Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1940. Heft II/III

Sitzungen Juli-Dezember

München 1940
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Die gemeinsame Koppelung dreier Luftaufnahmen desselben Geländes

Von Sebastian Finsterwalder in München

Vorgetragen am 14. Dezember 1940

Koppelung ohne Sonnenortung

Zur rechnerischen Durchführung einer solchen Koppelung habe ich bereits vor drei Jahren[1] Gleichungen entwickelt, deren Tragweite nunmehr untersucht werden soll. Dabei werden sich für die Anwendung wesentliche Einschränkungen ergeben. In geometrischer Einkleidung lautet die Aufgabe folgendermaßen: Man hat drei Bündel von Zielstrahlen, die den mit innerer Ortung versehenen Aufnahmen eines Geländes entnommen und dadurch Strahl für Strahl einander zugeordnet sind. Diese drei Bündel sind so zueinander zu legen, daß je drei entsprechende Zielstrahlen sich in einem Zielpunkt schneiden. In dieser Lage bilden dann die Schnittpunkte ein ähnliches Modell der betreffenden Punkte des aufgenommenen Geländes und die Bündelmittelpunkte geben die Lage der Aufnahmestandpunkte im Geländemodell. Der Maßstab des Modells bleibt unbestimmt. Dabei ist vorausgesetzt, daß die drei zu koppelnden Bündel den Aufnahmen eines wirklichen Geländes entstammen. Es können also nur einige der Zielstrahlen in den zu koppelnden Bündeln willkürlich angenommen werden, die übrigen sind an diese gebunden. Während z. B. bei der Koppelung von zwei Aufnahmen innerhalb gewisser Grenzen noch fünf Strahlen jedes der beiden Zielstrahlenbüschel willkürlich gewählt werden können, ist das bei der Koppelung von drei Aufnahmen nur mehr für vier Strahlen in zwei von den Aufnahmebündeln und von dreien im dritten der Fall. Ein vierter Strahl im dritten Aufnahmebündel ist bereits an die schon gewählten gebunden.

---

[1] S. Finsterwalder: Die gemeinsame Ortung einer Mehrzahl von Aufnahmen des gleichen Geländes. Bildmessung und Luftbildwesen, Heft 4, 1937.

Die Schwierigkeit der Koppelungsaufgabe beruht zunächst in der großen Zahl von unbekannten Bestimmungsstücken, die in ihre Lösung eingehen. Sie beläuft sich auf elf, wie man aus folgender Überlegung erkennt. Die Form des Dreiecks der drei Aufnahmestandpunkte ist durch zwei Stücke, z. B. durch zwei Winkel bestimmt. Die Stellung jedes Zielstrahlenbündels gegenüber jenem Dreieck ist durch drei Stücke gegeben, etwa durch Angabe einer Drehachse (2 Stücke) und des Drehwinkels, die zusammen die Drehung bestimmen, durch welche das Bündel aus einer beliebigen Lage in die endgültige gebracht wird. So ergeben sich die $2 + 3 \times 3 = 11$ Bestimmungsstücke. Bei ihrer Zahl ist es schon eine große Erleichterung, wenn sie durch Einführung des Begriffes der Stellortung auf sechs herabgesetzt werden kann. Zu diesem Behufe denken wir uns das Geländemodell unter Beibehaltung seiner Stellung im Raum auf den Maßstab Null gebracht, wobei alle Ziel- und Standpunkte in einen einzigen Punkt zusammenschrumpfen, während alle Ziel- und sonstigen Richtungen parallel bleiben. Um den gemeinsamen Schrumpfungspunkt als Mittelpunkt schlagen wir eine Kugel vom Halbmesser Eins, mit der wir alle Zielstrahlen zum Schnitt bringen. Ersetzen wir nun den drei Zielstrahlenbündeln entsprechend diese gemeinsame Bildkugel durch drei ineinander verschiebbare, von denen jede die Bilder eines Zielstrahlenbündels enthält, so ist die ursprünglich räumliche Koppelungsaufgabe auf eine solche der Kugelgeometrie zurückzuführen, die nur mehr die $2 \times 3 = 6$ Bestimmungsstücke enthält, welche die Stellung zweier der ineinander verschiebbaren Bildkugeln gegenüber der dritten festgehaltenen bestimmen. Diese sechs Bestimmungsstücke müssen nun ebenso vielen voneinander unabhängigen Bedingungsgleichungen genügen, aus denen sie dann gerechnet werden können.

Zur Aufstellung dieser Bedingungsgleichungen bedienen wir uns nun des folgenden Kunstgriffes. Während man bisher das Gelände als einen Haufen von Zielpunkten aufzufassen pflegte, dem ein Bündel von Zielstrahlen durch jeden Standpunkt entsprach, betrachten wir jetzt Paare von solchen Zielpunkten und die sie verbindenden Geraden, denen dann Zielebenen durch die Bündelmittelpunkte entsprechen. Bei der Aufnahme des Geländes von den drei Standpunkten aus schneiden sich dann die zu einer Geländegeraden gehörigen Zielebenen in eben dieser Geländegeraden. Diese Eigenschaft der Zielebenen geht auch auf das Geländemodell über und bleibt bei dessen Schrumpfung auf Null erhalten. Auf der Bildkugel werden die Geländegeraden durch Großkreise abgebildet; jeder Einzelaufnahme entspricht dort ein Netz von Großkreisen auf der zu ihr gehörigen Bildkugel. Bei der Stellortung werden nun zwei von den drei ineinander verschiebbaren Bildkugeln so gegen die dritte gedreht, daß sich die drei Großkreise, die von derselben Geländegeraden herrühren, jeweils in zwei gegenüberliegenden Kugelpunkten schneiden. Aus dieser Forderung folgt alsdann eine Gleichung für die sechs Bestimmungsstücke der Stellortung. Umgekehrt, wenn diese Bedingung auf der Kugel erfüllt ist, folgt noch nicht, daß die drei Zielebenen im Geländemodell sich in einer Geraden schneiden, sondern nur, daß ihre drei Schnittlinien unter sich parallel sind. In jedem Fall gibt jedoch die Richtung zum gemeinsamen Schnittpunkt der drei Großkreise auf der Bildkugel die Richtung der Geländegeraden im Modell.

