Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1941. Heft I

Sitzungen Januar-Juni

München 1941
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren V.

Der Hauptsatz über den Umbau komprimierter Gitterpunktmengen.

Von Heinrich Tietze in München.

Mit 23 Figuren.

Vorgetragen in der Sitzung vom 11. Januar 1941.

§ 1. Einleitung.

1. Den Ausgangspunkt für das Studium komprimierter Gitterpunktmengen bot eine Frage aus der Lehre von den symmetrischen Funktionen: wünscht man nämlich genau festzustellen, welche Elemente der Cayley-Perron'schen Matrix > 1, welche $= 1$ und welche $= 0$ sind, so stützt sich diese Feststellung auf die Einführung gewisser Ordnungsbeziehungen zwischen Partitionen, die ebensowohl als Ordnungsbeziehungen zwischen zweidimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen gelten können. Die Übersicht über alle diese Ordnungsbeziehungen ergab sich dabei aus der Betrachtung gewisser elementarer Abänderungsprozesse – „elementare Umbauten" genannt – durch die eine komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}$ in eine andere $\mathfrak{K}'$ übergeführt wird, u. zw. so, daß $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{K}$ in gewissem Sinne möglichst wenig abweicht, so daß sich der einzelne elementare Prozeß nicht weiter in kleinere Schritte zerlegen läßt[1]. Der Hauptsatz über diese Beziehungen besagte dann, daß sich alle zweidimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}_m^2$ vom selben Grad m (d. h. von der gleichen Anzahl m ihrer Gitterpunkte) aus einer bestimmten unter ihnen durch Ketten von solchen elementaren Abänderungsprozessen gewinnen lassen.

[1] Vgl. hiezu im Folgenden die Sätze (l) und (n) in Nr. **12** und **14**, sowie Satz (f) in Monatshefte f. Math. u. Phys., **49** (1940), S. 13.

Es lag nahe zu vermuten, daß analoge Verhältnisse auch bei komprimierten Gitterpunktmengen von mehr als zwei Dimensionen bestehen. Diese Vermutung fand sich zunächst für $n = 3$ Dimensionen bestätigt, worüber in einer früheren Note berichtet wurde. Doch zeigte sich bereits hier, daß, verglichen mit dem Fall $n = 2$, die Definition eines elementaren Umbaues insoferne abzuändern war, als bei einem solchen Prozeß nicht wie bei $n = 2$ allemal nur ein einziger Punkt in eine neue Lage zu verbringen war, sondern gegebenenfalls gleichzeitig mehrere auf einer ganzen Strecke liegende Punkte. Unter diesen Punkten befand sich aber stets nur ein einziger „Eckpunkt" der umzubauenden dreidimensionalen Menge $\mathfrak{K}_m^3$, – in Analogie mit dem Fall $n = 2$, wo der eine bei einem elementaren Umbau von $\mathfrak{K}_m^2$ verlagerte Punkt stets ein Eckpunkt der Menge $\mathfrak{K}_m^2$ ist [2].

Doch überträgt sich diese Analogie nicht auf mehr als 3 Dimensionen, wie aus dem Folgenden hervorgeht, wo die Beziehungen zwischen komprimierten Gitterpunktmengen gleichen Grades für eine beliebige Anzahl n von Dimensionen entwickelt werden. Bei sinngemäßer [3] Definition des elementaren Umbaues ergeben sich nämlich schon für $n = 4$ Fälle, wo die Anzahl der bei einem einzigen elementaren Umbau verlagerten Eckpunkte größer als 1 ist, – ja diese Anzahl ist überhaupt (bereits für $n = 4$) keiner Einschränkung unterworfen [4].

2. Die als „Umbauten" bezeichneten Abänderungsprozesse d r e i d i m e n s i o n a l e r komprimierter Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}_m^3$ im xyz-Raum waren von der Art, daß eine Koordinate, etwa x, ausgewählt wurde und dann jeder vom Umbau betroffene Punkt eine Verlagerung erfuhr, bei der nur seine beiden anderen Koordinaten y, z geändert wurden, während seine x-Koordinate ihren Wert behielt: jeder Punkt verblieb beim Umbau in der

---

[2] Siehe „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren II. Komprimierte Gitterpunktmengen", diese Sitz.ber., 1940, § 6; über $n = 2$ vgl. ebenda § 5 sowie Monatshefte, l. c. [1], S. 10 ff., Nr. **26**.

[3] Gemeint ist eine solche Definition, daß der Hauptsatz (Satz 2, Nr. **26**) sowie die in Satz (l), Nr. **12**, und (n), Nr. **14**, ausgesprochene Eigenschaft erhalten bleiben.

[4] Vgl. Nr. **19**, Anm. 37.

Ebene $x=$ const., in der er ursprünglich lag; daran wurde auch bei einer Folge von Umbauten festgehalten; wir sprachen von einem zy-Umbau oder yz-Umbau[5]. Das Hauptergebnis der bezüglichen Überlegungen war dann, daß es zu jeder $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^3$ eine ganz in $y = 1$ gelegene (desgleichen eine weitere ganz in $z = 1$ gelegene) komprimierte Gitterpunktmenge $\widehat{\mathfrak{K}}$ (bzw. $\underset{\smile}{\mathfrak{K}}$) gibt, sodaß $\mathfrak{K}$ aus $\widehat{\mathfrak{K}}$ (bzw. aus $\underset{\smile}{\mathfrak{K}}$) durch eine Kette elementarer zy-Umbauten (bzw. yz-Umbauten) gewonnen werden kann.

Im Folgenden wird der entsprechende Hauptsatz (siehe Nr. **26**, Satz 2) für eine beliebige Anzahl n von Dimensionen entwickelt, wobei für $n = p + 2$ (mit $p \geqq 1$) die Koordinaten mit $x_1, \ldots, x_p, y, z$ bezeichnet und wieder solche Umbauten betrachtet werden, bei denen jeder Punkt alle Koordinaten bis auf zwei (nämlich alle Koordinaten $x_1, \ldots, x_p$) beibehält, also in jener (zweidimensionalen) Ebene $x_1 =$ const., $\ldots, x_p =$ const. verbleibt, in der er ursprünglich lag. Der Beweis dieses Hauptsatzes gründet sich (wie der analoge Beweis für $n = 3$ in Note II, l. c. [2]) auf den (den eigentlichen Kern der vorliegenden Entwicklungen bildenden) Nachweis, daß jede komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}_m^n$, soferne nicht alle ihre Punkte in $z = 1$ liegen, einen elementaren zy-Umbau gestattet (Satz von der Existenz eines elementaren Umbaues: Satz 1 in Nr. **16**).

In § 2 werden Hilfsbetrachtungen über komprimierte Gitterpunktmengen vorangestellt. Nach Erklärung der Begriffe „einfache Umlagerung" und „Umbau" einer komprimierten Gitterpunktmenge in § 3 wird in § 4 und § 5 der erwähnte Existenzsatz nachgewiesen. § 6 enthält einige Beispiele, von denen die in Nr. **20** und **21** angeführten den Fingerzeig gaben[5a] für die Definition des elementaren Umbaues bei $n > 3$. Der in § 7 entwickelte Hauptsatz ermöglicht wieder, so wie dies für $n = 2$ und $n = 3$ schon bekannt ist, eine vollständige Gliederung der komprimierten Gitterpunktmengen nach Stammbäumen, worüber am Schluß (Nr. **29**, **30**) noch Einiges gesagt ist.

---

[5] Über den Unterschied zwischen zy- und yz-Umbau vgl. Nr. **9**, Anm. 20, Nr. **10**, Anm. 23, Nr. **13**, Satz (m), sowie Nr. **15**.

[5a] Vgl. den Schluß von Nr. **20**, sowie Anm. 43.

§ 2. Einiges über komprimierte Gitterpunktmengen.

3. Unter einem „Gitterpunkt“ werde in dieser Arbeit stets ein Punkt mit positiven ganzzahligen Koordinaten verstanden. Wenn $(x') = (x'_1, \ldots, x'_p)$ ein Gitterpunkt im $\mathfrak{R}^p$ ist ($p \geqq 1$), dann werde mit $k(x')$ die Menge aller Gitterpunkte $(x) = (x_1, \ldots, x_p)$ bezeichnet, die den Ungleichungen

$$0 < x_1 \leqq x'_1, \ldots, 0 < x_p \leqq x'_p$$

genügen. Ist $\mathfrak{M}$ irgend eine Menge von Gitterpunkten, so bedeute[6] $k(\mathfrak{M})$ die Vereinigung der für alle Punkte (x') von $\mathfrak{M}$ gebildeten Mengen $k(x')$. Die Menge $\mathfrak{M}$ heißt komprimiert[6], wenn $k(x') \subseteqq \mathfrak{M}$ für jeden Punkt (x') von $\mathfrak{M}$ gilt; anders gesagt, wenn

$$k(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$$

ist. Zu den komprimierten Gitterpunktmengen ist auch die leere Menge $\mathfrak{o}$ zu zählen[7]. Offenbar gilt

(a) Durchschnitt und Vereinigung komprimierter Mengen ist komprimiert.

4. Ist $\mathfrak{K}$ eine komprimierte Gitterpunktmenge, so werde mit $\mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ der Durchschnitt aller Mengen $\mathfrak{M}$ bezeichnet, für welche $k(\mathfrak{M}) = \mathfrak{K}$ ist; $\mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ heißt die „Eckpunktmenge“, jeder Punkt aus $\mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ ein „Eckpunkt“ von $\mathfrak{K}$. Die Eckpunkte lassen sich

---

[6] Die Menge $k(\mathfrak{M})$ heißt „komprimierte Füllung“ oder „komprimierte Hülle“ von $\mathfrak{M}$; besteht $\mathfrak{M} = \{P\}$ nur aus einem einzigen Punkt $P = (x')$, so ist $k(\mathfrak{M}) = k(\{P\})$ dasselbe wie $k(P) = k(x')$. Vgl. zu unserem Gegenstand die (ein wenig anders aufgebaute) Darstellung in Note II, l. c. [2], §§ 3, 4, wo entsprechende Betrachtungen nicht nur innerhalb der Menge aller Gitterpunkte mit positiven Koordinaten, sondern auch innerhalb einer beliebigen „Grundmenge“ angestellt werden.

Für manche Überlegungen ist übrigens ein Begriff nützlich, den man als „partielle Komprimiertheit“ bezeichnen könnte: werden irgend welche q Koordinaten, etwa $x_1, \ldots, x_q$ gewählt, so heiße $(x_1 \ldots x_q)$-komprimiert eine Menge, die mit jedem Punkt (x') auch jeden den Ungleichungen $x_1 \leqq x'_1, \ldots, x_q \leqq x'_q$ genügenden Punkt $(x_1, \ldots, x_q, x'_{q+1}, \ldots, x'_p)$ enthält. Die gewöhnliche (vollständige) Komprimiertheit ergibt sich, wenn $q = p$ genommen wird.

[7] Vgl. Note II, l. c. [2], S. 115, Nr. **47**.

offenbar kennzeichnen als diejenigen Punkte $X' = (x'_1, \ldots, x'_p)$ von $\mathfrak{K}$, für welche keiner der p Punkte $X'_1 = (x'_1 + 1, x'_2, \ldots, x'_p), \ldots, X'_p = (x'_1, \ldots, x'_{p-1}, x'_p + 1)$ zu $\mathfrak{K}$ gehört[8]. Nennt man zwei Gitterpunkte (x') und (x'') „unabhängig", wenn weder (x'') zu $k(x')$ noch (x') zu $k(x'')$ gehört[9], so ist klar, daß zwei verschiedene Eckpunkte einer komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}$ stets unabhängig sind. Ferner gilt[10]

(b) Ist die komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}$ endlich und $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ ihre Eckpunktmenge, so ist $\mathfrak{K} = k(\mathfrak{E})$[10a].

