[2] festgestellte Aussage.

---

[4] Man vgl. l. c.[2], § 5, Nr. **24**. Wir kommen auf die Bedeutung der Ungleichung $\mathfrak{A} > \mathfrak{A}^*$ zwischen zwei Partitionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^*$ derselben Zahl m noch zurück (s. unten, § 2, Nr. **5**).

[5] Hiebei $\left[\frac{m}{2}\right]$ = größte ganze Zahl in $\frac{m}{2}$. Natürlich ist die Voraussetzung $N > 0$ nur für (1) von Belang, für (2) aber entbehrlich.

3. Die l. c. zum Beweis des Satzes für $n+1=2$ angestellten Überlegungen lassen sich leicht auf den betrachteten allgemeineren Fall übertragen. Dabei sei es gestattet, der folgenden Darstellung des Beweises die geometrische Auffassung der Aufgaben $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{A}'\,|\ldots|\,\mathfrak{A}^{(n)})$ (als Fragen nach Gitterpunktfiguren) zugrundezulegen, während die Darstellung l. c. [2], Nr. **42** ff., der Auffassung als Zahlenaufgaben entspricht. Der Sachverhalt ist natürlich derselbe (vgl. l. c. [3], Nr. **3**).

Zunächst aber haben wir noch ein paar Tatsachen über die Ordnungsbeziehungen zwischen Partitionen derselben Zahl m zusammenzustellen.

§ 2. Ein Hilfssatz über Ordnungsbeziehungen zwischen Partitionen.

4. Denkt man die Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ einer Partition $\mathfrak{A}$ von m der Größe nach fallend geordnet[6]

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_k$$

so kann man $\mathfrak{A}$ veranschaulichen durch die Figur der m Gitterpunkte in der Ebene, deren Koordinaten x, y den Bedingungen

$$y=\mu, \qquad 0<x\leqq a_\mu$$

genügen. Nehmen wir an, es gebe zwei Indizes λ, ρ $(1\leqq\lambda<\rho\leqq k+1)$, sodaß

$$a_\lambda > a_{\lambda+1}, \quad a_{\varrho-1} > a_\varrho \tag{3}$$

und im Falle $\rho=\lambda+1$ überdies

$$a_\lambda \geqq a_{\lambda+1}+2 = a_\varrho+2 \tag{4}$$

ist[7] (es ist, wie für $\rho=k+1$ zu beachten, $a_{k+1}=0$ zu setzen). Dann bilden auch die durch

$$a_\lambda^* = a_\lambda - 1, \qquad a_\varrho^* = a_\varrho + 1, \qquad a_\mu^* = a_\mu \;(\mu \neq \lambda, \rho) \tag{5}$$

---

[6] Im Hinblick auf diese l. c. [2] durchwegs zugrundegelegte Anordnung wurde dort einfach von einem „monotonen Zahlensystem" $\mathfrak{A}$ gesprochen.

[7] Übrigens gibt es immer mindestens ein solches Indexpaar λ, ρ, es sei denn daß $a_\mu=1$ für $1\leqq\mu\leqq m$ ($a_\mu=0$ für $m<\mu\leqq k$) ist. Vgl. hiezu l. c. [8], § 7, insbesondere Nr. **35**.

definierten Zahlen a_1^*, a_2^*, ... eine Partition $\mathfrak{A}^*$ von m, wobei wieder

$$a_1^* \geqq a_2^* \geqq \ldots \tag{6}$$

gilt. Die Gitterpunktfigur, die $\mathfrak{A}^*$ veranschaulicht, entsteht aus der Figur für $\mathfrak{A}$ einfach dadurch, daß der Gitterpunkt $x = a_\lambda$, $y = \lambda$ versetzt wird in die Lage $x = a_\varrho + 1$, $y = \rho$, alle anderen Gitterpunkte der Figur aber beibehalten werden.

Der Übergang von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}^*$ möge als ein „einfacher Abbau" bezeichnet werden (vgl. Anm. 7a). Er liegt beispielsweise vor für

$$\mathfrak{A} = (5, 5, 2, 1, 1, 1),$$
$$\mathfrak{A}^* = (5, 4, 2, 1, 1, 1, 1).$$

(hier ist $\lambda = 2$, $\rho = 7$).