Die Gleichungen, deren Erfüllung für die Unbekannten der Stellortung nötig wird, sind so verwickelt, daß sich ihre Aufstellung unter allgemeinen Bedingungen nicht lohnt. Man setzt daher voraus, daß bereits eine genäherte Lösung der Koppelungsaufgabe vorliegt und nur die kleinen Veränderungen aufzusuchen sind, die die genäherte Lösung in eine genaue überführen. Die Möglichkeit zu einer genäherten Ortung auf optisch-mechanischem Wege bietet der „Aeromultiplex" von Zeiß in Jena, der aus einer Reihe beweglicher Bildwerfer besteht, in denen die Zielstrahlenbündel aus den Aufnahmebildern wiederhergestellt werden. Als Ausgangswerte für die rechnerische Verfeinerung der auf diesem Wege gefundenen Näherungslösung gelten dann die Richtungskosinus der Zielstrahlen, die für alle drei Bündel auf das gleiche Koordinatensystem zu beziehen sind. Eines von den drei Zielstrahlenbündeln wird festgehalten, die beiden andern werden um kleine durch die Drehpfeile $d\mathfrak{u}$ und $d\mathfrak{v}$ ausgedrückte Beträge gedreht. Bei der weiteren Rechnung werden die Quadrate und höheren Potenzen dieser Drehpfeile vernachlässigt, so daß die Bedingungsgleichungen der Stellortung schließlich in linearer Form erscheinen. Zu ihrer Ableitung bedienen wir uns der Pfeilrechnung. Wir bezeichnen die von den 3 Standpunkten O' O und O'' nach den Geländepunkten a und b ausgehenden Einheitszielpfeile mit $\mathfrak{a}'$ $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{a}''$ und $\mathfrak{b}'$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{b}''$, deren Anteile in den drei Koordinatenrichtungen die oben erwähnten Richtungskosinus der genähert georteten Zielstrahlen sind. Die Zielebenen durch je zwei dieser Einheitszielpfeile werden durch die Pfeilprodukte $\mathfrak{E}' = \mathfrak{a}' \times \mathfrak{b}'$, $\mathfrak{E} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{E}'' = \mathfrak{a}'' \times \mathfrak{b}''$ gekennzeichnet, die auf den Zielebenen senkrecht stehen. Wäre die Stellortung vollkommen, so müßte das dreifache Produkt $(\mathfrak{E}'\ \mathfrak{E}\ \mathfrak{E}'') = 0$ sein, da beim Schnitt der drei Zielebenen in einer Geraden ab, die auf ihnen senkrechten Pfeile $\mathfrak{E}'$ $\mathfrak{E}$ $\mathfrak{E}''$ einer Ebene senkrecht zu ab parallel sein müssen, was eben durch das Verschwinden des dreifachen Produktes ausgedrückt wird. Bei der genäherten Stellortung wird jenes Produkt einen kleinen Wert annehmen. Dadurch, daß wir nun das erste Zielstrahlenbündel um $d\mathfrak{u}$ und das dritte um $d\mathfrak{v}$ drehen, können wir das Verschwinden des dreifachen Produkts erreichen. Bei dieser Drehung geht $\mathfrak{E}'$ in $\mathfrak{E}' + d\mathfrak{u} \times \mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ in $\mathfrak{E}'' + d\mathfrak{v} \times \mathfrak{E}''$ über; $\mathfrak{E}$ bleibe ungeändert. Die Bedingung dafür, daß die drei Pfeile nach der Drehung einer Ebene parallel seien, wird durch die Gleichung:

$$(\mathfrak{E}' + d\mathfrak{u} \times \mathfrak{E}',\ \mathfrak{E},\ \mathfrak{E}'' + d\mathfrak{v} \times \mathfrak{E}'') = 0 \text{ ausgedrückt.}$$

Entwickelt man das Produkt nach Potenzen von du und dv, so erhält man mit den angegebenen Vernachlässigungen:

$$(\mathfrak{E}', \mathfrak{E}, \mathfrak{E}'') + (d\mathfrak{u} \times \mathfrak{E}', \mathfrak{E}, \mathfrak{E}'') + (\mathfrak{E}', \mathfrak{E}, d\mathfrak{v} \times \mathfrak{E}'') = 0$$
$$(\mathfrak{E}', \mathfrak{E}, \mathfrak{E}'') + (d\mathfrak{u} \times \mathfrak{E}') \times \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{E}'' + (d\mathfrak{v} \times \mathfrak{E}'') \times \mathfrak{E}' \cdot \mathfrak{E} = 0$$
$$(\mathfrak{E}', \mathfrak{E}\ \mathfrak{E}'') + (d\mathfrak{u} \times \mathfrak{E}') \cdot (\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}'') + (d\mathfrak{v} \times \mathfrak{E}'') \cdot (\mathfrak{E}' \times \mathfrak{E}) = 0$$

und schließlich:

$$(\mathfrak{E}', \mathfrak{E}, \mathfrak{E}'') + d\mathfrak{u} \cdot (\mathfrak{E}' \times (\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}'')) + d\mathfrak{v} \cdot (\mathfrak{E}'' \times (\mathfrak{E}' \times \mathfrak{E})) = 0.$$

Das ist eine lineare Gleichung in den 2 Drehpfeilen $d\mathfrak{u}$ und $d\mathfrak{v}$ oder in den sechs Anteilen du_1 du_2 du_3 dv_1 dv_2 dv_3 dieser Drehpfeile nach den Koordinatenrichtungen.

Wird diese Gleichung für sechs verschiedene Verbindungsgerade zweier Geländepunkte aufgestellt, so hat man die nötige Zahl von Gleichungen für die oben genannten sechs Anteile.

Weitere Gleichungen dieser Art, die aus neuen Geländegeraden hergeleitet werden, sind dann notwendig abhängig von diesen sechs Gleichungen, und zwar infolge der Beziehungen, die zwischen den drei Zielstrahlenbündeln ein und desselben Geländepunkthaufens bestehen. Es ist dabei gleichgültig, ob die sechs zur Ableitung der Gleichungen verwendeten Geraden als Verbindungslinien von 12 oder weniger Geländepunkten auftreten. Die Mindestzahl der eingehenden Geländepunkte ist vier; es bilden dann die sechs Geraden die Kanten eines Vierflachs, dessen Ecken jene vier Punkte sind. Nimmt man das Ergebnis des Überganges von der Stellortung zur Wiederherstellung des Geländemodells vorweg, so ergibt sich der bemerkenswerte Satz:

Aus drei Bildern mit innerer Ortung eines räumlichen Vierflachs ist die Gestalt dieses Vierflachs sowie die Lage der drei Aufnahmepunkte ihm gegenüber bestimmt.