Ist nämlich X' ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{K}$, der nicht Eckpunkt ist, und ist X'' ein zu $\mathfrak{K}$ gehöriger unter den wie oben aus X' hergeleiteten Punkten $X'_1, \ldots, X'_p$, dann betrachtet man, wenn X'' nicht selbst Eckpunkt von $\mathfrak{K}$ ist, die analog aus X'' hergeleiteten Punkte $X''_1, \ldots, X''_p$ und muß so fortfahrend wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{K}$ schließlich auf einen Eckpunkt (y) von $\mathfrak{K}$ stoßen. Da dann X' zu $k(y)$, somit zu $k(\mathfrak{E})$ gehört, so gehört jeder Punkt von $\mathfrak{K}$ zu $k(\mathfrak{E})$.

Aus der Definition der Eckpunktmenge $\mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ folgt noch für eine beliebige Gitterpunktmenge $\mathfrak{N}$

$$\mathfrak{E}(k(\mathfrak{N})) \subseteqq \mathfrak{N}; \tag{1}$$

denn da $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(k(\mathfrak{N}))$ der Durchschnitt aller Mengen $\mathfrak{M}$ mit $k(\mathfrak{M}) = k(\mathfrak{N})$ ist und da $\mathfrak{N}$ selbst eine dieser Mengen $\mathfrak{M}$ ist, muß $\mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{N}$ sein.

Sind ferner $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ zwei p-dimensionale komprimierte Gitterpunktmengen, so gelten die Beziehungen

$$\mathfrak{E}(k(\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_2)) \subseteqq \mathfrak{E}(\mathfrak{K}_1 \dotplus \mathfrak{K}_2), \tag{2}$$

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{K}_1 \dotplus \mathfrak{K}_2) \subseteqq \mathfrak{E}(\mathfrak{K}_1) \dotplus \mathfrak{E}(\mathfrak{K}_2). \tag{3}$$

---

[8] Vgl. Note II, l. c. [2], S. 86, Nr. **18**.

[9] Analog heißen l Gitterpunkte $(x'), \ldots, (x^{(l)})$ „unabhängig", wenn für kein $\lambda \neq \mu$ der Punkt $x^{(\lambda)}$ zu $k(x^{(\mu)})$ gehört; vgl. auch „Komprimierte Gitterpunktmengen und eine additiv-zahlentheoretische Aufgabe", Nr. **16** (erscheint im Journal für die reine und angewandte Mathematik).

[10] Vgl. Note II, l. c. [2], S. 87, Satz 9 (man beachte, daß l. c. gemäß Nr. **2**, S. 70, die Endlichkeit von $\mathfrak{K}$ von vorneherein vorausgesetzt wird).

[10a] Aus (b) folgt $\mathfrak{E}(\mathfrak{K}) \supset \mathfrak{o}$, wenn $\mathfrak{K}$ endlich und $\supset \mathfrak{o}$ ist.

Ist nämlich $\mathfrak{N} = \mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_2$ nicht leer[11] und X' ein Eckpunkt von $k(\mathfrak{N})$, dann gehört von den (wie oben) aus X' hergeleiteten p Punkten $X'_1, \ldots, X'_p$ keiner zu $k(\mathfrak{N})$; da aber X' als Punkt aus $\mathfrak{E}(k(\mathfrak{N}))$ gemäß (1) zu $\mathfrak{N}$ und daher nicht zu $\mathfrak{K}_2$ gehört, so gehört wegen der Komprimiertheit von $\mathfrak{K}_2$ erst recht keiner der Punkte $X'_1, \ldots, X'_p$ zu $\mathfrak{K}_2$. Da aber $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \dot{+} \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_2 \dot{+} k(\mathfrak{N})$ ist[12], so gehört keiner der p Punkte X'_ν zu $\mathfrak{K}$; es ist also der zu $\mathfrak{K}$ gehörende Punkt X' ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}$, womit (2) bewiesen ist. – Was aber (3) anlangt, so ist klar, daß ein Eckpunkt X' von $\mathfrak{K}_1 \dot{+} \mathfrak{K}_2$, wenn er als Punkt von $\mathfrak{K}_1 \dot{+} \mathfrak{K}_2$ etwa zu $\mathfrak{K}_\lambda$ gehört ($\lambda = 1$ oder 2), notwendig Eckpunkt von $\mathfrak{K}_\lambda$ sein muß, da ja die p Punkte X'_ν nicht zu $\mathfrak{K}_1 \dot{+} \mathfrak{K}_2$ also sicher nicht zu $\mathfrak{K}_\lambda$ gehören. Jeder Eckpunkt von $\mathfrak{K}_1 \dot{+} \mathfrak{K}_2$ findet sich also unter den Eckpunkten von $\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_2$.

5. Später brauchen wir den folgenden

Hilfssatz. *Seien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ zwei endliche komprimierte Gitterpunktmengen des $\mathfrak{R}^p$ und sei $(\xi) = (\xi_1, \ldots, \xi_p)$ ein Punkt von $\mathfrak{L}$, der nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört. Dann gibt es wenigstens eine Gitterpunktmenge Ξ mit folgenden Eigenschaften*

α) Ξ enthält den Punkt (ξ);

β) Ξ ist Teilmenge von $\mathfrak{L}$ (also $\Xi \subseteqq \mathfrak{L}$);

γ) die Menge $\mathfrak{L} - \Xi$ der nicht zu Ξ gehörenden Punkte von $\mathfrak{L}$ ist komprimiert;

δ) Ξ enthält keinen Punkt von $\mathfrak{M}$ (also $\Xi\,\mathfrak{M} = \mathfrak{o}$);

ε) die Vereinigung $\mathfrak{M} + \Xi$ von $\mathfrak{M}$ und Ξ ist komprimiert.

Dabei hat der Durchschnitt $\Xi_1 \Xi_2$ zweier Mengen Ξ_1, Ξ_2 mit den Eigenschaften α) bis ε) ebenfalls diese Eigenschaften. Unter den Mengen Ξ gibt es eine kleinste $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\xi; \mathfrak{L}, \mathfrak{M})$, die als der Durchschnitt aller Mengen Ξ definiert werden kann.

---

[11] Für die leere Menge $\mathfrak{o}$ ist $\mathfrak{E}(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$, sodaß (2) im Falle $\mathfrak{K}_1 \subseteqq \mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{o}$ von selbst erfüllt ist (wie überhaupt stets, wenn $k(\mathfrak{N}) = \mathfrak{o}$ ist).

[12] Dies folgt unmittelbar aus der Formel $k(\mathfrak{M} \dot{+} \mathfrak{N}) = k(\mathfrak{M}) \dot{+} k(\mathfrak{N})$ (vgl. Note II, l. c. [2], Gleichung (3), S. 77), wenn wir $\mathfrak{M} = \mathfrak{K}_2$ setzen und $\mathfrak{K}_1 \dot{+} \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{N}$ sowie $k(\mathfrak{K}_2) = \mathfrak{K}_2$ und $k(\mathfrak{K}) = \mathfrak{K}$ beachten.

Um den ersten Teil der Behauptung – die Existenz von Mengen Ξ – zu beweisen, betrachten wir die Menge Ξ_0 aller nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörenden Punkte von $\mathfrak{L}$, für die natürlich α), β), δ) gilt; nach Hilfssatz (a) gilt aber auch γ) und ε), weil $\mathfrak{L} - \Xi_0$ gleich dem Durchschnitt von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L}$ ist, $\mathfrak{M} + \Xi_0$ aber gleich der Vereinigung von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L}$.

Bezüglich des zweiten Teils der Behauptung ist zunächst klar, daß die Eigenschaften α), β), δ) ebenso wie den Mengen Ξ_1 und Ξ_2 selbst, so auch dem Durchschnitt $\Xi_1 \Xi_2$ zukommen. Setzen wir ferner

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \Xi_1 - \Xi_1 \Xi_2, \\ \Theta_2 &= \Xi_2 - \Xi_1 \Xi_2, \\ \Omega &= \mathfrak{L} - (\Theta_1 + \Theta_2 + \Xi_1 \Xi_2) \end{aligned}$$

so ist $\mathfrak{L} - \Xi_1 \Xi_2 = \Theta_1 + \Theta_2 + \Omega$ die Vereinigung der Mengen $\Theta_2 + \Omega = \mathfrak{L} - \Xi_1$ und $\Theta_1 + \Omega = \mathfrak{L} - \Xi_2$; sind also diese beiden Mengen komprimiert, so ist es gemäß (a) auch $\mathfrak{L} - \Xi_1 \Xi_2$, d. h. $\Xi_1 \Xi_2$ erfüllt γ). Endlich erfüllt $\Xi_1 \Xi_2$ auch ε), da $\mathfrak{M} + \Xi_1 \Xi_2$ als Durchschnitt der komprimierten Mengen $\mathfrak{M} + \Xi_1$ und $\mathfrak{M} + \Xi_2$ gemäß (a) selbst komprimiert ist.

Nun kann es, der Endlichkeit von $\mathfrak{L}$ wegen, nur endlich viele Teilmengen von $\mathfrak{L}$, somit nur endlich viele Mengen Ξ geben. Für ihren Durchschnitt $\mathfrak{X}$ gilt also ebenso wie für den Durchschnitt zweier solcher Mengen, daß $\mathfrak{X}$ gleichfalls alle Eigenschaften einer Menge Ξ hat[13].

Als Beispiel betrachten wir (für $p = 2$) die mit Hilfe irgend einer ganzen Zahl $a \geqq 2$ folgendermaßen gebildeten Mengen: Es sei $\mathfrak{N}_1$ die Menge der drei Punkte $(1, a+1)$, $(1, a+2)$, $(2, a+1)$ und $\mathfrak{N}_2$ die Menge der drei Punkte $(a+1, 2)$, $(a+2, 1)$, $(a+2, 2)$, ferner $\mathfrak{P}$ die Menge der Gitterpunkte mit $x_1 + x_2 \leqq a + 2$, $\operatorname{Min}(x_1, x_2) \leqq 2$ (und natürlich $x_1, x_2 > 0$, vgl. Nr. **3**) und $\mathfrak{Q}$ die Menge, die alle Gitterpunkte des Quadrates $x_1 \leqq a$, $x_2 \leqq a$ sowie den Punkt $(a+1, 1)$ umfaßt; es sei nun $\mathfrak{L} = \mathfrak{P} \dotplus \mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_2$ und $\mathfrak{M}$ irgend eine der Bedingung $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} \subseteqq \mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{Q}$ genügende komprimierte Menge; schließlich sei (ξ) ein Punkt von $\mathfrak{L} - \mathfrak{L}\mathfrak{M} = \mathfrak{L} - \mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2$. Dann ist $\mathfrak{X}(\xi; \mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ gleich $\mathfrak{N}_1$ oder gleich $\mathfrak{N}_2$, je nachdem (ξ) ein Punkt von $\mathfrak{N}_1$ oder von $\mathfrak{N}_2$ ist.

---

[13] In dem besonderen Falle $\mathfrak{M} = \mathfrak{o}$ hat, wie leicht zu sehen, nur die Menge $\mathfrak{L}$ die Eigenschaften einer Menge Ξ (andernfalls würden ja Ξ und $\mathfrak{L} - \Xi$, als nicht-leere komprimierte Mengen, beide den Punkt $(1, \ldots, 1)$ enthalten müssen). Es ist also in diesem Falle $\mathfrak{X}(\xi; \mathfrak{L}, \mathfrak{o}) = \mathfrak{L}$ für jeden Punkt (ξ) von $\mathfrak{L}$.