Wir fügen noch folgende später verwendeten Ungleichungen bei, wobei $d^* = a_\lambda^* - a_\varrho^*$ gesetzt werde. Wegen (6) ist

$$d^* = a_\lambda^* - a_\varrho^* \geqq 0. \tag{7}$$

Ferner ist $m = a_1^* + a_2^* + \ldots + a_k^* \geqq a_\lambda^* + a_\varrho^* \geqq 2 a_\varrho^*$, also

$$a_\varrho^* \leqq \left[\frac{m}{2}\right]. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt

$$\frac{d^* + 1}{a_\varrho^*} \geqq \frac{1}{\left[\frac{m}{2}\right]}. \tag{9}$$

Aus $m \geqq 2 a_\varrho^*$ folgt

$$m \geqq 2, \tag{10}$$

wie schon daraus klar ist, daß für $m = 1$ nur eine einzige Partition (mit $a_1 = 1$, $a_\mu = 0$ für $\mu > 1$) vorhanden, ein Übergang von einer Partition zu einer anderen also nicht möglich ist.

5. Seien $\mathfrak{A} = (a_1, \ldots, a_k)$, $\mathfrak{A}^* = (a_1^*, \ldots, a_k^*)$ zwei Partitionen von m. Bildet man für jede von ihnen die Summenzahlen

$$A_\mu = \sum_{i=\mu}^{k}{}' a_i, \quad A_\mu^* = \sum_{i=\mu}^{k}{}' a_i^*, \quad (1 \leqq \mu \leqq k)$$

so bedeutet die l. c. [4] eingeführte Ordnungsbeziehung

$$\mathfrak{A} > \mathfrak{A}^*, \tag{11}$$

daß sämtliche Ungleichungen[7a]

$$A_\mu \leqq A_\mu^* \quad (1 \leqq \mu \leqq k)$$

bestehen und dabei $A_\mu < A_\mu^*$ ist für mindestens einen Wert μ.

Offenbar ist die Beziehung (11) jedesmal erfüllt, wenn ein einfacher Abbau (Nr. **4**) von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}^*$ führt.

6. Von besonderer Bedeutung für die Ordnungsbeziehungen zwischen den Partitionen derselben Zahl m sind übrigens gewisse Sonderfälle der einfachen Abbauten, die sogenannten „elementaren Abbauten"[8]. Es zeigt sich nämlich, wie l. c. dargelegt wurde[9], daß allemal, wenn für zwei Partitionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^*$ derselben Zahl m die Beziehung (11) gilt, man stets durch eine endliche Anzahl von elementaren Abbauten von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}^*$ gelangen kann[10]. Da nun die elementaren Abbauten zu den einfachen Abbauten gehören, so gilt also, — und diese weniger scharfe Feststellung genügt als Hilfssatz für das Folgende —:

Satz 2. Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^*$ zwei in der Beziehung $\mathfrak{A} > \mathfrak{A}^*$ stehende Partitionen derselben Zahl m, dann ist es möglich, durch eine endliche Anzahl (eine oder mehrere) von einfachen Abbauten von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}^*$ zu gelangen.

7. Wie aus Satz 2 folgt, ist es für den Beweis von Satz 1 ausreichend, den Beweis für den besonderen Fall zu erbringen, daß $\mathfrak{A}^*$ aus $\mathfrak{A}$ durch einen einfachen Abbau entsteht.

Das soll in § 3 geschehen.

[7a] Die Festsetzung (11), die mit $A_\mu \leqq A_\mu^*$ nicht in Einklang scheint, wird verständlich beim Anblick von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^*$ (vgl. etwa das Zahlenbeispiel in Nr. **4**): für das erste Paar verschiedener Zahlen a_μ, a_μ^* gilt $a_\mu > a_\mu^*$. Daher auch die Bezeichnnng „Abbau".

[8] Man vgl. hierüber l. c. [2], §§ 6, 7; u. zw. speziell für die Definition des elementaren Aufbaues oder Abbaues Nr. **26**, **27**.