Ich habe mich durch Ausrechnung eines typischen Beispiels[1] von der Durchführbarkeit der Wiederherstellung des Vierflachs aus seinen drei Bildern überzeugt, um dem Einwand zu begegnen, daß schon eine Abhängigkeit zwischen den aus seinen sechs Kanten hervorgegangenen Gleichungen bestünde. Eine Besonderheit tritt aber dann ein, wenn die drei Standpunkte auf einer Geraden liegen, wie es bei Aufnahmen, die dem gleichen Bildflug entstammen, vielfach der Fall ist. Dann gibt es Ausnahmegerade, aus denen sich keine für die Berechnung der Drehpfeile $d\mathfrak{u}$ und $d\mathfrak{v}$ brauchbare Gleichung ableiten läßt. Es sind das jene Geraden, welche die Verbindungslinie der drei Flugstandpunkte schneiden. Für solche Gerade fallen unabhängig von den kleinen Drehungen der Zielstrahlenbündel die drei Zielebenen in eine zusammen, was sich im Verschwinden der Beiwerte von $d\mathfrak{u}$ und $d\mathfrak{v}$ ausdrückt. In diesem Falle wird man bei Ableitung der Gleichungen Gerade, die die Fluglinie schneiden oder ihr parallel sind, vermeiden. Sorgfältige Beachtung verdient schließlich der Sonderfall, bei dem das aufzunehmende Gelände eben oder fast eben ist. Wenn dies eintritt, sind die Zielstrahlenbündel projektiv auf-

[1] In diesem Beispiel waren weder die drei Standpunkte in einer Flucht noch die vier Geländepunkte in einer Ebene.

einander bezogen, was zur Folge hat, daß die Koppelung von zweien von ihnen schon aus vier Paaren zusammengehöriger Strahlen möglich ist[1] und entsprechende Zielebenen dieser beiden sich dann auf der Ebene des Geländemodelles schneiden. Kommt das dritte zu koppelnde Zielstrahlenbündel hinzu, so schneiden sich je drei Zielebenen auf jener Ebene des Geländemodelles. Ist die Bedingung hierfür für vier Geländegerade erfüllt, so schneiden sich bereits alle zusammengehörigen Zielebenen in Geraden der Geländebene und die weiter abgeleiteten Bedingungen sind von selbst erfüllt, d. h. deren Gleichungen von den ersten vier abhängig. Bei dem Versuch der Auflösung von sechs Bedingungsgleichungen stellt sich dann heraus, daß nach Ausscheidung einiger der Unbekannten die Gleichungen für die übrigen verschwindende Beiwerte bekommen und diese nicht bestimmbar sind. Dieser Übelstand stellt sich schon bei einem fast ebenen Gelände heraus und verhindert die Lösung der Koppelungsaufgabe auf diesem Wege[2] auch dann, wenn man versucht, ihm dadurch zu begegnen, daß man bei einem fast ebenen Gelände eine Vielzahl von Bedingungsgleichungen aufstellt und aus ihnen nach der Methode der kleinsten Quadrate Lösungen ableitet, die sie im Durchschnitt möglichst genau erfüllen. Die dabei auftretenden 6 Normalgleichungen für die Anteile der zwei Drehpfeile ließen sich ebensowenig auflösen wie 6 einzelne Gleichungen. Ich habe ein Beispiel gerechnet, dem ein Gelände von 36 Quadratkilometern Fläche mit Höhenunterschieden bis zu 200 m zugrunde lag. Es war aus 3500 m Höhe mit drei weitwinkligen Aufnahmen abgebildet, deren Standpunkte drei Kilometer Abstand hatten und in einer Flucht lagen. Die Koppelungsbedingungen für je zwei der Aufnahmen waren demnach recht günstig. Trotzdem versagte der Versuch einer gemeinsamen Koppelung der drei Aufnahmen nach dem entwickelten Verfahren. Nachdem die drei Zielstrahlenbündel auf 12 randlich ge-

---

[1] G. Labussière: Possibilité de restitution à l'échelle près d'un corps même plan ou presque plan, dont on connait deux projections centrales et leurs orientations internes. in v. Langendorff: Vorträge bei der 2. intern. Ges. für Photogrammetrie, Berlin 1927, Eisenschmidt-Verlag. S. 170.

[2] Diese Bemerkung gilt innerhalb der Genauigkeit fünfstelliger Rechnung, jedoch ändert auch die Hinzunahme von 1–2 Stellen nichts Wesentliches.

legene Geländepunkte[1] gerechnet waren, wurden dem ersten und dritten kleine Drehungen mit Anteilen bis zu 0,003 erteilt und für die so abgeänderten Bündel Bedingungsgleichungen angesetzt, deren Richtigkeit durch Einsetzen der im vornhinein bekannten Lösungen geprüft werden konnte. Dabei wurden 15 im Gelände kreuz und quer liegende Gerade gewählt, von denen keine die Flucht der Flugstandpunkte schnitt. Obwohl die erhaltenen Bedingungsgleichungen durch die bekannten Lösungen bis auf eine halbe Einheit der 5. Dezimale erfüllt waren, ließen sich unter den fünfzehn Gleichungen auf keinerlei Weise sechs auswählen, aus denen sich die Drehanteile hätten ermitteln lassen, und auch der Versuch erst 8, dann 12 und schließlich alle 15 Bedingungsgleichungen nach der Methode der kleinsten Qudrate zusammenzufassen, um zu einer Lösung zu gelangen, schlug fehl. Ja, wenn man sogar die richtige Lösung einzelner der 6 Unbekannten einsetzte, ließen sich die übrigen Unbekannten aus den Gleichungen nicht ermitteln; das gelang erst in befriedigender Weise nach Einsetzung der richtigen Lösung von drei Unbekannten, worauf die übrigen drei recht genau herauskamen.

Der vorhin erwähnte Umstand läßt folgende Anwendung zu. Sind die Aufnahmen eines Fluges so dicht, daß das Gelände überall dreifach überdeckt ist, so kann man auf folgende Weise die Aufnahmen nacheinander orten. Man koppelt die erste und zweite Aufnahme nach den früher entwickelten Formeln[2] für zwei Aufnahmen und erhält hieraus den Drehpfeil der zweiten Aufnahme gegen die erste. Nun setzt man nach der vorhin entwickelten Art drei Bedingungsgleichungen für die erste, zweite und dritte Aufnahme an und setzt in sie den erhaltenen Drehpfeil ein. Dann rechnet man aus den drei Bedingungsgleichungen den neuen Drehpfeil der dritten gegenüber der zweiten Aufnahme

[1] Vier von ihnen *a b c d* bildeten annähernd die Ecken eines Quadrats von 9 km Seitenlänge, dessen Seiten parallel bzw. senkrecht zur Flugrichtung standen, vier weitere lagen annähernd in den Mitten der Quadratseiten, der Rest auf den zur Flugrichtung parallelen Quadratseiten.

[2] S. Finsterwalder: Die rechnerische Durchführung der Ortung insbesondere bei sonnengeorteten Luftaufnahmen. Sitzungsber. der Bayer. Akademie der Wiss. 1939 S. 79.

und bildet drei Bedingungsgleichungen für die zweite, dritte und vierte Aufnahme. In diese wird der neue Drehpfeil eingesetzt und aus ihnen dann jener der vierten gegen die dritte gerechnet. So kann man fortfahren.