6. Die in Nr. **5** betrachteten Mengen Ξ und $\mathfrak{X}$ geben Anlaß zu folgender Bemerkung: Wenn man – innerhalb irgend einer „Grundmenge" $\mathfrak{F} \subseteqq \mathfrak{R}^p$ (vgl. Anm. 6) als komprimiert eine Menge $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{F}$ bezeichnet, die mit jedem Punkt $(x^0) = (x_1^0, \ldots, x_p^0)$ auch jeden den Ungleichungen $x_\nu \leqq x_\nu^0$ genügenden Punkt von $\mathfrak{F}$ enthält, als „antikomprimiert" aber[14], wenn $\mathfrak{M}$ mit jedem Punkt (x^0) auch jeden den Ungleichungen $x_\nu \geqq x_\nu^0$ genügenden Punkt von $\mathfrak{F}$ enthält, dann haben die oben betrachteten Mengen Ξ innerhalb der Grundmenge $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} - \mathfrak{L}\mathfrak{M}$ die Eigenschaft, sowohl komprimiert als antikomprimiert zu sein; man könnte Ξ etwa bikomprimiert nennen, wenn es sich als nötig erweisen sollte, einen besonderen Namen für diese Doppeleigenschaft zu haben. Wird dann für eine Menge $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{F}$ mit $K(\mathfrak{N})$ die kleinste bikomprimierte Menge bezeichnet, die $\subseteqq \mathfrak{F}$ und $\supseteqq \mathfrak{N}$ ist ($K(\mathfrak{N})$ = bikomprimierte Hülle oder Füllung von $\mathfrak{N}$), so zeigt sich, daß die oben eingeführte Menge $\mathfrak{X}(\xi; \mathfrak{L}, \mathfrak{M}) = K(\mathfrak{N})$ ist, wenn man $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} - \mathfrak{L}\mathfrak{M}$ setzt und für $\mathfrak{N}$ die aus dem einen Punkt (ξ) bestehende Menge $\{(\xi)\}$ nimmt.

7. Wir fügen noch einige für später nützliche Betrachtungen an. Sei $p \geqq 1$, $q \geqq 1$, $n = p + q$ und sei $\mathfrak{M}$ eine (nicht notwendig komprimierte) n-dimensionale Gitterpunktmenge im Raum $\mathfrak{R}^n$ der Koordinaten $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q$. Aus $\mathfrak{M}$ leiten wir nun gewisse im Raum $\mathfrak{S}^p$ der Koordinaten $x_1, \ldots, x_p$ gelegene Gitterpunktmengen $\mathfrak{M}^p(y')$ ab, desgleichen auch analoge Gitterpunktmengen $\mathfrak{M}^q(x')$ im Raum $\mathfrak{T}^q$ der Koordinaten $y_1, \ldots, y_q$. Sei hiezu $(y') = (y_1', \ldots, y_q')$ irgend ein Gitterpunkt[15] des Raumes $\mathfrak{T}^q$. Dann werde in die Menge $\mathfrak{M}^p(y')$ des Raumes $\mathfrak{S}^p$ jeder Punkt $(x) = (x_1, \ldots, x_p)$ aufgenommen, für den

$$(x_1, \ldots, x_p, y_1', \ldots, y_q')$$

ein Punkt von $\mathfrak{M}$ ist; analog in die Menge $\mathfrak{M}^q(x')$ des Raumes $\mathfrak{T}^q$ jeder Punkt (y), für den

$$(x_1', \ldots, x_p', y_1, \ldots, y_q)$$

zu $\mathfrak{M}$ gehört. Wählt man für $\mathfrak{M}$ speziell eine komprimierte Menge $\mathfrak{K}$, so folgt aus der Komprimiertheit von $\mathfrak{K}$ unmittelbar die Komprimiertheit der Mengen $\mathfrak{K}^p(y')$ und $\mathfrak{K}^q(x')$ sowie die Gültigkeit der Aussage:

---

[14] Vgl. Note II, l. c. [2], Nr. **15**, **17**, S. 84, 85.

[15] Wie schon gesagt (s. Nr. **3**), betrachten wir nur Gitterpunkte mit positiven Koordinaten.

(c) Gehört (y') zu $k(y'')$, so ist $\mathfrak{K}^p(y') \supseteqq \mathfrak{K}^p(y'')$, nebst der analogen Aussage:

(d) Gehört (x') zu $k(x'')$, so ist $\mathfrak{K}^q(x') \supseteqq \mathfrak{K}^q(x'')$.

Die Komprimiertheit aller Mengen $\mathfrak{M}^p(y')$ und $\mathfrak{M}^q(x')$ ist aber nicht nur eine notwendige Bedingung für die Komprimiertheit von $\mathfrak{M}$; vielmehr gilt auch umgekehrt

(e) Eine Menge $\mathfrak{M}$ ist komprimiert, wenn alle zugehörigen Mengen $\mathfrak{M}^p(y')$ und $\mathfrak{M}^q(x')$ komprimiert sind.

Ist nämlich $(x_1', \ldots, x_p', y_1', \ldots, y_q')$ ein Punkt von $\mathfrak{M}$ und ist $x_\mu \leqq x_\mu'$, $y_\nu \leqq y_\nu'$ $(1 \leqq \mu \leqq p,\ 1 \leqq \nu \leqq q)$, so ist nach Voraussetzung $(x_1, \ldots, x_p)$ ein Punkt von $\mathfrak{M}^p(y')$, also $(x_1, \ldots, x_p, y_1', \ldots, y_q')$ ein Punkt von $\mathfrak{M}$, somit $(y_1', \ldots, y_q')$ ein Punkt von $\mathfrak{M}^q(x)$ und daher $(y_1, \ldots, y_q)$ ein Punkt von $\mathfrak{M}^q(x)$, also $(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ ein Punkt von $\mathfrak{M}$.

8. Offenbar ist im Raum $\mathfrak{T}^q$ die Menge $\mathfrak{k}^q$ jener Punkte (y), für welche $\mathfrak{K}^p(y)$ nicht leer ist $(\mathfrak{K}^p(y) \supset \mathfrak{o})$, eine komprimierte Menge[16]. Hiezu sei noch bemerkt: Man kann nicht nur aus $\mathfrak{K}$ in der angegebenen Weise die Mengen $\mathfrak{K}^p(y)$ und die Menge $\mathfrak{k}^q$ bilden, sondern man kann auch umgekehrt von einer komprimierten Menge $\mathfrak{k}^q$ ausgehen, jedem Punkt (y) aus $\mathfrak{k}^q$ eine komprimierte Menge $\mathfrak{K}^p(y) \supset \mathfrak{o}$ zuweisen, u. zw. derart daß diese Mengen der Bedingung (c) genügen; hiedurch ist dann allemal eine zugehörige komprimierte Menge $\mathfrak{K}$ des $\mathfrak{R}^n$ festgelegt[17].

Ferner gilt:

(f) Ein Punkt $(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta_1, \ldots, \eta_q)$ ist dann und nur dann ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}$, wenn (ξ) ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}^p(\eta)$ und (η) ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}^q(\xi)$ ist.

§ 3. Elementarer Umbau einer n-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmenge.

9. Ehe wir den für das Folgende wesentlichen Begriff des „elementaren Umbaues" erklären, ist es bequem, gewisse all-

---

[16] Analog gilt für jede komprimierte Menge $\mathfrak{L}^q \supset \mathfrak{o}$ in $\mathfrak{T}^q$, daß die Menge der Punkte (x), für welche $\mathfrak{R}^q(x) \supseteqq \mathfrak{L}^q$ bzw. $\mathfrak{R}^q(x) \supset \mathfrak{L}^q$ ist, eine komprimierte Menge in $\mathfrak{S}^p$ ist.

[17] Verwandte Überlegungen finden sich in Note II, l. c. [2], Nr. **51**, S. 117.

gemeinere an einer endlichen n-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmenge auszuführende Abänderungsprozesse zu besprechen – sie mögen den Namen „einfache Umlagerung" (für $n = 2$ auch „einfacher Umbau") erhalten[18]; erst nachher (Nr. **12** ff.) sollen unter diesen Prozessen durch spezielle Merkmale die „elementaren Umbauten" gekennzeichnet werden.

Sei $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^n$ die abzuändernde komprimierte Gitterpunktmenge (m der Grad, d. h. die Anzahl der Gitterpunkte von $\mathfrak{K}$). Dabei sei $n = p + 2 \geqq 2$. Die n Koordinaten mögen $x_1, \ldots, x_p, y, z$ heißen. Wir beginnen mit dem Fall $n = 2$ (wo also nur die Koordinaten y, z und gar keine Koordinaten x_ν auftreten). Wenn nun aus einer komprimierten Menge $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^2$ eine ebenfalls komprimierte Menge $\mathfrak{K}'$ dadurch entsteht, daß ein Gitterpunkt $G = (\eta', \zeta')$ aus $\mathfrak{K}$ entfernt und dafür ein nicht in $\mathfrak{K}$ befindlicher Gitterpunkt $H = (\eta'', \zeta'')$ in $\mathfrak{K}'$ aufgenommen wird, dann heiße der Übergang von $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{K}'$ eine „einfache Umlagerung" (oder auch ein einfacher Umbau[19]). Hiernach kann H nicht zur Menge $k(G)$ gehören (vgl. über diese Menge Nr. **3**); und da der Übergang von $\mathfrak{K}'$ zu $\mathfrak{K}$ gemäß unserer Definition ebenfalls ein einfacher Umbau ist, so gehört auch G nicht zu $k(H)$, d. h. G und H sind unabhängige Punkte. Es muß also entweder

$$\eta' < \eta'', \quad \zeta' > \zeta'' \tag{4}$$

oder

$$\eta' > \eta'', \quad \zeta' < \zeta'' \tag{5}$$

sein. Im ersten Fall bezeichnen wir die einfache Umlagerung als eine zy-Umlagerung, im zweiten Fall als eine yz-Umlagerung[20].

Man sieht übrigens sofort, daß der Punkt G ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}$ (analog dann H ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}'$) sein muß; hiezu ist nur zu zeigen (vgl. Nr. **4**), daß keiner der beiden Punkte

$$P_1 = (\eta' + 1, \zeta'), \quad P_2 = (\eta', \zeta' + 1) \tag{6}$$

---

[18] Über die Rolle des hier eingeführten Begriffs „einfache Umlagerung" und seine Abgrenzung sei noch auf Anm. 27, Nr. **13** und 29, Nr. **15** verwiesen.

[19] Vgl. Anm. 29, Nr. **15**.

[20] Wegen der Benennungen vgl. Note II, l. c. [2] Anm. 40, S. 89.

zu $\mathfrak{K}$ gehört. Nun kann jedenfalls H mit keinem der Punkte (6) zusammenfallen, da ja sonst G zu $k(H)$ gehörte; weil nun $\mathfrak{K}'$ komprimiert ist und den Punkt G nicht enthält, so enthält $\mathfrak{K}'$ auch keinen der Punkte (6), die daher, weil sie von G verschieden sind, auch in $\mathfrak{K}$ nicht vorkommen, was zu beweisen war.