[9] Vgl. l. c. [8], Nr. **29**, Satz (g).

[10] Ein Beispiel hierfür findet sich unten in Nr. **13**.

§ 3. Beweis von Satz 1.

8. Sei also $\mathfrak{A}^*$ durch einen einfachen Abbau aus $\mathfrak{A}$ gewonnen. Es liege somit der in Nr. **4** dargestellte Sachverhalt vor. Wir betrachten nun die Gesamtheit der Lösungen des in Nr. **2** genannten Problems $\mathfrak{P}$ und führen für diese Lösungen eine Klassifikation ein, desgleichen für die Lösungen[11] von $\mathfrak{P}^*$.

Bei jeder dieser Klassifikationen ist in gleicher Weise zu achten: einerseits auf die Gitterpunkte in den Ebenen $x_0 = \lambda$ und $x_0 = \rho$, andererseits auf die Gitterpunkte in den übrigen Ebenen $x_0 = \mu$.

In eine „Spezies" fassen wir alle Lösungen von $\mathfrak{P}$ zusammen, die in sämtlichen Ebenen $x_0 = \mu$ ($\mu \neq \lambda, \rho$) die gleichen Gitterpunkte aufweisen. Um ferner die „Charakteristik" c einer Lösung von $\mathfrak{P}$ zu gewinnen, gehen wir folgendermaßen vor. Ein Gitterpunkt G in der Ebene $x_0 = \lambda$ und ein Gitterpunkt H in der Ebene $x_0 = \rho$ sollen einander „korrespondierend" heißen, wenn sie in allen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ übereinstimmen, wenn also

$$G = (\lambda, x_1, \ldots, x_n), \quad H = (\rho, x_1, \ldots, x_n)$$

ist. Liegt eine Lösung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P}$ vor, so mögen diejenigen Paare korrespondierender Gitterpunkte G, H betrachtet werden, von denen wenigstens einer zu den Gitterpunkten der Lösung $\mathfrak{L}$ gehört. Es werde dann mit α die Anzahl derjenigen Paare G, H bezeichnet, bei denen sowohl G wie H zur Lösung $\mathfrak{L}$ gehört (Gitterpunktpaare „erster Sorte"); ferner mit β die Anzahl der Paare (Paare „zweiter Sorte"), für welche H zu $\mathfrak{L}$ gehört, jedoch G nicht; endlich mit γ die Anzahl der Paare („dritter Sorte"), für welche G zu $\mathfrak{L}$ gehört, jedoch H nicht. Dabei ist natürlich

$$\alpha + \gamma = a_\lambda, \quad \alpha + \beta = a_\rho.$$

[11] Daß Lösungen von $\mathfrak{P}$ vorhanden sind, gehört ausdrücklich zu den Voraussetzungen des Satzes 1, während das Vorhandensein von Lösungen von $\mathfrak{P}^*$ ja erst bewiesen werden soll. Das hindert natürlich nicht, eine Klassifikation der Lösungen einzuführen, wenn wir auch zunächst mit der Möglichkeit leer bleibender Kategorien rechnen.

Unter Beachtung von (5) hat man somit

$$\gamma - \beta = a_\lambda - a_\varrho = a_\lambda^* - a_\varrho^* + 2 = d^* + 2;$$

wegen $\beta \geqq 0$ und $\alpha \geqq 0$ ist also

$$d^* + 2 \leqq \gamma \leqq a_\lambda = a_\lambda^* + 1.$$

Als „Charakteristik" unserer Lösung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P}$ werde dann die Zahl $c = \gamma - 1$ bezeichnet, die somit der Ungleichung

$$d^* + 1 \leqq c \leqq a_\lambda^* \tag{12}$$

genügt.