Es wird sich dabei sicher herausstellen, auf wie schwachen Füßen die aneinander gekoppelten Aufnahmen stehen, auch wenn sie zu dritt vereinigt sind. Eine einigermaßen sichere Ortung verlangt die Anknüpfung der Luftaufnahmen an festliegende Richtungen oder Punkte. Das wirksamste Mittel hierfür ist die Sonnenortung,[1] oder allenfalls die Ortung nach der Lotrichtung mittels Horizontaufnahmen.

Koppelung mit Sonnenortung

Verbindet man mit der Bildkammer, die von oben nach unten aufnimmt, eine zweite, die gleichzeitig von unten nach oben und damit den Stand der Sonne aufnimmt und sorgt man dafür, daß der Zeitpunkt der Aufnahme etwa durch Mitabbildung einer Uhr aufgezeichnet wird, so hat man ein Mittel an der Hand, das Zielstrahlenbündel einer Aufnahme durch die Richtung nach dem jeweiligen Sonnenstand zu bereichern und damit die Koppelung dreier Aufnahmen so zu versteifen, daß sie nicht nur zu einer gegenseitigen Stellortung der Aufnahmen, sondern zu einer vollständigen Stellortung gegenüber dem Fixsternhimmel führt. Dabei fallen die rechnerischen Schwierigkeiten fort, welche bei Bestimmung der sechs Unbekannten im Falle eines fast ebenen Geländes auftraten, wenn man die Bedingungsgleichungen aus dem Schneiden zusammengehöriger Zielebenen von Geländegeraden ableitete.

Bei der Entwickelung der für diesen Fall geltenden Formeln wird wieder vorausgesetzt, daß eine genäherte Koppelung bereits vorliegt und die um die Sonnenrichtung erweiterten drei Zielstrahlenbündel durch Einheitspfeile in einem gemeinsamen Koordinatensystem gegeben sind. Auf dieses seien auch die für die Aufnahmezeiten geltenden Sonnenrichtungen, die als astrono-

[1] S. Finsterwalder: Die praktische Verwertung von astronomisch georteten Luftaufnahmen. Bildmessung und Luftbildwesen 1938 Heft. 3.

mische bezeichnet werden, bezogen. Diese sind von den aus den Aufnahmebildern ermittelten geodätischen etwas verschieden, da ja die vorläufige Koppelung nur annähernd richtig ist. Die endgültige Richtigstellung der Zielstrahlenbündel und damit die Stellortung erfolgt nun in zwei Schritten. Zuerst wird jedes Bündel so verändert, daß die mit ihm verbundene geodätische Sonnenrichtung mit der astronomischen zusammenfällt. Dann werden die drei Bündel um ihre Sonnenrichtungen so gedreht, daß die Koppelungsbedingung erfüllt ist. Diese wird wie vorhin aus dem Schnitt der zu einer Geländegeraden gehörigen drei Zielebenen abgeleitet. Die Geländegerade gehe durch die Punkte a und b des Geländes. Die Einheitspfeile der Zielstrahlen nach diesen Punkten werden mit $\mathfrak{a}'\ \mathfrak{a}\ \mathfrak{a}''\ \mathfrak{b}'\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{b}''$ bezeichnet, die astronomischen Sonnenrichtungen mit $\mathfrak{s}_a'\ \mathfrak{s}_a\ \mathfrak{s}_a''$, die geodätischen mit $\mathfrak{s}_g'\ \mathfrak{s}_g\ \mathfrak{s}_g''$, ihre Unterschiede $\mathfrak{s}_g' - \mathfrak{s}_a'$ mit $\Delta\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}_g - \mathfrak{s}_a = \Delta\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}_g'' - \mathfrak{s}_a'' = \Delta\mathfrak{s}''$. Die Pfeile, die senkrecht auf den drei Zielebenen stehen, sind $\mathfrak{E}' = \mathfrak{a}'\times\mathfrak{b}'$ $\mathfrak{E} = \mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{E}'' = \mathfrak{a}''\times\mathfrak{b}''$. Zur Ausführung des ersten Schrittes bedienen wir uns beim ersten Zielstrahlenbündel des Drehpfeiles $\Delta\mathfrak{s}'\times\mathfrak{s}_a$, wobei $\Delta\mathfrak{s}' \perp \mathfrak{s}_a'$ und $\perp \mathfrak{s}_g'$ ist. Er führt $\mathfrak{s}_g'$ in $\mathfrak{s}_g' + (\Delta\mathfrak{s}'\times\mathfrak{s}_a')\times\mathfrak{s}_g' = \mathfrak{s}_g' - (\mathfrak{s}_a'\cdot\mathfrak{s}_g')\,\Delta\mathfrak{s}' + (\Delta\mathfrak{s}'\cdot\mathfrak{s}_g')\,\mathfrak{s}_a'$ über. Da $\mathfrak{s}_a'\cdot\mathfrak{s}_g'$ bis auf kleine Größen höherer Ordnung gleich Eins und $\Delta\mathfrak{s}'\cdot\mathfrak{s}_g' = 0$ ist, dreht der Pfeil $\mathfrak{s}_g'$ nach $\mathfrak{s}_a'$ und $\mathfrak{E}'$ geht dabei in $\mathfrak{E}' + (\Delta\mathfrak{s}'\times\mathfrak{s}_a')\times\mathfrak{E}' = \mathfrak{F}'$ über. Der zweite Schritt besteht in einer kleinen Drehung um die Sonnenrichtung $\mathfrak{s}_a'$, deren Drehpfeil $du'\,\mathfrak{s}_a'$ sein soll, wobei du' den unbekannten kleinen Drehwinkel bezeichnet. Diese Drehung führt $\mathfrak{F}'$ in $\mathfrak{F}' + du'\,\mathfrak{s}_a'\times\mathfrak{F}'$ über. Durch ähnliche Drehbewegungen ist ebenso $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F} + du\,\mathfrak{s}_a\times\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{E}''$ in $\mathfrak{F}'' + du''\,\mathfrak{s}_a''\times\mathfrak{F}''$ übergegangen. Die Koppelungsbedingung, die ausdrückt, daß sich die drei gedrehten Zielebenen nunmehr in einer Geraden schneiden, führt auf folgende Gleichung:

$$(\mathfrak{F}' + du'\,\mathfrak{s}_a'\times\mathfrak{F}',\ \mathfrak{F} + du\,\mathfrak{s}_a\times\mathfrak{F},\ \mathfrak{F}'' + du''\,\mathfrak{s}_a''\times\mathfrak{F}'') = 0.$$

Sie ist eine Gleichung für die drei unbekannten Drehwinkel du', du und du''. Wird sie unter Vernachlässigung der höheren Potenzen entwickelt, so geht sie in nachstehende lineare Gleichung in den Unbekannten über:

$$(\mathfrak{F}', \mathfrak{F}, \mathfrak{F}'') + du' \, (\mathfrak{s}_a' \times \mathfrak{F}', \mathfrak{F}, \mathfrak{F}'') + du \, (\mathfrak{F}', \mathfrak{s}_a \times \mathfrak{F}, \mathfrak{F}'') + \\ + du'' \, (\mathfrak{F}' \, \mathfrak{F} \, \mathfrak{s}_a'' \times \mathfrak{F}'') = 0.$$