10. Wir kommen zum Fall $n > 2$, also $p \geqq 1$. Es gebe eine (nicht leere) Menge $\mathfrak{X}$ von Gitterpunkten $(x) = (x_1, \ldots, x_p)$ des $\mathfrak{R}^p$ und zwei Zahlenpaare (η', ζ'), (η'', ζ''), derart daß

1) die komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^n$ alle Punkte

$$G(x) = (x_1, \ldots, x_p, \eta', \zeta') \tag{7}$$

enthält, für welche $(x) = (x_1, \ldots, x_p)$ zu $\mathfrak{X}$ gehört,

2) für alle diese (x) aus $\mathfrak{X}$ der Punkt

$$H(x) = (x_1, \ldots, x_p, \eta'', \zeta'') \tag{8}$$

nicht zu $\mathfrak{K}$ gehört,

3) aus $\mathfrak{K}$ eine ebenfalls komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}'$ entsteht, wenn jeder Punkt (7) durch den entsprechenden Punkt (8) ersetzt wird.

Ist all dies erfüllt[21], so heiße der Übergang von $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{K}'$ eine einfache zy-Umlagerung oder eine einfache yz-Umlagerung von $\mathfrak{K}$, je nachdem (4) oder (5) gilt; daß nämlich entweder (4) oder (5) gelten muß, sieht man einfach so: man nimmt irgend einen Punkt $(\xi') = (\xi_1', \ldots, \xi_p')$ aus $\mathfrak{X}$ und betrachtet die zweidimensionale Menge $\mathfrak{K}^2(\xi')$ aller jener Punkte (y, z), für welche $(\xi_1', \ldots, \xi_p', y, z)$ zu $\mathfrak{K}$ gehört[22]; offenbar ist dann $\mathfrak{K}^2(\xi')$ komprimiert und erfährt eine einfache Umlagerung, wenn (η', ζ') durch (η'', ζ'') ersetzt wird; daraus aber folgt nach dem in Nr. **9** Gesagten, daß entweder (4) oder (5) gelten muß[23].

Betrachten wir nun bei unserer einfachen zy-Umlagerung oder yz-Umlagerung die p-dimensionalen Durchschnittsmengen von

[21] Über diese Abgrenzung des Begriffs „einfache Umlagerung" sei noch auf die Bemerkung in Anm. 27, Nr. **13** hingewiesen.

[22] Über Mengen $\mathfrak{K}^q(x')$ siehe Nr. **7**.

[23] Wie für $n = 2$ gilt offenbar auch für $n > 2$, daß der zu einer einfachen zy-Umlagerung inverse Prozeß eine yz-Umlagerung ist.

$\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ mit $y = \eta'$, $z = \zeta'$, und damit die Mengen $\mathfrak{K}^p(\eta', \zeta')$ und $\mathfrak{K}'^p(\eta', \zeta')$ (vgl. Nr. **7**), sowie die analog gebildeten Mengen $\mathfrak{K}^p(\eta'', \zeta'')$, $\mathfrak{K}'^p(\eta'', \zeta'')$, so ist

$$0 \subset \mathfrak{X} \subseteqq \mathfrak{K}^p(\eta', \zeta'), \qquad \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{K}^p(\eta'', \zeta'') = 0,$$
$$\mathfrak{K}'^p(\eta', \zeta') = \mathfrak{K}^p(\eta', \zeta') - \mathfrak{X}, \qquad \mathfrak{K}'^p(\eta'', \zeta'') = \mathfrak{K}^p(\eta'', \zeta'') + \mathfrak{X};$$

daraus ergibt sich die für das Spätere wichtige Feststellung:

(g) Setzt man $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}^p(\eta', \zeta')$ und $\mathfrak{M} = \mathfrak{K}^p(\eta'', \zeta'')$, dann hat bei unserer einfachen Umlagerung die (nicht leere) Menge $\mathfrak{X}$ alle im Hilfssatz von Nr. **5** für eine Menge Ξ ausgesprochenen Eigenschaften β), γ), δ), ε).

Man kann sich davon überzeugen, daß umgekehrt gilt:

(h) Ist $n = p + 2$, $p \geqq 1$, ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^n$ eine komprimierte Gitterpunktmenge und gibt es zwei Wertepaare (η', ζ'), (η'', ζ'') sowie eine nicht-leere p-dimensionale Menge $\mathfrak{X}$,

sodaß $\mathfrak{X}$ – bezüglich der aus $\mathfrak{K}$ gewonnenen Mengen $\mathfrak{K}^p(\eta', \zeta')$, $\mathfrak{K}^p(\eta'', \zeta'')$ – die in (g) genannten Eigenschaften hat,

sodaß ferner für jeden Punkt $(x) = (x_1, \ldots, x_p)$ aus $\mathfrak{X}$ der Ersatz von (η', ζ') durch (η'', ζ'') eine einfache Umlagerung der 2-dimensionalen Menge $\mathfrak{K}^2(x)$ darstellt,

dann liegt eine einfache Umlagerung von $\mathfrak{K}$ vor, wenn für alle (x) aus $\mathfrak{X}$ der Punkt (7) durch (8) ersetzt wird.

Denn offenbar ist für jedes (y, z) (ob es nun gleich (η', ζ') oder (η'', ζ'') ist, oder nicht) die Menge $\mathfrak{K}'^p(y, z)$ komprimiert; ferner ist für jeden Punkt (x) (ob er nun zu $\mathfrak{X}$ gehört, oder nicht) die Menge $\mathfrak{K}'^2(x)$ komprimiert; daraus aber folgt gemäß Satz (e), Nr. **7**, die Komprimiertheit von $\mathfrak{K}'$, auf die es beim Nachweis von (h) ankommt.

11. Es gelten die Sätze

(i) Bei einer einfachen Umlagerung befindet sich unter den Punkten (7), die beim Übergang von $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{K}'$ durch die entsprechenden Punkte (8) ersetzt werden, wenigstens ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}$.

(j) Ein von einer einfachen Umlagerung betroffener Eckpunkt (7) von $\mathfrak{K}$ geht stets in einen Eckpunkt von $\mathfrak{K}'$ über.

Zum Beweis von (i) nehmen wir die für die Umlagerung gemäß Nr. **10** maßgebliche Menge $\mathfrak{X}$. Sei dann (ξ') ein Punkt von $\mathfrak{E}(k(\mathfrak{X}))$ (vgl. [10a]) also gemäß (1), Nr. **4**, selbst ein Punkt von $\mathfrak{X}$. Dann erfährt nach dem in Nr. **10** Gesagten die 2-dimensionale Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}^2(\xi')$ eine einfache Umlagerung, wenn der Punkt (η', ζ') durch (η'', ζ'') ersetzt wird; somit ist (η', ζ') gemäß Nr. **9** ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}^2(\xi')$. Da außerdem (ξ') ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}^p(\eta', \zeta')$ ist[24], so ist der Punkt $(\xi_1', \ldots, \xi_p', \eta', \zeta')$ gemäß Satz (f), Nr. **8**, ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}$, womit Satz (i) bestätigt ist.

Ist $n = 3$, $p = 1$, so ist $k(\mathfrak{X})$ ebenso wie $\mathfrak{X}$ eindimensional, kann also nur einen einzigen Eckpunkt haben, woraus sich – wenn man für $n = 2$ noch Nr. **9** beachtet – der folgende Zusatz zu (i) ergibt:

(k) Ist $n = 2$ oder $= 3$, so wird von einer einfachen Umlagerung einer komprimierten n-dimensionalen Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}$ nur ein einziger Eckpunkt von $\mathfrak{K}$ betroffen.

Zum Beweis von (j) betrachten wir einen von der Umlagerung betroffenen Eckpunkt (7); es sei dies $(\xi_1', \ldots, \xi_p', \eta', \zeta')$. Dann ist $(\xi') = (\xi_1', \ldots, \xi_p')$ nach Satz (f), Nr. **8**, ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}^p(\eta', \zeta') = \mathfrak{K}'^p(\eta', \zeta') + \mathfrak{X} = \mathfrak{K}'^p(\eta', \zeta') \dotplus k(\mathfrak{X})$ (vgl. Anm. 24), somit – weil nicht zu $\mathfrak{K}'^p(\eta', \zeta')$ gehörig, ein Eckpunkt von $k(\mathfrak{X})$ (dies letztere gemäß (3), darin $\mathfrak{K}_1 = k(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}'^p(\eta', \zeta')$ gesetzt). Dann aber ist (ξ') notwendig ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}'^p(\eta'', \zeta'') = \mathfrak{K}^p(\eta'', \zeta'') + \mathfrak{X} = \mathfrak{K}^p(\eta'', \zeta'') \dotplus k(\mathfrak{X})$ (u. zw. gemäß (2), darin $\mathfrak{K}_1 = k(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}^p(\eta'', \zeta'')$ gesetzt). Andrerseits ist (η'', ζ'') Eckpunkt von $\mathfrak{K}'^2(\xi')$ (nach dem in Nr. **9** über eine einfache Umlagerung einer 2-dimensionalen Gitterpunktmenge Gesagten). Beides zusammen ergibt nach Satz (f), daß $(\xi_1', \ldots, \xi_p', \eta'', \zeta'')$ ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}'$ ist, womit (j) bewiesen ist.

---

[24] Daß nämlich keiner der aus $X' = (\xi_1', \ldots, \xi_p')$ gemäß Nr. **4** gebildeten p Punkte $X_1', \ldots, X_p'$ zu $\mathfrak{K}^p(\eta', \zeta') = \mathfrak{K}'^p(\eta', \zeta') + \mathfrak{X} = \mathfrak{K}'^p(\eta', \zeta') \dotplus k(\mathfrak{X}) = \mathfrak{L}$ gehört, ist klar, weil erstens diese Punkte ebensowenig, wie der Punkt X' selbst, zu $\mathfrak{K}'^p(\eta', \zeta')$ gehören und zweitens diese Punkte – da X' Eckpunkt von $k(\mathfrak{X})$ ist – auch nicht zu $k(\mathfrak{X})$ gehören.

Diese Überlegung deckt sich mit derjenigen zum Nachweis der Formel (2) in Nr. **4**, aus der man das obige Resultat erhält, wenn man $\mathfrak{K}_1 = k(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}'^p(\eta', \zeta')$ setzt. Denn wegen $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{X}$ $(= \mathfrak{K}_2 \dotplus \mathfrak{K}_1)$ ist ja $\mathfrak{L} = k(\mathfrak{L}) \supseteq k(\mathfrak{X}) = \mathfrak{K}_1$, also $\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{K}_2$, wegen $\mathfrak{K}_2\mathfrak{X} = \mathfrak{o}$ also $\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{X} = \mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2$ oder $\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{X}$.

12. Gewisse spezielle unter den einfachen Umlagerungen werden wir als „elementare Umbauten" bezeichnen. Wir beginnen mit dem Fall $n = 2$. Wie in N. **9** besprochen, gelten für eine einfache zy-Umlagerung, bei der der Punkt $G = (\eta', \zeta')$ durch den Punkt $H = (\eta'', \zeta'')$ ersetzt wird, die Ungleichungen (4), die wir auch in der Gestalt

$$\zeta'' \leqq \zeta' - 1, \quad \eta'' \geqq \eta' + 1 \tag{9}$$

schreiben können. Die betrachtete Umlagerung heiße nun ein „elementarer zy-Umbau" von $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^2$, wenn in wenigstens einer der beiden Relationen (9) das Gleichheitszeichen gilt[25].