In analoger Weise werde eine Klassifikation der Lösungen von $\mathfrak{P}^*$ nach Spezies und Charakteristik vorgenommen. Zur gleichen „Spezies" sollen wieder alle Lösungen von $\mathfrak{P}^*$ gerechnet werden, die in sämtlichen Ebenen $x_0 = \mu$ $(\mu \neq \lambda, \rho)$ dieselben Gitterpunkte aufweisen. Zwecks Bestimmung der Charakteristik sollen (analog wie früher für die Lösungen von $\mathfrak{P}$) die Paare korrespondierender Gitterpunkte in den Ebenen $x_0 = \lambda$ und $x_0 = \rho$ herangezogen und die Zahlen α^*, β^*, γ^* wie dort (als Anzahlen der Paare erster, zweiter und dritter Sorte) definiert werden; es gelten dann die Beziehungen

$$\alpha^* + \gamma^* = a_\lambda^*, \quad \alpha^* + \beta^* = a_\varrho^*,$$

also $\gamma^* - \beta^* = a_\lambda^* - a_\varrho^* = d^*$ und somit $d^* \leqq \gamma^* \leqq a_\lambda^*$. Als „Charakteristik" unserer Lösung von $\mathfrak{P}^*$ soll nunmehr (abweichend von der entsprechenden Erklärung für die Lösungen von $\mathfrak{P}$) die Zahl $c = \gamma^*$ selbst erklärt werden, für die also

$$d^* \leqq c \leqq a_\lambda^* \tag{13}$$

gilt. Wir merken noch an, daß die Anzahl der Gitterpunktpaare zweiter Sorte durch

$$\beta^* = c - d^* \tag{14}$$

gegeben ist.

9. Offenbar hat es auch einen Sinn zu sagen, daß eine Lösung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P}$ und eine Lösung $\mathfrak{L}^*$ von $\mathfrak{P}^*$ zur gleichen Spezies gehören;

es soll dies natürlich bedeuten, daß $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^*$ in sämtlichen Gitterpunkten übereinstimmen, die in den Ebenen $x_0 = \mu$ $(\mu \neq \lambda, \rho)$ liegen. Ferner sagen wir, daß $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^*$ dieselbe Charakteristik haben, wenn für beide die in Nr. **8** erklärte Zahl c den gleichen Wert hat.

Mit N_c bezeichnen wir die Anzahl aller Lösungen von $\mathfrak{P}$ mit der Charakteristik c (gleichgültig welcher Spezies), mit N_c^* analog die Anzahl aller Lösungen von $\mathfrak{P}^*$ mit der Charakteristik c. Es ist also, unter Beachtung von (12) und (13)

$$N = \sum_{c = d^* + 1}^{a_\lambda^*} N_c, \qquad N^* = \sum_{c = d^*}^{a_\lambda^*} N_c^*. \tag{15}$$

Da es gemäß (12) keine Lösungen von $\mathfrak{P}$ mit der Charakteristik $c = d^*$ gibt, ist $N_{d^*} = 0$ zu setzen, sodaß auch die erste Summe in (15) von $c = d^*$ bis $c = a_\lambda^*$ erstreckt werden kann.

10. Zwischen den Anzahlen der Lösungen von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^*$ mit gleicher Charakteristik c besteht nun, wie wir sogleich sehen werden, die Beziehung

$$(c + 1)\, N_c = (c - d^*)\, N_c^*. \tag{16}$$

Zunächst ist (16) wegen $N_{d^*} = 0$ offenbar für $c = d^*$ richtig. Sei also weiterhin $d^* + 1 \leqq c \leqq a_\lambda^*$ angenommen. Sei $\mathfrak{L}$ eine Lösung von $\mathfrak{P}$ mit der Charakteristik c, also mit $c + 1$ Gitterpunktpaaren „dritter Sorte". Indem wir eines dieser Paare G, H nehmen (wobei also G zu $\mathfrak{L}$ gehört, jedoch H nicht), alle sonstigen Gitterpunkte von $\mathfrak{L}$ ungeändert lassen, jedoch den Gitterpunkt G durch H ersetzen, erhalten wir in dem neuen System von Gitterpunkten offenbar eine Lösung $\mathfrak{L}^*$ von $\mathfrak{P}^*$, und zwar von gleicher Spezies und gleicher Charakteristik c wie $\mathfrak{L}$ (die Anzahl γ^* der Paare dritter Sorte ist ja bei $\mathfrak{L}^*$ um 1 kleiner als bei $\mathfrak{L}$, also $\gamma^* = c$; diese Anzahl γ^* selbst ist aber nach der in Nr. **8** gegebenen Erklärung die Charakteristik von $\mathfrak{L}^*$). Wenn wir $\mathfrak{L}^*$ aus $\mathfrak{L}$ „hergeleitet" nennen, so sind also aus der einen Lösung $\mathfrak{L}$ insgesamt $c + 1$ Lösungen $\mathfrak{L}^*$ herleitbar, weil ja das Paar G, H auf $c + 1$ verschiedene Arten gewählt werden kann.