Drei solcher Gleichungen, die aus verschiedenen Geländegeraden abgeleitet sind, reichen dann zur Berechnung der Drehwinkel hin, aus denen sich die Stellortung aufbaut. Da man schon aus drei Geländepunkten drei Geländegerade gewinnen kann, so folgt, daß die Zielrichtungen nach drei Geländepunkten zusammen mit den Sonnenrichtungen zur gemeinsamen Stellortung von drei Aufnahmen ausreichen. Da ohne Sonnenrichtungen die Zielrichtungen nach vier Geländepunkten hierzu nötig waren, ersetzen die Sonnenrichtungen einen Zielpunkt. Weit wichtiger ist, daß die Rechenschwierigkeiten, die früher im Falle eines fast ebenen Geländes auftraten, bei der Sonnenortung großenteils wegfallen. Wenn die Sonnenrichtungen in allen drei Aufnahmen fast die gleichen sind, wie das bei Aufnahmen desselben Fluges eintritt, sind die drei Bedingungsgleichungen nicht mehr auflösbar, wie sich bei strengem Zusammenfallen der Sonnenrichtungen geometrisch leicht einsehen läßt. Man betrachte die Kugelbilder der drei Aufnahmen. Ist der gemeinsame Schnitt der drei Großkreise, die als Bilder der Geländegeraden dort auftreten, erfüllt, so kann man diese Kugelbilder um das Kugelbild der gemeinsamen Sonnenrichtung beliebig drehen, ohne daß jener Schnitt zerstört wird. Es bleibt also die geometrische Bedingung der Stellortung bei dieser Drehung bestehen und die Lösungen der Bedingungsgleichungen sind bis auf eine Konstante unbestimmt. Man kann einen der drei unbekannten Drehwinkel, z. B. $du = 0$ setzen und aus den Gleichungen du' und du'' berechnen. Man erhält dann immer noch eine gegenseitige Stellortung der drei Aufnahmen.

Zur Beurteilung der Brauchbarkeit der entwickelten Formeln für die Stellortung ist der nötige Rechenaufwand von Bedeutung. Als Maß dafür sei die Anzahl der Rechengänge bei Aufstellung einer Stellortungsgleichung angesehen. Diese Anzahl beträgt bei der Koppelung von zwei Aufnahmen nach den früher aufgestellten Formeln 13 Kreuzprodukte und ein Punktprodukt für eine Gleichung, in die je drei Zielstrahlen jeder Aufnahme eingehen. Wählt man für jede weitere Gleichung drei neue Zielstrahlen, so hat man 39 Kreuzprodukte und 3 Punktprodukte für die 3 Gleichungen zu bilden. Man benützt dabei 9 Zielstrahlen jeder Aufnahme. Da aber schon 5 Zielstrahlen ausreichen, ist das Mindestmaß der Rechnung geringer und beträgt nur 31 Kreuzprodukte und 3 Pnuktprodukte für *eine* Koppelung, für die zwei nötigen also das doppelte. Bei der gemeinsamen Stellortung von *drei* Aufnahmen ist zur Aufstellung jeder der 6 Gleichungen die Berechnung von 8 Kreuzprodukten und einem Punktprodukt nötig; für alle sechs also von 48 Kreuz- und 6 Punktprodukten. Es ist also die gemeinsame Stellortung gegenüber der getrennten um 30, bzw. 14 Kreuzprodukte im Vorteil, der aber bei der Auflösung der Gleichungen dadurch verringert wird, daß bei der gemeinsamen Stellortung 6 Gleichungen mit 6 Unbekannten, bei der getrennten zweimal 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten zu bewältigen sind. Dazu kommt der schon erwähnte Übelstand, daß bei fast ebenem Gelände die gemeinsame Stellortung an Rechenschwierigkeiten scheitert.

Nach der Stellortung ist noch der Übergang zur Standortung und die Berechnung der Koordinaten der Punkte des Geländes und der Flugstandpunkte zu leisten. Diese erfordert bei der gemeinsamen Koppelung die Bestimmung der Standlinienrichtungen. Man beginnt am besten mit der längsten Standlinie, die $O'\,O''$ sein möge. Zunächst werden alle Zielstrahlenbündel mittels der aus der Stellortung ermittelten Drehpfeile in die richtige Stellung gebracht. Ist $\mathfrak{K}$ ein Pfeil in der Richtung der Standlinie $O'\,O''$, so liegt er mit je zwei zusammengehörigen stellgeorteten Zielstrahlen $\bar{\mathfrak{a}}'$ und $\bar{\mathfrak{a}}''$ parallel zur gleichen Ebene, d. h. im Kugelbild liegen $\bar{\mathfrak{a}}'\ \bar{\mathfrak{a}}''$ und $\mathfrak{K}$ auf einem Großkreis, was durch Nullsetzen des dreifachen Produkts $(\mathfrak{K}\ \bar{\mathfrak{a}}'\ \bar{\mathfrak{a}}'') = 0$ ausgedrückt wird. Das ist eine lineare homogene Gleichung für die drei Anteile von $\mathfrak{K}$. Solcher Gleichungen können so viele aufgestellt werden als Zielstrahlenpaare vorhanden sind. Aus ihnen läßt sich, wenn die Zahl zwei übersteigt, durch Ausgleichung das Verhältnis der drei Anteile von $\mathfrak{K}$ ermitteln. Der Betrag $|\mathfrak{K}|$ bestimmt den Maßstab der Standortung. In diesem Maßstab können dann zuerst die Grundrisse der zugehörigen Geländepunkte und hierauf auch deren Höhen berechnet werden, wobei man solche Punkte ausschließt, die im Grundriß nahe der Flugrichtung liegen und deren Grundriß folglich schlecht bestimmt ist.[1] Aus dem Zielstrahlenbündel der dritten Aufnahme wird alsdann ihr Standpunkt *O* gegenüber den bereits bestimmten Geländepunkten rückwärts eingeschnitten, wobei aber dieses Zielstrahlenbündel nicht gedreht wird. Dabei ergibt sich Grundriß und Höhe des dritten Aufnahmepunktes *O*. Von den drei so gefundenen Aufnahmepunkten aus erfolgt nun die Berechnung der Geländepunktskoordinaten durch Vorwärtseinschnitt. Der endgültige Maßstab des Geländemodells wird durch Vergleich mit der bekannten Länge zwischen zwei Punkten bestimmt.