Nimmt man an, eine komprimierte Menge $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^2$ gehe durch eine einfache zy-Umlagerung, bei der $G = (\eta', \zeta')$ durch $H = (\eta'', \zeta'')$ ersetzt wird, in $\mathfrak{K}'$ über; es gebe ferner eine einfache zy-Umlagerung von $\mathfrak{K}'$, bei der H durch $J = (\eta''', \zeta''')$ ersetzt wird und $\mathfrak{K}'$ in $\mathfrak{K}''$ übergeht; dann folgt aus $\zeta' > \zeta'' > \zeta'''$, $\eta' < \eta'' < \eta'''$, daß

$$\zeta''' < \zeta' - 1, \quad \eta''' > \eta' + 1 \tag{10}$$

ist; der Übergang von $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{K}''$ ist also gewiß kein elementarer Umbau. Erst recht gilt dies, wenn der Übergang von $\mathfrak{K}$ zu einer anderen komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{L}$ durch mehr als zwei einfache zy-Umlagerungen hergestellt wird. Es gilt also[26] – und darin liegt die Begründung für die Bezeichnung „elementar" –

(I) Ein elementarer Umbau einer $\mathfrak{K}_m^2$ läßt sich nicht in zwei oder mehr einfache Umlagerungen zerlegen.

13. Nunmehr definieren wir im Falle $n > 2$: Eine einfache zy-Umlagerung U einer $\mathfrak{K}_m^n$ heiße ein elementarer zy-Umbau, wenn außer den in Nr. **10** angegebenen Bedingungen 1), 2), 3) noch die folgenden 4), 5) erfüllt sind:

---

[25] Dabei nennen wir den elementaren Umbau vom Typus I bzw. III, wenn nur in der ersten bzw. nur in der zweiten Relation (9) das Gleichheitszeichen gilt; vom Typus II, wenn es beidemal gilt. Vgl. Note II, l. c. [2], Nr. **25**.

[26] Siehe hiezu auch Monatshefte **49**, l. c. [1]. Die Tatsache, daß jede einfache Umlagerung einer $\mathfrak{K}_m^2$ sich durch eine endliche Anzahl aufeinanderfolgender elementarer Umbauten ersetzen läßt, kommt im Folgenden nicht weiter zur Geltung (vgl. hiezu übrigens Anm. 29, Nr. **15**).

4) In wenigstens einer von den beiden mit (4) gleichwertigen Relationen (9) gilt das Gleichheitszeichen; anders gesagt: betrachtet man für irgend einen zu $\mathfrak{X}$ gehörigen Punkt $(x') = (x'_1, \ldots, x'_p)$ die (gemäß Nr. **7**) zugehörige 2-dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}^2(x')$, so ist die einfache zy-Umlagerung von $\mathfrak{K}^2(x')$, bei der $G = (\eta', \zeta')$ durch $H = (\eta'', \zeta'')$ ersetzt wird, ein elementarer Umbau im Sinne von Nr. **12**.

5) Es gibt keine nicht-leere echte Teilmenge $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{X}$ (also $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{x} \subset \mathfrak{X}$), sodaß man aus $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^n_m$ eine komprimierte Gitterpunktmenge erhielte, wenn man für jeden Punkt $(x) = (x_1, \ldots, x_p)$ aus $\mathfrak{x}$ den Punkt (7) durch den Punkt (8) ersetzt; anders gesagt: es gibt keine einfache zy-Umlagerung von $\mathfrak{K}$, die darin besteht, daß von den beim Umbau **U** stattfindenden Verlagerungen nur ein Teil ausgeführt wird[27].

Vertauscht man in unseren. Definitionen des elementaren zy-Umbaues für $n = 2$ und $n > 2$ die Rolle der Koordinaten y und z, so erhält man die Definition des elementaren yz-Umbaues. Dann gilt offenbar für $n \geqq 2$:

(m) Der zu einem elementaren zy-Umbau einer $\mathfrak{K}^n_m$ inverse Prozeß ist ein elementarer yz-Umbau und umgekehrt[28].

---

[27] Über das Verhältnis der Begriffe „einfache Umlagerung" und „elementarer Umbau" sei Folgendes bemerkt. Durch den Gegenstand selbst bedingt ist der Begriff des elementaren Umbaues. Für seine Erklärung bequem erwies sich als Vorstufe der allgemeinere Begriff der einfachen Umlagerung. Man konnte sich fragen, ob etwa in die Definition der einfachen Umlagerung die Forderung 5) mit aufzunehmen wäre, wobei dann die elementaren Umbauten nur durch Forderung 4) unter den einfachen Umlagerungen ausgezeichnet wären. Es erschien aber einfacher, 5) erst für die elementaren Umbauten zu fordern. Da, wie gesagt, die einfachen Umlagerungen nur als Zwischenstadium für die Definition der elementaren Umbauten auftreten, so ist die Frage für das Folgende belanglos und nicht behandelt, ob jede einfache zy-Umlagerung – wie dies für $n = 2$ der Fall ist – soferne nicht selbst ein elementarer zy-Umbau, sich durch eine Kette elementarer zy-Umbauten herstellen läßt und somit einen zy-Umbau im Sinne von Nr. **15** darstellt (wegen $n = 2$ vgl. Anm. 29).

[28] Von den beiden inversen Prozessen ist der eine vom Typus I bzw. II bzw. III (vgl. Anm. 25), wenn der andere vom Typus III bzw. II bzw. I ist. Dabei wird für $n > 2$ der Typus bestimmt durch den Typus des in Bedingung 4) auftretenden elementaren Umbaues der 2-dimensionalen Mengen $\mathfrak{K}^2(x')$.

14. Zur Rechtfertigung der Benennung „elementarer“ Umbau beweisen wir für $n > 2$ den zu (l) analogen Satz:

(n) Ein elementarer zy-Umbau einer $\mathfrak{K}_m^n$ läßt sich nicht in zwei oder mehr einfache zy-Umlagerungen zerlegen.

Es genüge, um dies einzusehen, die Zusammensetzung von zwei einfachen zy-Umlagerungen zu betrachten. Soll das Ergebnis wieder eine einfache Umlagerung sein, so sind nur die beiden Fälle möglich:

a) sämtliche Punkte (8), die bei der ersten Umlagerung als Ersatz für die Punkte (7) aufgetreten sind, werden entfernt und ihrerseits ersetzt durch Punkte

$$J(x) = (x_1, \ldots, x_p, \eta''', \zeta'''), \tag{11}$$

wobei dann aber notwendig (10) gelten muß, sodaß der Ersatz der Punkte (7) durch die Punkte (11) – wegen Nichterfülltsein der Forderung 4) von Nr. **13** – gewiß kein elementarer zy-Umbau ist.

b) wenn bei der ersten einfachen Umlagerung für alle zu einer ersten Menge $\mathfrak{X}$ gehörenden Punkte $(x) = (x_1, \ldots, x_p)$ die Punkte (7) durch (8) ersetzt werden, dann werden bei der zweiten einfachen Umlagerung für genau dieselben Werte $\eta', \zeta', \eta'', \zeta''$ wiederum Punkte (7) durch die entsprechenden Punkte (8) ersetzt, jedoch nunmehr für alle (x) aus einer zu $\mathfrak{X}$ punktfremden Menge $\mathfrak{X}_1$. Das Ergebnis der beiden Umlagerungen ist dann der Ersatz der Punkte (7) durch (8) für alle (x) aus $\mathfrak{X} + \mathfrak{X}_1$, was – wegen Nichterfülltsein der Forderung 5) – wieder kein elementarer zy-Umbau ist.

15. Anschließend an die Definition des elementaren zy-Umbaues werde allgemein der Begriff des „zy-Umbaues“ einer komprimierten n-dimensionalen Gitterpunktmenge $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^n$ erklärt, u. zw. als der Übergang von $\mathfrak{K}$ zu einer Menge $\mathfrak{L}$, die aus $\mathfrak{K}$ durch eine endliche ein- oder mehrgliedrige Folge elementarer zy-Umbauten gewonnen werden kann[29].

[29] Es ist bekannt (vgl. Note III, diese Sitz.ber., 1940, S. 137, Nr. 6, und den allgemeineren Satz (g) in Monatshefte f. Math. u. Physik, **49** (1940),

Der analog durch eine Folge elementarer yz-Umbauten erklärte Begriff des „yz-Umbaues" stellt den zum zy-Umbau inversen Prozeß dar (vgl. hiezu (m)).

§ 4. Beweis eines Existenzsatzes in einem Sonderfall.

16. Der Hauptsatz über den Umbau komprimierter n-dimensionaler Gitterpunktmengen (vgl. Nr. **26**, Satz 2) beruht auf folgendem Existenzsatz:

Satz 1. Sei $n = p + 2$. Die im $(x_1 \ldots x_p y z)$-Raum gelegene endliche komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^n$ gehöre nicht ganz der Ebene $z = 1$ an. Dann gibt es wenigstens einen an $\mathfrak{K}$ ausführbaren elementaren zy-Umbau[30].

Wie wir in § 5 sehen werden, ist der allgemeine Beweis von Satz 1 sehr einfach durch vollständige Induktion zu führen, sobald der Satz für den Sonderfall bewiesen ist, daß alle nicht der Ebene $z = 1$ angehörenden Punkte von $\mathfrak{K}$ in der Ebene $y = 1$ liegen. Wir wollen daher zunächst (Nr. **17**) den folgenden Satz beweisen, der für den betrachteten Sonderfall zugleich eine zusätzliche Behauptung in sich schließt:

(p) Wenn von der Menge $\mathfrak{K}$ des Satzes 1 alle nicht in $z = 1$ gelegenen Punkte in der Ebene $y = 1$ liegen und wenn Z $(\geqq 2)$ den größten Wert der z-Koordinate eines Punktes von $\mathfrak{K}$ bedeutet, dann gibt es wenigstens einen an $\mathfrak{K}$ ausführbaren elementaren zy-Umbau der-

S. 13), daß für $n = 2$ eine einfache zy-Umlagerung sich durch endlich viele elementare zy-Umbauten ersetzen läßt, also der obigen Definition gemäß selbst ein zy-Umbau ist. Daher konnte bei $n = 2$ ohneweiteres statt „einfache Umlagerung" auch „einfacher Umbau" gesagt werden (vgl. auch Anm. 27, Nr. **13**).

[30] Die zunächst dem Falle $n \geqq 3$ angepaßte Bezeichnung „Ebene $z = 1$" ist im Falle $n = 2$ durch „Gerade $z = 1$" zu ersetzen. Übrigens ergeben sich in diesem Falle beim Beweis starke Vereinfachungen (vgl. Anm. 32). Der Inhalt unseres Satzes ist dabei im Falle $n = 2$, ebenso wie für $n = 3$, nicht neu (vgl. § 1 sowie im besonderen Monatshefte **49**, l. c. [1], Nr. **35** – wo allerdings von Zahlensystemen statt von 2-dimensionalen Gitterpunktmengen gesprochen wird – und Note II, l. c. [2], Nr. **36**, S. 106, Satz 17).

art, daß die davon betroffenen Punkte der Ebene $z = Z$ angehören[31].

17. Zum Beweis von (p) betrachten wir die Gesamtheit aller in $z = Z$ (und dann zugleich in $y = 1$) liegenden Punkte von $\mathfrak{K}$; diese Gesamtheit liefert uns eine p-dimensionale[32] komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}^p(1, Z)$ des $(x_1 \ldots x_p)$-Raumes (vgl. Nr. **7**), die wir auch mit $\mathfrak{K}^p(\eta', \zeta') = \mathfrak{L}$ bezeichnen werden, wobei $\eta' = 1$, $\zeta' = Z$ gesetzt sei.