Die Gleichung (16) ist dann bewiesen, wenn wir noch zeigen, daß jede Lösung $\mathfrak{L}^*$ von $\mathfrak{P}^*$ mit der Charakteristik c auf $c - d^*$ verschiedene Arten aus einer Lösung von $\mathfrak{P}$ hergeleitet werden kann. Das ist aber sofort zu sehen. Um nämlich eine Lösung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P}$ zu finden, aus der $\mathfrak{L}^*$ herleitbar ist, brauchen wir in $\mathfrak{L}^*$ nur auf die Gitterpunktpaare G, H „zweiter Sorte" zu achten (wobei also H zu $\mathfrak{L}^*$ gehört, jedoch G nicht). Denn eine Lösung $\mathfrak{L}$, aus der $\mathfrak{L}^*$ herleitbar ist, kann aus $\mathfrak{L}^*$ natürlich so und nur so gewonnen werden, daß man in $\mathfrak{L}^*$ ein Gitterpunktpaar zweiter Sorte wählt und (unter Beibehaltung aller übrigen Gitterpunkte von $\mathfrak{L}^*$) den Gitterpunkt H durch G ersetzt. Das geht nun auf soviel verschiedene Arten, als es in $\mathfrak{L}^*$ Paare zweiter Sorte gibt; da gemäß (14) deren Anzahl $\beta^* = c - d^*$ ist, ist tatsächlich jede Lösung von $\mathfrak{P}^*$ mit der Charakteristik c auf $c - d^*$ Arten aus einer Lösung von $\mathfrak{P}$ herleitbar. Wie schon gesagt, ist damit (16) bewiesen.

11. Für $d^* + 1 \leqq c \leqq a_\lambda^* = a_\varrho^* + d^*$ ist nun (vgl. (9)):

$$\frac{c+1}{c-d^*} = 1 + \frac{d^*+1}{c-d^*} \geqq 1 + \frac{d^*+1}{a_\varrho^*} \geqq 1 + \frac{1}{\left[\frac{m}{2}\right]},$$

gemäß (16) also

$$N_c^* \geqq \left(1 + \frac{1}{\left[\frac{m}{2}\right]}\right) N_c$$

und diese Ungleichung gilt wegen $N_{d^*} = 0$ auch für $c = d^*$. Hieraus aber folgt wegen (15) die Ungleichung (2), womit Satz 1 — zunächst für den Fall eines einfachen Abbaues von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}^*$, damit aber gemäß Nr. **7** allgemein — bewiesen ist.

12. Daß in Satz 1 die Konstante $\left(1 + \frac{1}{\left[\frac{m}{2}\right]}\right)$ in Ungleichung (2) durch keine größere ersetzt werden kann, geht aus den Betrachtungen l. c.[2] hervor, wo für den zweidimensionalen Fall ($n + 1 = 2$) gezeigt wurde, daß für jeden Wert $m \geqq 2$ zwei Probleme $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}')$ und $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}^* \mid \mathfrak{A}')$ existieren, sodaß für die zugehörigen Lösungsanzahlen N und N^* in (2) das Gleichheitszeichen gilt[12]. Die genannte Konstante kann aber auch nicht

[12] Vgl. l. c. [2], Nr. **45**, **46**; s. auch diese Sitz.-Ber., l. c. [1].