Rechenbeispiel zur gemeinsamen Ortung von drei Aufgaben

Es sollen nun die entwickelten Formeln und Regeln durch ein Rechenbeispiel erläutert werden. Wir berechnen die gemeinsame Sonnenortung von drei Weitwinkelaufnahmen, von denen die erste und dritte bei nahe gleichem Sonnenstand am Vormittag, die mittlere bei davon verschiedenem Sonnenstand am Nachmittag aufgenommen wurden. Die Zielstrahlenbündel sind bereits genähert gekoppelt und auf ein gemeinsames Koordinatensystem bezogen, dessen positive *Z*-Achse nach oben weist.

Die astronomischen Sonnenzielpfeile gelten für ein Koordinatensystem, das nach dem Zenit und den Himmelsrichtungen des Punktes mit den geographischen Koordinaten $\varphi = 50^0$ n. Br. und $\lambda = 20^0$ öst. v. Gr. geortet ist und sie entsprechen dem 1. Nov. 1939 sowie den Ortszeiten $8^h\ 51^m\ 30^s$, $15^h\ 0^m\ 0^s$ und $9^h\ 1^m\ 30^s$. Die erste und dritte Aufnahme sind also kurz hintereinander am Vormittag, die zweite am gleichen Tag nachmittags (etwa beim Rückflug) erfolgt. Außerdem ist die jeweilige Sonnenpfeilrichtung umgekehrt gedacht, um sie den Geländezielrichtungen anzunähern.

Die Rechnung beginnt mit der Bildung der Kreuzprodukte $\mathfrak{C}'$ $\mathfrak{C}$ $\mathfrak{C}''$ für eine Anzahl von Zielgeraden, die je zwei Geländepunkte *da*, *bc*, *ac*, *bd* und *ik* miteinander verbinden. Dann folgt die Bil-

[1] Für ihre Bestimmung muß der Aufriß parallel zur Flugrichtung zu Hilfe genommen werden.

dung der Kreuzprodukte $\Delta\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}_a'$, $\Delta\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}_a$ und $\Delta\,\mathfrak{s}'' \times \mathfrak{s}_a''$ aus den Einheitspfeilen für die Sonnenrichtungen (siehe letzte Zeile von Tafel I). Es folgen die Kreuzprodukte $(\Delta\,\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}_a') \times \mathfrak{E}'$, $(\Delta\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}_a) \times \mathfrak{E}$ und $(\Delta\mathfrak{s}'' \times \mathfrak{s}_a'') \times \mathfrak{E}''$, welche die $\mathfrak{E}'$ $\mathfrak{E}$ $\mathfrak{E}''$ in die $\mathfrak{F}'$ $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{F}''$ überführen. Während die erste Reihe der Kreuzprodukte mit einer der Genauigkeitsangabe der Zielstrahlenpfeile entsprechenden Rechenschärfe gebildet werden muß, genügt für die zweite und dritte der Kreuzprodukte eine wesentlich geringere Rechenschärfe, da sie ja nur Verbesserungswerte der ersteren darstellen. Das Rechenergebnis ist in Tafel II zusammengefaßt, die auch noch die Pfeile $\mathfrak{G}' = \mathfrak{s}_a' \times \mathfrak{F}'$ usf. enthält.

Nun kann man an die Berechnung der Produkte aus je drei Pfeilfaktoren gehen, welche die Beiwerte und die konstanten Glieder in den Bedingungsgleichungen für die drei kleinen Drehwinkel *du' du* und *du''* ergeben. Aus ihnen bildet man sodann die folgenden fünf Gleichungen für diese drei Unbekannten der Stellortung.

$$\begin{array}{llllll}
da & 0{,}08216\,du' & -\,0{,}13688\,du & +\,0{,}35636\,du'' & -\,0{,}000675 & = 0 \\
bc & 0{,}21582\,du' & +\,0{,}46725\,du & -\,0{,}08548\,du'' & +\,0{,}000996 & = 0 \\
ac & -\,0{,}11160\,du' & +\,0{,}59443\,du & -\,0{,}21045\,du'' & +\,0{,}000509 & = 0 \\
bd & 0{,}07818\,du' & +\,0{,}59835\,du & -\,0{,}40551\,du'' & +\,0{,}001439 & = 0 \\
ik & 0{,}12509\,du' & +\,0{,}58633\,du & -\,0{,}44866\,du'' & +\,0{,}001646 & = 0
\end{array}$$

Werden diese fünf Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate zu drei Normalgleichungen zusammengefaßt, so entsprechen diese folgendem Schema:

$$\begin{array}{rrrr}
0{,}08754 & 0{,}14338 & -\,0{,}05350 & 0{,}0004212 \\
 & 1{,}29220 & -\,0{,}71951 & 0{,}0026880 \\
 & & 0{,}54432 & -\,0{,}0017553 \\
 & & & -\,0{,}0006489,
\end{array}$$

dessen Auflösung die Werte der Unbekannten liefert.

$$du' = -\,0{,}002550 \quad du = -\,0{,}000534 \quad du'' = 0{,}002267.$$

Mit den Einheitspfeilen $\mathfrak{s}_a'$ $\mathfrak{s}_a$ $\mathfrak{s}_a''$ multipliziert geben sie die Anteile der Drehpfeile in den Sonnenrichtungen. Diese werden ergänzt durch die Pfeile $\Delta\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}_a'$ usf., welche die geodätischen Sonnenrichtungen in die astronomischen überführen. So erhält

Tafel I

Standpunkt O'

$\mathfrak{a}'$	0,66316	— 0,01704	— 0,74830
$\mathfrak{b}'$	0,40549	0,79972	— 0,44277
$\mathfrak{c}'$	— 0,40528	0,79465	— 0,45193
$\mathfrak{d}'$	— 0,66764	— 0,02208	— 0,74417
$\mathfrak{i}'$	0,56798	0,55068	— 0,61170
$\mathfrak{k}'$	— 0,56375	0,54392	— 0,62157
$\mathfrak{s}'_g$	0,51607	— 0,76838	— 0,37854
$\mathfrak{s}'_a$	0,51339	— 0,77016	— 0,37854
$\Delta\mathfrak{s}'$	0,00268	0,00178	0,00000
$\Delta\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}'_a$	— 0,00068	0,00101	— 0,00298

Standpunkt O

$\mathfrak{a}$	0,54418	0,54563	— 0,63731
$\mathfrak{b}$	0,55179	0,55160	— 0,62551
$\mathfrak{c}$	— 0,54953	0,54681	— 0,63186
$\mathfrak{d}$	— 0,55234	— 0,54851	— 0,62775
$\mathfrak{i}$	0,66639	— 0,00141	— 0,74562
$\mathfrak{k}$	— 0,66237	— 0,00229	— 0,74918
$\mathfrak{s}_g$	0,59172	0,41606	— 0,69049
$\mathfrak{s}_a$	0,59199	0,41734	— 0,68948
$\Delta\mathfrak{s}$	0,00027	— 0,00128	— 0,00101
$\Delta\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}_a$	0,00130	— 0,00078	0,00065