Weiters betrachten wir, wenn $Y (\geqq 1)$ den größten Wert der y-Koordinate eines Punktes von $\mathfrak{K}$ bedeutet, die p-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{M}_y = \mathfrak{K}^p(y, 1)$ für $1 \leqq y \leqq Y + 1$. Wir unterscheiden dann die Fälle:

$$\text{I) } Z \geqq 3 \quad \text{und} \quad \text{II) } Z = 2;$$

im Falle I) unterscheiden wir noch, ob $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{L}\mathfrak{M}_2$ (Fall I, 1) oder ob $\mathfrak{L} \doteq \mathfrak{L}\mathfrak{M}_2$ ist (Fall I, 2). In allen Fällen werden wir die Bezeichnungen $G(x)$ und $H(x)$ für die Punkte

$$G(x) = (x_1, \ldots, x_p, \eta', \zeta'), \tag{12}$$

$$H(x) = (x_1, \ldots, x_p, \eta'', \zeta'') \tag{13}$$

verwenden, wobei η', ζ' wie oben erklärt sei, während η'', ζ'' noch in jedem der Fälle besonders zu erklären sein wird.

---

[31] Liegt nicht der betrachtete Sonderfall vor, dann gibt es nicht immer einen elementaren zy-Umbau, von dem ein Punkt mit $z = Z$ betroffen wird. Das sieht man z. B. schon im Falle $n = 2$ bei der aus den Punkten $(1, z)$ mit $1 \leqq z \leqq 4$ und $(2, z)$ mit $1 \leqq z \leqq 3$ bestehenden Menge $\mathfrak{K}^2_7$. (Vgl. hiezu das in Note II, l. c. [2], S. 90, Nr. **21**, letzter Absatz, Gesagte).

[32] Im Falle $n = 2$, $p = 0$ besteht $\mathfrak{L}$, desgl. für $y < Y + 1$ jede Menge $\mathfrak{M}_y$ aus einem einzigen Punkt (des null-dimensionalen Raumes), während $\mathfrak{M}_y$ für $y = Y + 1$ leer ($= \mathfrak{o}$) ist. Die im Folgenden gegebene Fallunterscheidung I 1) und I 2) besagt einfach, daß der Punkt $(y, z) = (2, 1)$ das einemal nicht zu $\mathfrak{K}$ gehört, das anderemal zu $\mathfrak{K}$ gehört; im Falle II) ist $h = Y$. Anstelle von (12), (13) treten einfach die Punkte (η', ζ'), (η'', ζ'') und der elementare zy-Umbau besteht einfach darin, daß der Punkt $(\eta', \zeta') = (1, Z)$ ersetzt wird durch den Punkt (η'', ζ''), d. h. durch $(2, 1)$ bzw. $(2, 2)$ bzw. $(Y + 1, 1)$, jenachdem Fall I 1) bzw. I 2) bzw. II) vorliegt.

Da hiermit der Fall $n = 2$ erledigt ist, können wir im Text weiterhin den Fall $n > 2$ vor Augen haben.

Im Falle I, 1) sei $(\xi') = (\xi'_1, \ldots, \xi'_p)$ ein Punkt von $\mathfrak{L}$, der nicht zu $\mathfrak{M}_2$ gehört. Wir bilden, dem Hilfssatz in Nr. **5** gemäß, die Menge $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\xi'; \mathfrak{L}, \mathfrak{M}_2)$ und gewinnen aus $\mathfrak{K}$ eine Menge $\mathfrak{K}'$, indem wir $\eta'' = 2$, $\zeta'' = 1$ setzen und für jeden Punkt (x) aus $\mathfrak{X}$ den Punkt $G(x)$ durch $H(x)$ ersetzen. Der Übergang von $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{K}'$ erweist sich offenbar als ein elementarer zy-Umbau[33] von $\mathfrak{K}$, – der zugleich wegen $\zeta' = Z$ der Nebenbedingung des Satzes (p) genügt, – sobald nachgewiesen ist, daß $\mathfrak{K}'$ komprimiert ist. Hiezu ist gemäß Nr. **8** nur zu zeigen, daß die für die Wertepaare (y, z) gebildeten Mengen $\mathfrak{K}'^p(y, z)$ der Beziehung

$$\mathfrak{K}'^p(y, z) \supseteqq \mathfrak{K}'^p(y^0, z^0) \text{ für } y \leqq y^0,\ z \leqq z^0 \tag{14}$$

genügen. Beachtet man nun, daß für alle Wertepaare (y, z), die von (η', ζ') oder (η'', ζ'') verschieden sind, $\mathfrak{K}'^p(y, z) = \mathfrak{K}^p(y, z)$ ist; beachtet man ferner, daß für alle Wertepaare $(y, z) \neq (\eta', \zeta')$ mit $\eta' \leqq y$, $\zeta' \leqq z$ durchwegs $\mathfrak{K}'^p(y, z) = \mathfrak{K}^p(y, z) = \mathfrak{o}$ ist; beachtet man schließlich, daß (η'', ζ'') das einzige Wertepaar (y, z) ist, für welches $\mathfrak{K}'^p(y, z) \supset \mathfrak{K}^p(y, z)$ ist, so bleibt für den Nachweis von (14) nur übrig, die eine Beziehung

$$\mathfrak{K}'^p(\eta'' - 1, \zeta'') \supseteqq \mathfrak{K}'^p(\eta'', \zeta'') \tag{15}$$

oder $\mathfrak{K}'^p(1, 1) \supseteqq \mathfrak{K}'^p(2, 1)$ festzustellen; diese Beziehung ist aber eine unmittelbare Folge der Beziehungen $\mathfrak{K}'^p(1, 1) = \mathfrak{K}^p(1, 1)$, $\mathfrak{K}'^p(2, 1) = \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{X}$, $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{K}^p(2, 1) \subseteqq \mathfrak{K}^p(1, 1)$, $\mathfrak{X} \subseteqq \mathfrak{L} = \mathfrak{K}^p(1, Z) \subseteqq \mathfrak{K}^p(1, 1)$. Es ist also $\mathfrak{K}'$ komprimiert und Satz (p) im Falle I 1) bewiesen.

Im Falle I 2), wo $\mathfrak{L} \subseteqq \mathfrak{M}_2$ ist, setzen wir $\eta'' = 2$, $\zeta'' = 2$, wobei $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{K}^p(\eta'', \zeta'')$ offenbar $= \mathfrak{o}$ und daher – unter (ξ') einen beliebigen Punkt von $\mathfrak{L}$ verstanden – $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\xi'; \mathfrak{L}, \mathfrak{M}^*) = \mathfrak{L}$ ist (vgl. Nr. **5**, Anm. 13). Ersetzen wir dann für jedes (x) aus $\mathfrak{X} = \mathfrak{L}$ den Punkt $G(x)$ durch $H(x)$, so erweist sich dies als ein dem Satz (p) genügender elementarer zy-Umbau[34] von $\mathfrak{K}$, sobald für die entstehende Menge $\mathfrak{K}'$ die Komprimiertheit, d. h. das Be-

---

[33] Dieser elementare Umbau ist wegen $\zeta' - \zeta'' = Z - 1 > 1$ vom Typus III.

[34] Dieser elementare Umbau ist vom Typus III oder II, je nachdem $Z > 3$ oder $Z = 3$ ist.

stehen der Beziehungen (14) nachgewiesen ist. Die entsprechenden Überlegungen wie im Fall I 1) ergeben, daß hiezu nur die Feststellung der Beziehungen

$$\mathfrak{K}'^p(\eta''-1,\zeta'') \supseteqq \mathfrak{K}'^p(\eta'',\zeta''), \quad \mathfrak{K}'^p(\eta'',\zeta''-1) \supseteqq \mathfrak{K}'^p(\eta'',\zeta'')$$

oder

$$\mathfrak{K}'^p(1, 2 \supseteqq \mathfrak{K}'^p(2, 2), \qquad \mathfrak{K}'^p(2, 1 \supseteqq \mathfrak{K}'^p(2, 2)$$

nötig ist. Diese aber ergeben sich unmittelbar aus $\mathfrak{K}'^p(1, 2) = \mathfrak{K}^p(1, 2)$, $\mathfrak{K}'^p(2, 1) = \mathfrak{K}^p(2, 1) = \mathfrak{M}_2 \supseteqq \mathfrak{L}$ und $\mathfrak{K}'^p(2, 2) = \mathfrak{M}^* + \mathfrak{X} = \mathfrak{L} = \mathfrak{K}^p(1, Z) \subseteqq \mathfrak{K}^p(1, 2)$. Es ist also Satz (p) auch im Falle I 2) nachgewiesen.

Im Falle II) werde mit $\mathfrak{M}_{h+1}$ die erste der Mengen $\mathfrak{M}_y$ ($y = 1, 2, \ldots, Y+1$) bezeichnet, sodaß $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{L}\mathfrak{M}_y$ ist, also $\mathfrak{L}$ solche Punkte enthält, die nicht zu $\mathfrak{M}_y$ gehören. Wegen $\mathfrak{L} \subseteqq \mathfrak{K}^p(1, 1) = \mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_{Y+1} = \mathfrak{K}^p(Y+1, 1) = 0$ ist $1 \leqq h \leqq Y$. Wir wählen für (ξ') einen Punkt aus $\mathfrak{L}$, der nicht zu $\mathfrak{M}_{h+1}$ gehört, setzen $\eta'' = h+1, \zeta'' = 1$, bilden die Menge $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\xi'; \mathfrak{L}, \mathfrak{M}_{h+1})$; indem wir nun für jedes (x) aus $\mathfrak{X}$ den Punkt $G(x)$ durch $H(x)$ ersetzen, gewinnen wir aus $\mathfrak{K}$ eine neue Menge $\mathfrak{K}'$, deren Komprimiertheit mit dem Nachweis der Beziehungen (14) festgestellt ist. Durch entsprechende Überlegungen wie in den früheren Fällen sieht man, daß es dabei nur auf den Nachweis von (15), d. h. von $\mathfrak{K}'^p(h, 1) \supseteqq \mathfrak{K}'^p(h+1, 1)$ ankommt; diese Beziehung ist aber aus $\mathfrak{K}'^p(h, 1) = \mathfrak{K}^p(h, 1) = \mathfrak{M}_h$, $\mathfrak{K}'^p(h+1, 1) = \mathfrak{K}^p(h+1, 1) + \mathfrak{X} = \mathfrak{M}_{h+1} + \mathfrak{X}$, $\mathfrak{M}_{h+1} \subseteqq \mathfrak{M}_h$, $\mathfrak{X} \subseteqq \mathfrak{L} \subseteqq \mathfrak{M}_h$ unmittelbar ersichtlich. Sonach stellt der Übergang von $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{K}'$ einen dem Satz (p) genügenden elementaren *zy*-Umbau von $\mathfrak{K}$ dar[35].

Satz (p) ist damit in allen Fällen bewiesen.

§ 5. Allgemeiner Beweis des Existenzsatzes.

18. Wir kommen zum allgemeinen Beweis des Existenzsatzes (Satz 1 in Nr. **16**). Der Grad m von $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^n_m$ muß $\geqq 2$ sein, da

[35] Dieser elementare Umbau ist vom Typus I oder II, je nachdem $h > 1$ oder $h = 1$ ist.

für $m = 1$ der einzige Gitterpunkt von $\mathfrak{K}$ der Punkt $x_1 = \ldots = = x_p = y = z = 1$ ist, sodaß $\mathfrak{K}$ keinen Punkt außerhalb $z = 1$ aufweist, somit den Voraussetzungen von Satz 1 nicht entspricht. Ist nun $m = 2$ und enthält $\mathfrak{K}$ einen Punkt mit $z > 1$, so kann dies nur der Punkt $x_1 = \ldots = x_p = y = 1$, $z = 2$ sein, der zusammen mit dem vorgenannten Punkt die komprimierte Menge $\mathfrak{K}_2^n$ ausmacht. Für diese Menge $\mathfrak{K}_2^n$ liegt der in Nr. **16** besprochene Sonderfall vor, für welchen Satz (p) und somit Satz 1 bereits als gültig nachgewiesen ist. Beim allgemeinen Beweis des Satzes 1 können wir daher voraussetzen, es sei $m > 2$ und für $\mathfrak{K}_m^n$ liege nicht der Sonderfall vor, und wir können die Annahme machen, für alle $\mathfrak{K}_l^n$ von einem Grad $l < m$ sei Satz 1 gültig.