durch eine von n abhängige Zahl, die für irgend ein n größer als $1 + \frac{1}{\left[\frac{m}{2}\right]}$ ist, ersetzt werden. Wählt man nämlich, wenn $n+1 > 2$ ist, für jede der Partitionen $\mathfrak{A}'', \ldots, \mathfrak{A}^{(n)}$ diejenige, die eine einzige positive Zahl ($= m$) enthält:

$$\mathfrak{A}'' = \ldots = \mathfrak{A}^{(n)} = (m), \tag{17}$$

dann erhält man[13]

$$\begin{aligned} N \;\; &= N(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \mathfrak{A}'' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)}) \;\; = N(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}'), \\ N^* &= N(\mathfrak{A}^* \mid \mathfrak{A}' \mid \mathfrak{A}'' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)}) = N(\mathfrak{A}^* \mid \mathfrak{A}'); \end{aligned}$$

werden also $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}^*$ so gewählt, daß für die zugehörigen zweidimensionalen Probleme in (2) das Gleichheitszeichen gilt, so gilt dasselbe für die durch die Partitionen (17) erweiterten $(n+1)$-dimensionalen Probleme.

§ 4. Spezialfälle.

13. Es möge zunächst Satz 1 an einem dreidimensionalen Beispiel illustriert werden. Sei $n = 2$, ferner $m = 15$. Wir wählen für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^*$ die in Nr. **4** erwähnten Partitionen $\mathfrak{A} = (5^2, 2, 1^3)$, $\mathfrak{A}^* = (5, 4, 2, 1^4)$, für die ja $\mathfrak{A} > \mathfrak{A}^*$ gilt (vgl. Nr. **5**), und setzen $\mathfrak{A}' = (10, 5)$, $\mathfrak{A}'' = (9, 4, 2)$. Man überzeugt sich leicht davon, daß in diesem Falle die in Satz 1 vorausgesetzte Ungleichung $N(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \mathfrak{A}'') > 0$ erfüllt ist. Man findet nämlich

$$N = N(5^2, 2, 1^3 \mid 10, 5 \mid 9, 4, 2) = 1 \tag{18}$$

u. zw. am einfachsten, indem man direkt die Lösungen von $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(5^2, 2, 1^3 \mid 10, 5 \mid 9, 4, 2)$ aufsucht und feststellt[14], daß nur

[13] Vgl. l. c. [3], Nr. **12**, Formel (8).

[14] Die betreffenden Überlegungen sind denen ähnlich, die in der Note „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren I. Rekursionsformeln“ (diese Sitz.ber., 1940, S. 40 ff.) in Nr. **16** zur Aufstellung der Gleichung $N(7, 4, 2 \mid 7, 4, 2 \mid 7, 4, 2) = 2$ führten:

Für unser Problem $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \mathfrak{A}'')$ mit $a_1 = a_2 = 5$, $a_3 = 2$, $a_4 = a_5 = a_6 = 1$, $a_1' = 10$, $a_2' = 5$, $a_1'' = 9$, $a_2'' = 4$, $a_3'' = 2$ wird eine Lösung $\mathfrak{L}$ durch 15 Gitterpunkte dargestellt, die jedenfalls zur Menge $\mathfrak{M}$ der 36 Gitterpunkte mit $1 \leqq x \leqq 6$, $1 \leqq y \leqq 2$, $1 \leqq z \leqq 3$ gehören müssen. Die Punkte eine einzige vorhanden ist. Nach Satz 1 ergibt sich daraus für

$$N^* = N(5, 4, 2, 1^4 \mid 10, 5 \mid 9, 4, 2)$$

die Ungleichung $N^* > 1$; auch, wenn wir (2) heranziehen und $\left[\frac{m}{2}\right] = 7$ einsetzen, was $N^* \geqq \frac{8}{7} N = \frac{8}{7} > 1$ liefert, kommen wir auf kein weitergehendes Resultat.