Standpunkt O''

$\mathfrak{a}''$	0,39139	— 0,79003	— 0,47190
$\mathfrak{b}''$	0,64989	— 0,00140	— 0,76003
$\mathfrak{c}''$	— 0,64699	— 0,00422	— 0,76250
$\mathfrak{d}''$	— 0,39970	— 0,79103	— 0,46318
$\mathfrak{i}''$	0,54624	— 0,55159	— 0,63035
$\mathfrak{k}''$	— 0,54726	— 0,54754	— 0,63300
$\mathfrak{s}''_g$	0,51762	— 0,76420	— 0,38483
$\mathfrak{s}''_a$	0,51990	— 0,76200	— 0,38608
$\Delta\mathfrak{s}''$	— 0,00209	— 0,00220	0,00125
$\Delta\mathfrak{s}'' \times \mathfrak{s}''_a$	— 0,00180	— 0,00024	0,00 289

Tafel II

da

$\mathfrak{F}'$	0,00087	— 0,99309	0,02669	$\mathfrak{F}$	0,00701	— 0,69440	0,59895	$\mathfrak{F}''$	0,00828	— 0,37100	— 0,62473
$\mathfrak{G}'$	— 0,39593	— 0,01491	— 0,51072	$\mathfrak{G}$	— 0,28936	— 0,35979	— 0,41335	$\mathfrak{G}''$	— 0,62024	— 0,32655	— 0,18586

bc

$\mathfrak{F}'$	— 0,00782	0,36317	0,64611	$\mathfrak{F}$	— 0,00755	0,69159	0,60564	$\mathfrak{F}''$	— 0,00498	0,98727	— 0,00189
$\mathfrak{G}'$	— 0,35968	— 0,32993	0,17984	$\mathfrak{G}$	0,72969	— 0,35327	0,41244	$\mathfrak{G}''$	0,38273	0,00272	0,50941

ac

$\mathfrak{F}'$	0,60467	0,60153	0,51906	$\mathfrak{F}$	0,69269	0,69449	— 0,00093	$\mathfrak{F}''$	0,59878	0,60641	— 0,51157
$\mathfrak{G}'$	— 0,17136	— 0,49640	0,77401	$\mathfrak{G}$	0,47827	— 0,47719	0,13322	$\mathfrak{G}''$	0,62420	0,03438	0,77132

bd

$\mathfrak{F}'$	— 0,60258	0,59952	0,52517	$\mathfrak{F}$	— 0,68981	0,69143	0,00238	$\mathfrak{F}''$	— 0,60216	0,60399	— 0,51370
$\mathfrak{G}'$	— 0,17724	— 0,04194	— 0,15650	$\mathfrak{G}$	0,47856	0,47480	0,69620	$\mathfrak{G}''$	0,62602	0,49751	— 0,14584

ik

$\mathfrak{F}'$	— 0,00686	— 0,69833	0,61893	$\mathfrak{F}$	— 0,00129	0,99311	— 0,00117	$\mathfrak{F}''$	0,00217	0,69185	— 0,59974
$\mathfrak{G}'$	— 0,21175	— 0,31602	0,35280	$\mathfrak{G}$	0,68471	0,00191	0,58791	$\mathfrak{G}''$	0,72508	0,30953	0,36063

man schließlich die Drehpfeile $d\mathfrak{u}'$ $d\mathfrak{u}$ und $d\mathfrak{u}''$, welche die genähert georteten Aufnahmen in die endgültig georteten überführen. (Vergleiche die drei letzten Zeilen von Tafel III.)
Das Ergebnis dieser Überführung ist in Tafel III enthalten, die die stellgeorteten Zielstrahlenbündel wiedergibt. Die geänderten geodätischen Sonnenrichtungen fallen jetzt mit den astronomischen zusammen.

Die nun einsetzende Standortung beginnt mit der Berechnung der Richtung der längsten Standlinie O' O''. Werden ihre Richtungskosinus mit λ μ ν bezeichnet, so gelten für sie folgende Gleichungen, welche aussagen, daß die Richtung der Standlinie parallel zu den Ebenen durch $\mathfrak{a}'$ $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}'$ $\mathfrak{b}''$ usf. verläuft und deshalb senkrecht zu den durch die Pfeilprodukte $\mathfrak{a}' \times \mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}' \times \mathfrak{b}''$ usf. bestimmten Richtungen steht.

$$\begin{aligned}
-0{,}58167\lambda + 0{,}01739\mu - 0{,}51287\nu &= 0\\
-0{,}60453\lambda + 0{,}01765\mu - 0{,}51893\nu &= 0\\
-0{,}60838\lambda - 0{,}01743\mu + 0{,}51422\nu &= 0\\
-0{,}57626\lambda - 0{,}01761\mu + 0{,}52070\nu &= 0\\
-0{,}68306\lambda + 0{,}02079\mu - 0{,}61202\nu &= 0\\
-0{,}68523\lambda - 0{,}02048\mu + 0{,}60498\nu &= 0
\end{aligned}$$ [1]

Die Auflösung der zugehörigen Normalgleichungen gibt zusammen mit $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$

$$\lambda = 0{,}00000 \qquad \mu = 0{,}99942 \qquad \nu = 0{,}033891.$$

Hieraus folgt, daß die Flugbahn O' O'' im Grundriß in der Richtung der positiven Y-Achse verläuft und dabei unter $1^0 56' 6''$ ansteigt. Zur Bestimmung des Maßstabes der Standortung wird der Grundriß der Standlinie zu 5900,0 m angenommen. Zur Berechnung der Koordinaten der Zielpunkte werde der Anfangspunkt des Koordinatensystems zwischen die Punkte O' und O'' in 2900 m Entfernung von O' und 3000 m Entfernung von O'' verlegt. In diesem System können nun leicht die Grundkoordinaten x und y der sechs Zielpunkte a bis k gerechnet werden, wenn man bedenkt, daß der Quotient der Richtungskosinus der

[1] Die Beiwerte von λ μ ν in diesen Gleichungen sind die Anteile der Pfeilprodukte $\mathfrak{a}' \times \mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}' \times \mathfrak{b}''$ usf., die vorher zu berechnen sind.