Um dann durch vollständige Induktion die Gültigkeit von Satz 1 für $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^n$ zu beweisen, betrachten wir die Menge aller dem Bereich $y > 1$ angehörenden Punkte von $\mathfrak{K}$ und unterwerfen sie der Parallelverschiebung

$$y_1 = y - 1. \tag{16}$$

Die so entstehende Menge $\mathfrak{K}_l^n$ ist natürlich komprimiert; und da nach Voraussetzung für $\mathfrak{K}_m^n$ nicht der Sonderfall vorliegt, so ist $\mathfrak{K}_l^n$ nicht leer und liegt auch nicht ganz in der Ebene $z = 1$. Gemäß unserer Annahme gibt es dann wegen $l < m$ einen elementaren zy-Umbau U_1 von $\mathfrak{K}_l^n$, bei dem gewisse Punkte $G_1(x) = = (x_1, \ldots, x_p, \eta_1', \zeta')$ durch Punkte $H_1(x) = (x_1, \ldots, x_p, \eta_1'', \zeta'')$ ersetzt werden. Bezeichnen wir nun mit $G(x)$ bzw. $H(x)$ jene Punkte, die aus $G_1(x)$ bzw. $H_1(x)$ durch die zu (16) inverse Transformation $y = y_1 + 1$ hervorgehen, so ist der Ersatz der zu $\mathfrak{K}$ gehörenden Punkte $G(x)$ durch die Punkte $H(x)$ offenbar ein elementarer zy-Umbau von $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^n$, womit Satz 1 allgemein bewiesen ist.

§ 6. Beispiele elementarer Umbauten mehrdimensionaler komprimierter Gitterpunktmengen.

19. Sei $n = p + 2$, $p \geqq 1$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_q^p$ eine beliebige komprimierte Gitterpunktmenge vom Grad $q \geqq 1$ im $(x_1 \ldots x_p)$-Raum. Die – offenbar komprimierte – Menge $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^n$ des $(x_1 \ldots x_p y z)$-Raumes (mit $m = 2q$) umfasse alle Punkte

$(x_1, \ldots, x_p, 1, z)$, für welche $(x) = (x_1, \ldots, x_p)$ ein Punkt von $\mathfrak{Q}$ und z gleich 1 oder 2 ist. Man erkennt an Hand der Entwicklungen in § 4 leicht, daß nur ein einziger elementarer zy-Umbau von $\mathfrak{K}$ existiert, der darin besteht, daß für jedes (x) aus $\mathfrak{Q}$ der Punkt $(x_1, \ldots, x_p, 1, 2)$ durch den Punkt $(x_1, \ldots, x_p, 2, 1)$ ersetzt wird[36]. Die so entstehende Menge $\mathfrak{K}'$ liegt ganz in $z = 1$, gestattet also keinen weiteren zy-Umbau[37].

20. Sei $p = 2$, $n = 4$, ferner $\mathfrak{Q}$ die Menge der 3 Punkte in der $(x_1 x_2)$-Ebene mit den Koordinaten $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$; dann sei $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_6^4$ die Menge der 6 Punkte $(x_1, x_2, 1, z)$, für welche $z = 1$ oder 2 und (x_1, x_2) ein Punkt aus $\mathfrak{Q}$ ist. Es wird also $\mathfrak{K}$ durch Fig. 1 wiedergegeben, wenn der dreidimensionale Raum der

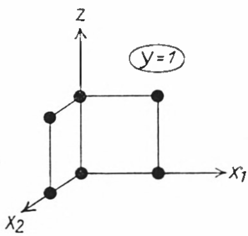

Fig. 1.

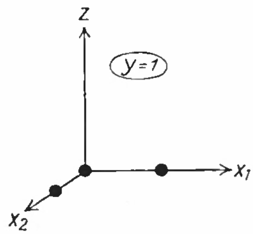

Fig. 2.

Figur den Teilraum $y = 1$ des vierdimensionalen $(x_1 x_2 y z)$-Raumes darstellt[38]. Ersichtlich liegt hier ein spezieller Fall des allgemeinen Beispiels von Nr. **19** vor; und man erkennt wie dort, daß nur ein einziger elementarer zy-Umbau von $\mathfrak{K}$ möglich ist, wobei die entstehende Menge $\mathfrak{K}'$ sowohl die in Fig. 2 dargestellten 3 Punkte des Teilraumes $y = 1$ enthält, als auch 3 weitere Punkte, die durch dasselbe Bild im Teilraum $y = 2$ dargestellt

[36] Für diesen Umbau liegt Fall II) von Nr. **17** vor und es ist dabei $h = 1$, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{L} = \mathfrak{Q}$, $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{L}$.

[37] $\mathfrak{K}$ hat offenbar (in $z = 2$) soviele Eckpunkte, als es Eckpunkte von $\mathfrak{Q}$ gibt. Da deren Anzahl für $p \geqq 2$ keiner Beschränkung unterliegt, so kann für $n \geqq 4$ die Anzahl der von einem elementaren Umbau betroffenen Eckpunkte beliebig groß sein.

[38] Die eingezeichneten Halbgeraden sind nicht die Halbachsen durch den Nullpunkt $(x_1, x_2, z) = (0, 0, 0)$, sondern die zu ihnen parallelen Halbgeraden durch den Punkt $(1, 1, 1)$. Dasselbe gilt für die Figuren 2, 3a, 3b und 6 bis 21.

werden können[39]. Die Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}$ hat zwei Eckpunkte $(2, 1, 1, 2)$ und $(1, 2, 1, 2)$, die alle beide von unserem elementaren Umbau betroffen werden[40].

21. Sei $p = 2$, $n = 4$; sei in der $(x_1 x_2)$-Ebene $\mathfrak{Q}_1$ die Menge der 10 Gitterpunkte mit $x_1 + x_2 \leqq 5$, $\mathfrak{Q}_2$ die Menge der 4 Gitterpunkte mit $x_1 \leqq 2$, $x_2 \leqq 2$ (natürlich allemal mit positiven Koordinaten). Sei $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^4_{28}$ die Menge der 28 Punkte des $(x_1 x_2 y z)$-Raumes, für welche $z = 1$ oder $= 2$ und (x_1, x_2) irgend ein Punkt von $\mathfrak{Q}_1$ bzw. von $\mathfrak{Q}_2$ ist, je nachdem $y = 1$ oder $= 2$ ist. Diese

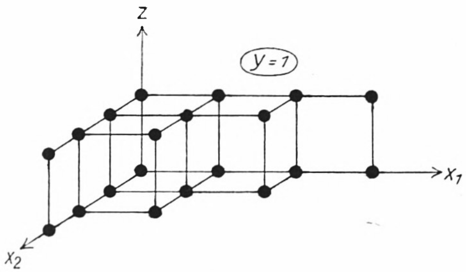

Fig. 3a.

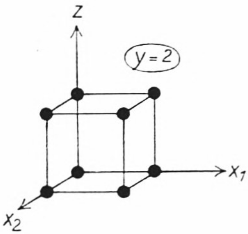

Fig. 3b.

Menge $\mathfrak{K}$ wird durch die Figuren 3a und 3b dargestellt, die eine die Punkte des Teilraumes $y = 1$ enthaltend, die andere die Punkte des Teilraumes $y = 2$.

Wir führen noch die Bezeichnung $\mathfrak{N}_1$ ein für die Menge der 3 Gitterpunkte (x_1, x_2) mit $x_1 + x_2 \leqq 5$, $x_1 \geqq 3$ und $\mathfrak{N}_2$ für die Menge der 3 Punkte mit $x_1 + x_2 \leqq 5$, $x_2 \geqq 3$; dann ist $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2$. Wir werden die aus $\mathfrak{K}$ gemäß Nr. **7** zu einem Wertepaar (x_1, x_2) bzw. (y, z) gehörigen Mengen $\mathfrak{K}^q(x_1, x_2)$ bzw. $\mathfrak{K}^p(y, z)$ zu bilden haben. Nun hat in unserem Falle sowohl p als $n - p = q$ den Wert 2. Um bei speziellen für (x_1, x_2) bzw. (y, z) eingesetzten Zahlenwerten zu wissen, ob $\mathfrak{K}^2(x_1, x_2)$ oder $\mathfrak{K}^2(y, z)$ gemeint ist, werden wir für die oberen Indizes q und p nicht ihren Wert 2 einsetzen, sondern die Buchstabenbezeichnung q bzw. p beibehalten.

---

[39] Man könnte offenbar zur Veranschaulichung von $\mathfrak{K}'$ wieder die Figur 1 verwenden, wenn man darin die Buchstaben y und z vertauscht.

[40] Vgl. die Bemerkungen in Nr. **1** und **2** über den Begriff des elementaren Umbaues bei $n > 3$.

Um nun die Gesamtheit aller an $\mathfrak{K}$ ausführbaren elementaren zy-Umbauten aufzustellen, halten wir uns den Satz (h) von Nr. **10** über einfache Umlagerungen sowie die in Nr. **13** gegebene Kennzeichnung eines elementaren zy-Umbaues vor Augen; darnach muß ein zu einem solchen zy-Umbau von $\mathfrak{K}$ gehöriges Paar von Wertepaaren (η', ζ'), (η'', ζ'') notwendig bei einem elementaren zy-Umbau einer 2-dimensionalen Menge $\mathfrak{K}^q(x_1, x_2) = \mathfrak{K}^2(x_1, x_2)$ auftreten. Wir werden daher zunächst für die verschiedenen (x_1, x_2) und die zugehörigen Mengen $\mathfrak{K}^q(x_1, x_2)$ die möglichen elementaren zy-Umbauten aufsuchen; nachher wird für jedes der zugehörigen Paare von Wertepaaren (η', ζ'), (η'', ζ'') gemäß Satz (h) und Nr. **13** zu prüfen sein, ob es einen zugehörigen elementaren zy-Umbau unserer vierdimensionalen Menge $\mathfrak{K}$ gibt.

Beginnen wir zunächst mit denjenigen Punkten der $(x_1 x_2)$-Ebene, die zu $\mathfrak{Q}_2$ gehören. Die zu einem solchen Punkt (x_1, x_2) gehörige Punktmenge $\mathfrak{K}^q(x_1, x_2)$ umfaßt, wie aus der Definition von $\mathfrak{K}$ und aus den Figuren 3a, b ersichtlich ist, alle 4 Gitter-

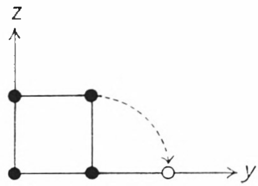

Fig. 4

punkte der (yz)-Ebene mit $y \leqq 2$, $z \leqq 2$, wird also durch Fig. 4 dargestellt[41]. Diese 2-dimensionale Menge $\mathfrak{K}^q(x_1, x_2)$ gestattet nur einen einzigen elementaren zy-Umbau, nämlich denjenigen, bei welchem $(\eta', \zeta') = (2, 2)$ übergeht $(\eta'', \zeta'') = (3, 1)$. Um gemäß (h) zu sehen, ob für diese Werte eine einfache zy-Umlagerung von $\mathfrak{K}$ möglich ist, bilden wir die Mengen $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}^p(\eta', \zeta') = \mathfrak{K}^p(2, 2)$ und $\mathfrak{M} = \mathfrak{K}^p(\eta'', \zeta'') = \mathfrak{K}^p(3, 1)$. Es ergibt sich $\mathfrak{L} = \mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{o}$ (leer). Die gemäß (h) für die Umlagerung maßgebliche

[41] Die eingezeichneten Halbgeraden bedeuten die zu den positiven Halbachsen des Koordinatensystems parallelen Halbgeraden durch den Punkt (1, 1) und das Gleiche gilt für Fig. 5 (vgl. Anm. 38). Die Punkte von $\mathfrak{K}^q(x_1, x_2)$ sind in beiden Figuren durch ● gekennzeichnet, der Punkt (η'', ζ'') durch ○.