Nun ist aber in unserem Falle der Übergang von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}^*$ kein elementarer Abbau und nach einem in Nr. **6** erwähnten Satz läßt sich also (u. zw., wie sich zeigen wird, sogar auf verschiedene Weise) dieser Übergang durch eine endliche Anzahl von elementaren Abbauten herstellen. Nehmen wir nämlich die

---

von $\mathfrak{M}$ verteilen wir auf verschiedene Kategorien $A, B, \ldots, H$, die wie folgt gekennzeichnet sind:

$A\,(x = 1,\ 1 \leqq y \leqq 2,\ z = 3)$, $B\,(x = 2,\ 1 \leqq y \leqq 2,\ z = 3)$,
$C\,(1 \leqq x \leqq 2,\ 1 \leqq y \leqq 2,\ z = 2)$, $D\,(1 \leqq x \leqq 2,\ 1 \leqq y \leqq 2,\ z = 1)$,
$E\,(x = 3,\ 1 \leqq y \leqq 2,\ z = 1)$, $F\,(4 \leqq x \leqq 6,\ 1 \leqq y \leqq 2,\ z = 1)$,
$G\,(3 \leqq x \leqq 6,\ 1 \leqq y \leqq 2,\ z = 3)$, $H\,(3 \leqq x \leqq 6,\ 1 \leqq y \leqq 2,\ z = 2)$.

Gemäß $a_3'' = 2$ liegen in $z = 3$ genau 2 Punkte von $\mathfrak{L}$, sodaß von den 4 Punkten der beiden Kategorien A, B höchstens 2 zu $\mathfrak{L}$ gehören können. Nun enthält $\mathfrak{M}$ genau 6 Punkte in $x = 1$, von denen wegen $a_1 = 5$ genau einer nicht zu $\mathfrak{L}$ gehört; es kann also von den beiden Punkten A höchstens einer in $\mathfrak{L}$ fehlen, sodaß mindestens einer zu $\mathfrak{L}$ gehört. Ebenso schließt man für $x = 2$ aus $a_2 = 5$, daß mindestens ein Punkt B zu $\mathfrak{L}$ gehört. Zusammen mit dem vorhin Gesagten folgt: Genau 1 Punkt A und genau 1 Punkt B gehören zu $\mathfrak{L}$, während alle anderen Punkte aus $z = 3$, insbesondere also alle Punkte G in $\mathfrak{L}$ fehlen. Hingegen müssen wegen $a_1 = 5$ und $a_2 = 5$ alle Punkte C und D zu $\mathfrak{L}$ gehören. Wegen $a_2'' = 4$ kann dann in $z = 2$ außer den 4 Punkten C kein Punkt zu $\mathfrak{L}$ gehören: kein Punkt H gehört zu $\mathfrak{L}$. Außer Punkten G, H liegen nun in $x = 3$ nur die Punkte E, in $4 \leqq x \leqq 6$ nur die Punkte F; daher müssen (wegen $a_3 = 2$) die beiden Punkte E zu $\mathfrak{L}$ gehören und (wegen $a_4 = a_5 = a_6 = 1$) 3 von den Punkten F. Nunmehr sind in $y = 2$ bereits 5 notwendig zu $\mathfrak{L}$ gehörende Punkte festgestellt (zwei C, zwei D, ein E), sodaß wegen $a_2' = 5$ keine weiteren Punkte aus $y = 2$ zu $\mathfrak{L}$ gehören können. Demgemäß müssen von den Punkten A, B, F jene mit $y = 2$ in $\mathfrak{L}$ fehlen, also jene mit $y = 1$ zu $\mathfrak{L}$ gehören: $\mathfrak{L}$ enthält außer allen Punkten C, D, E die zu A und B gehörenden Punkte $(1, 1, 3)$, $(2, 1, 3)$ und die drei zu F gehörenden Punkte $4 \leqq x \leqq 6$, $y = 1$, $z = 1$. Somit ist $\mathfrak{L}$ eindeutig bestimmt, womit (18) bewiesen ist.

Natürlich ließe sich (18) auch — freilich weniger einfach — mittels der l. c. [3], Nr. **13**, unter (11) angegebenen Rekursionsformel berechnen.

Partition $\mathfrak{A}^{**} = (5^2, 1^5) = (5, 5, 1, 1, 1, 1, 1)$, so gilt $\mathfrak{A} > \mathfrak{A}^{**} > \mathfrak{A}^*$ (es liegt jedesmal ein elementarer Abbau in dem l. c.[8] erklärten Sinne vor), woraus, wenn $N^{**} = N(\mathfrak{A}^{**} \mid \mathfrak{A}' \mid \mathfrak{A}'')$ gesetzt wird, zunächst $N^{**} \geqq \frac{8}{7} N$, also $N^{**} \geqq 2$ und daraus $N^* \geqq \frac{8}{7} N^{**} \geqq \frac{16}{7}$ also $N^* \geqq 3$ folgt.