Tafel III

Stellgeortete Zielpfeile

$\bar{\mathfrak{a}}'$	0,66090	−0,01986	−0,75024	$\bar{\mathfrak{a}}$	0,54327	−0,54445	−0,63783	$\bar{\mathfrak{a}}''$	0,39391	−0,78784	−0,47347
$\bar{\mathfrak{b}}'$	0,40578	0,79802	−0,44557	$\bar{\mathfrak{b}}$	0,55186	0,55278	−0,62440	$\bar{\mathfrak{b}}''$	0,65139	0,00217	−0,75876
$\bar{\mathfrak{c}}'$	−0,04053	0,79456	−0,45231	$\bar{\mathfrak{c}}$	−0,54945	0,54668	−0,63187	$\bar{\mathfrak{c}}''$	−0,64548	−0,00332	−0,76378
$\bar{\mathfrak{d}}'$	−0,66090	−0,02222	−0,74214	$\bar{\mathfrak{d}}$	−0,55115	−0,54845	−0,62885	$\bar{\mathfrak{d}}''$	−0,39719	−0,79046	−0,46631
$\mathfrak{i}'$	0,56727	0,54832	−0,61449	$\mathfrak{i}$	0,66714	0,00000	−0,74495	$\mathfrak{i}''$	0,64859	−0,54862	−0,63091
$\mathfrak{k}'$	−0,56451	0,54381	−0,62098	$\mathfrak{k}$	−0,66162	−0,00220	−0,74985	$\mathfrak{k}''$	−0,54491	−0,54676	−0,63570
$\bar{\mathfrak{s}}_g'$	0,51339	−0,77017	−0,37854	$\bar{\mathfrak{s}}_g$	0,59199	0,41734	−0,68948	$\bar{\mathfrak{s}}_g''$	0,51991	−0,76201	−0,38608
$\Delta\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}_a'$	−0,00132	0,00196	0,00097	$\Delta\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}_a$	0,00130	−0,00078	0,00064	$\Delta\mathfrak{s}'' \times \mathfrak{s}_a''$	0,00117	−0,00173	−0,00088
$du'\mathfrak{s}_a'$	−0,00068	0,00101	−0,00298	$du\mathfrak{s}_a$	−0,00032	−0,00022	0,00037	$du''\mathfrak{s}_a''$	0,00180	−0,00024	0,00289
$d\mathfrak{u}'$	−0,00200	0,00297	−0,00201	$d\mathfrak{u}$	0,00098	−0,00100	0,00101	$d\mathfrak{u}''$	0,00297	−0,00197	0,00201

Tafel IV

	O'	a	b	c	d	i	k	O''	O
x	0,0	2994,5	3005,2	−2999,7	−3014,9	3000,0	−2999,9	0,0	−0,1
y	−2900,0	−2990,0	3010,0	2984,6	−3000,0	0,0	−10,0	3000,0	0,0
z	3399,7	0,5	99,8	50,0	60,2	149,8	99,9	3599,9	3499,9

Zielstrahlen gegenüber der X- und Y-Achse gleich der Tangente des Richtungswinkels jedes Zielstrahles im Grundriß ist. Die auf solche Weise aus den Standpunkten O' und O'' durch Vorwärtsschnitt ermittelten Koordinaten sind in Tafel IV zusammengefaßt.

Der Grundriß des mittleren Standpunktes O wurde nun durch Rückwärtsschnitt gegenüber den sechs Zielpunkten auf Grund des stellgeorteten Zielstrahlenbündels ermittelt. Er erhielt dabei die Koordinaten: $x = -0{,}1$ $y = 0$, woraus hervorgeht, daß die drei Standpunkte im Grundriß fast genau in einer Geraden liegen. Die Berechnung der Höhen ist ganz einfach, wenn man bedenkt, daß der Richtungskosinus eines Zielstrahles gegen die Z-Achse gleich dem Sinus des Höhenwinkels jenes Zielstrahles ist. Man erhält dann die in Tafel V vereinigten Höhenunterschiede zwischen den Standpunkten und den Zielpunkten.

Tafel V

	a	b	c	d	i	k
O'	3398,4	3299,9	3349,8	3339,9	3249,9	3300,2
O	3499,6	3399,8	3449,8	3439,8	3350,0	3400,2
O''	3600,0	3500,7	3549,5	3539,3	3450,2	3499,5

Aus ihnen habe ich durch tastende Ausgleichung die in Tafel IV eingetragenen Höhen gewonnen. Sie weichen von den in runden Zahlen ausgedrückten Ausgangswerten des Rechenbeispieles nur um wenige Dezimeter ab, wie es die beschränkte Genauigkeit der fünfstelligen Rechnung von vornherein erwarten ließ. Die mittlere Abweichung der wiederhergestellten Grundrißkoordinaten x und y von den runden Ausgangswerten des Rechenbeispiels ist sogar noch etwas kleiner als die der Höhen.

Bei dem vorstehenden Rechenbeispiel sind die drei Drehwinkel du' du du'' aus fünf Gleichungen durch Ausgleichung ermittelt worden. Es fragt sich, ob man nicht mit weniger Gleichungen auskommen kann. Das ist in der Tat der Fall. Man kann ohne merkliche Einbuße an Genauigkeit die aus der Geländegeraden ik abgeleiteten Gleichung weglassen. Wenn man aber die Ausgleichung ganz vermeiden und sich mit drei Bedingungsgleichungen begnügen wollte, ist Vorsicht bei der Auswahl der zur Aufstellung verwendeten Geländegeraden geboten. So würden die aus den Geraden *da*, *ik* und *bc* oder die aus den Geraden *ac*, *bd* und *ik* folgenden drei Gleichungen versagen, da die Lösung ganz unsicher wird. Knapp reichen würden die aus den Geraden *da*, *ac* und *bd* oder *bc*, *ac* und *bd* folgenden Gleichungen.

In ähnlicher Weise ist die „Nützlichkeit des Überflusses" bei den sechs Gleichungen für die darin homogen auftretenden Richtungskosinus λ μ ν der Standlinie O' O'' zu bewerten. Man käme zur Not mit der ersten und vierten Gleichung aus, niemals aber mit der ersten, zweiten und fünften. Es müssen eben die Ebenen, deren Schnitt die Standlinie bestimmen, einen guten, nicht schleifenden Schnitt aufweisen.

Der Rechenvorgang, der hier für die sonnengeorteten Aufnahmen auseinandergesetzt wurde, ist auch vorbildlich für den Fall, daß drei Aufnahmen, die sowohl sonnengeortet wie lotgeortet sind, gekoppelt werden sollen. Unter der Voraussetzung, daß die Sonnenrichtung und die Lotrichtung genügend verschieden sind, läßt sich dann jede der Aufnahmen für sich stellorten. Unsere aus gemeinsamen Geländegeradenbildern folgenden Bedingungsgleichungen dienen dann entweder zur Probe oder zur Verschärfung der Einzelortung. Dabei fällt die Notwendigkeit, Aufnahmen bei verschiedenem Sonnenstand verwenden zu müssen, fort, und man kann dem Unterschied der Lotrichtungen in zwei weitabstehenden Luftstandpunkten in ähnlicher Weise Rechnung tragen wie dem Unterschied zwischen geodätischer und astronomischer Sonnenrichtung.