Man kann aber auch die Partitionen $\mathfrak{A}_1^* = (5, 4, 3, 1^3)$, $\mathfrak{A}_2^* = (5, 4, 2^2, 1^2)$ benützen, für die $\mathfrak{A} > \mathfrak{A}_1^* > \mathfrak{A}_2^* > \mathfrak{A}^*$ gilt (wieder jedesmal ein elementarer Abbau!), was für die entsprechend definierten Zahlen N_1^*, N_2^* auf $N_1^* \geqq 2$, $N_2^* \geqq 3$ und schließlich auf $N^* \geqq \frac{8}{7} N_2^* \geqq \frac{24}{7}$, also auf

$$N^* \geqq 4$$

führt. Der tatsächliche Wert von N^*, der mittels der am Schluß von Anm. 14 erwähnten Rekursionsformel berechnet werden kann, ist übrigens $N^* = 94$, während $N^{**} = 7$, $N_1^* = 9$, $N_2^* = 21$ ist (die Ungleichungen $N^* \geqq \frac{8}{7} N^{**}$, $N_2^* \geqq \frac{8}{7} N_1^*$, $N^* \geqq \frac{8}{7} N_2^*$ sind ersichtlich erfüllt).

14. Eine einfache Folgerung aus Formel (1) in Satz 1 erhält man, wenn man beachtet, daß für jede von $\mathfrak{A}^* = (1, 1, \ldots, 1) = (1^m)$ verschiedene Partition $\mathfrak{A}$, der Zahl m die Ungleichung $\mathfrak{A} > (1^m)$ gilt[15]. Sei nun $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots, \mathfrak{A}^{(n)}$ ein System von $n + 1$ Partitionen von m, die nicht alle gleich (1^m) seien. Wir wollen zunächst den Fall betrachten, es sei

$$N = N(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)}) > 0.$$

Die Anzahl der Partitionen $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ $(0 \leqq \nu \leqq n)$, die $= (1^m)$ sind, sei $n - k$ $(0 \leqq k \leqq n)$; dabei können wir annehmen (da es ja auf die Reihenfolge der $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ nicht ankommt; vgl. l. c.[3] Nr. **7**), es sei

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^{(\nu)} &> (1^m) \quad \text{für } 0 \leqq \nu \leqq k, \\ \mathfrak{A}^{(\nu)} &= (1^m) \quad \text{für } k < \nu \leqq n. \end{aligned}$$

Aus Satz 1 folgt dann

$$\begin{aligned} N = N(\mathfrak{A} \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(k)} \mid 1^m \mid \ldots \mid 1^m) < \\ < N(\mathfrak{A} \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(k-1)} \mid 1^m \mid 1^m \mid \ldots \mid 1^m) \end{aligned}$$

[15] Vgl. l. c.[2], Nr. **35**, S. 21.

und durch fortgesetzte Anwendung der gleichen Überlegung schließlich $N < N(1^m \mid 1^m \mid \ldots \mid 1^m)$. Diese letztere Ungleichung gilt auch für den Fall $N = 0$, da, wie schon bei früherer Gelegenheit festgestellt[16], $N(1^m \mid 1^m \mid \ldots \mid 1^m)$ einen positiven Wert hat, nämlich $(m!)^n$. Es gilt also der bereits l. c.[16], Anm. 23, erwähnte

Satz 3. Für jedes System von $n+1$ Partitionen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots, \mathfrak{A}^{(n)}$ derselben Zahl m genügt die Lösungsanzahl $N(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$ der Ungleichung

$$N(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)}) \leqq (m!)^n; \tag{19}$$

dabei gilt das Gleichheitszeichen in (19) nur, wenn alle Partitionen $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' = \ldots = \mathfrak{A}^{(n)} = (1^m)$ sind.

---

[16] Vgl. l. c. [3], Nr. **27**, Formel (43).