Menge $\mathfrak{X}$ muß nun eine nicht-leere, zu $\mathfrak{M}$ fremde Teilmenge von $\mathfrak{L}$ sein, sodaß $\mathfrak{L} - \mathfrak{X}$ und $\mathfrak{M} + \mathfrak{X}$ komprimiert sind; das ist aber nur so möglich, daß $\mathfrak{X} = \mathfrak{Q}_2$ genommen wird; es ist also für jeden Punkt (ξ) von $\mathfrak{Q}_2$ die gemäß Nr. **5** gebildete Menge $\mathfrak{X}(\xi; \mathfrak{L}, \mathfrak{M}) = \mathfrak{L} = \mathfrak{Q}_2$. Damit haben wir:

(q) Ein elementarer *zy*-Umbau unserer Menge $\mathfrak{K}$ liegt vor, wenn für jeden Punkt (x_1, x_2) aus $\mathfrak{Q}_2$ der Punkt $(x_1, x_2, 2, 2)$ durch $(x_1, x_2, 3, 1)$ ersetzt wird. Die so entstehende komprimierte 4-dimensionale Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}'$, die im Hinblick auf spätere Betrachtungen mit $\mathfrak{K}_9$ bezeichnet werde[42], enthält im Teilraum $y = 1$ die in Fig. 10 dargestellten 20 Punkte des $(x_1 x_2 z)$-Raumes; in jedem der Teilräume $y = 2$ und $y = 3$ aber diejenigen 4 Punkte (x_1, x_2, z), die in Fig. 21 dargestellt sind. –

Wir kommen zu jenen Punkten (x_1, x_2), die zu $\mathfrak{Q}_1 - \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2$ gehören. Die zu einem solchen Punkt gehörige 2-dimen-

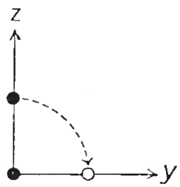

Fig. 5

sionale Menge $\mathfrak{K}^q(x_1, x_2)$ umfaßt nur die 2 in Fig. 5 dargestellten, durch ● markierten Punkte $(1, 1)$, $(1, 2)$ der (yz)-Ebene, gestattet also nur den einen elementaren *zy*-Umbau, bei welchem $(\eta', \zeta') = (1, 2)$ übergeht in $(\eta'', \zeta'') = (2, 1)$. Wir bilden wieder die Mengen $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}^p(\eta', \zeta') = \mathfrak{K}^p(1, 2)$ und $\mathfrak{M} = \mathfrak{K}^p(\eta'', \zeta'') = = \mathfrak{K}^p(2, 1)$ und erhalten $\mathfrak{L} = \mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{Q}_2$. Eine nicht-leere, zu $\mathfrak{M}$ punktfremde Menge $\Xi \subseteq \mathfrak{L}$, für welche $\mathfrak{L} - \Xi$ und $\mathfrak{M} + \Xi$ komprimiert ausfallen, kann nun nur eine der Mengen $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ oder $\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2$ sein. Indem wir Ξ gleich einer dieser Mengen wählen und für jeden Punkt (x_1, x_2) aus Ξ den Punkt $(x_1, x_2, 1, 2)$ durch $(x_1, x_2, 2, 1)$ ersetzen, erhalten wir eine einfache *zy*-Umlagerung von $\mathfrak{K}$, die überdies der Forderung 4) von Nr. **13** genügt.

[42] Vgl. Nr. **28**.

Die Forderung 5) aber wird für $\Xi = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2$ nicht erfüllt[43]. Sonach sind nur zwei von den drei betrachteten Umlagerungen auch elementare zy-Umbauten und wir erhalten:

(r) Ein elementarer zy-Umbau unserer Menge $\mathfrak{K}$ liegt vor, wenn für jeden Punkt (x_1, x_2) aus $\mathfrak{N}_1$ oder aber für jeden Punkt aus $\mathfrak{N}_2$ der Punkt $(x_1, x_2, 1, 2)$ durch $(x_1, x_2, 2, 1)$ ersetzt wird. Die so entstehende 4-dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}'$ werde im einen Fall mit $\mathfrak{K}_7$, im andern Fall mit $\mathfrak{K}_8$ bezeichnet. Die Menge $\mathfrak{K}_7$ enthält im Teilraum $y = 1$ die durch Fig. 12, im Teilraum $y = 2$ die durch Fig. 16 dargestellten Punkte (x_1, x_2, z); die Menge $\mathfrak{K}_8$ enthält in $y = 1$ die Punkte (x_1, x_2, z) der Fig. 13 und in $y = 2$ jene der Fig. 15.

Unsere (bei späterer Gelegenheit auch mit $\mathfrak{K}_5$ bezeichnete) Menge $\mathfrak{K}$ gestattet also gemäß (q) und (r) insgesamt drei elementare zy-Umbauten, durch welche $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{K}_9$ bzw. $\mathfrak{K}_7$ bzw. $\mathfrak{K}_8$ transformiert wird.

22. So wie in Nr. **21** die elementaren zy-Umbauten, so mögen nun noch die elementaren yz-Umbauten derselben Menge $\mathfrak{K}$ bestimmt werden.

Für Punkte (x_1, x_2), die zu $\mathfrak{Q}_2$ gehören, ist aus der zugehörigen Menge $\mathfrak{K}^q(x_1, x_2)$ (siehe Fig. 4) zu ersehen, daß sie nur denjenigen elementaren yz-Umbau gestattet, bei welchem $(\eta', \zeta') = (2, 2)$ in $(\eta'', \zeta'') = (1, 3)$ übergeht. Wegen $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}^p(2, 2) = \mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{K}^p(1, 3) = \mathfrak{o}$ erhalten wir einen elementaren yz-Umbau von $\mathfrak{K}$, wenn wir für alle (x_1, x_2) aus $\mathfrak{X} = \mathfrak{Q}_2$ den Punkt $(x_1, x_2, 2, 2)$ durch $(x_1, x_2, 1, 3)$ ersetzen. Die so entstehende Menge, die – so wie bei späteren Betrachtungen – mit $\mathfrak{K}_2$ bezeichnet werde, enthält im Teilraum $y = 1$ die durch Fig. 7, im Teilraum $y = 2$ die durch Fig. 21 dargestellten Punkte (x_1, x_2, z).

Was hingegen die Punkte (x_1, x_2) aus $\mathfrak{Q}_1 - \mathfrak{Q}_2$ betrifft, so gestattet die zugehörige Menge $\mathfrak{K}^q(x_1, x_2)$ (siehe Fig. 5) überhaupt keinen yz-Umbau, da alle ihre Punkte in $y = 1$ liegen.

Außer dem einen vorgenannten elementaren yz-Umbau von $\mathfrak{K}$, durch den $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{K}_2$ übergeht, gibt es also keinen weiteren[44].

---

[43] Hier wird an unserem Beispiel die Bedeutung der Forderung 5) für den Begriff des elementaren Umbaues ersichtlich.

[44] In Fig. 22, die sich außer auf die in Nr. **21** und **22** betrachteten Gitterpunktmengen noch auf eine umfassendere Gesamtheit solcher Mengen be-

§ 7. Der Hauptsatz über den Umbau komprimierter Gitterpunktmengen.

23. Der Hauptsatz über den Umbau komprimierter Gitterpunktmengen, dem wir jetzt zusteuern, betrifft die folgende Frage[45]:

Gegeben sei eine im $(x_1 \ldots x_p y z)$-Raum gelegene $n = (p + 2)$-dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^n$; man führt nun eine oder mehrere zy- oder yz-Umbauten an $\mathfrak{K}$ bzw. an den hiedurch aus $\mathfrak{K}$ gewonnenen Gitterpunktmengen aus; wodurch ist die Gesamtheit von Gitterpunktmengen charakterisiert, zu denen man so, von einer speziellen ausgehend, gelangen kann?

24. Um die Beantwortung dieser Frage zu erhalten, wollen wir zunächst zu jeder $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^n$ eine durch sie eindeutig festgelegte $(n - 1)$-dimensionale Gitterpunktmenge

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{K}_m^n) = \mathfrak{C}_m^{n-1}$$

gleichen Grades bestimmen und nachher zeigen, daß diese Menge sich nicht ändert, wenn $\mathfrak{K}$ ersetzt wird durch eine Menge, die aus $\mathfrak{K}$ durch einen zy-Umbau oder yz-Umbau hervorgeht. Hiezu betrachten wir für jedes Wertsystem $(x) = (x_1, \ldots, x_p)$ von ganzen positiven Zahlen gemäß Nr. **7** die zugehörige[46] 2-dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}^2(x)$ und bezeichnen

---

zieht, sind die drei gemäß (q) und (r) möglichen elementaren zy-Umbauten der Menge $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_5$ durch drei von $\mathfrak{K}_5$ ausgehende und zu $\mathfrak{K}_7$, $\mathfrak{K}_8$ und $\mathfrak{K}_9$ führende Pfeile angedeutet, während der von $\mathfrak{K}_5$ zu $\mathfrak{K}_2$ führende elementare yz-Umbau durch einen der Flugrichtung entgegen zu durchlaufenden Pfeil veranschaulicht wird.

[45] Diese im Folgenden allgemein erledigte Frage ist für $n = 2$ bzw. $n = 3$ in Note II, l. c. [2] durch die Sätze 11, 12 bzw. 15, 16 (Nr. **23**, **24**, **31**) und die Erläuterungen im (dortigen) § 8 beantwortet.

[46] Im Falle $n = 2$, $p = 0$ tritt an die Stelle des $(x_1 \ldots x_p)$-Raumes gewissermaßen der eine einzige Punkt des 0-dimensionalen Raumes; anstelle von $\mathfrak{K}^2(x)$ tritt dann die ganze Menge $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_m^2$; es wird $m(x) = m$ und die im Folgenden definierte Menge $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_m^{n-1}$ wird einfach die Menge aller m Gitterpunkte $1 \leqq t \leqq m$ auf einer t-Geraden. Für die 2-dimensionalen Mengen $\mathfrak{K}_m^2$ ist also die zugehörige Menge $\mathfrak{C}_m^1 = \mathfrak{C}(\mathfrak{K}_m^2)$ die gleiche für alle $\mathfrak{K}_m^2$ gleichen Grades m.

mit $m(x) = m(x_1, \ldots, x_p)$ die Anzahl der Gitterpunkte von $\mathfrak{K}^2(x)$. Offenbar gilt $m(x) > 0$ nur für endlich viele (x); es ist die über alle (x) erstreckte Summe

$$\Sigma m(x) = m \tag{17}$$

und es gilt

$$m(x) \geqq m(x^0) \text{ für } x_1 \leqq x_1^0, \ldots, x_p \leqq x_p^0, \tag{18}$$

wie unmittelbar aus (d), Nr. **7**, folgt. Definiert man nun in einem $(x_1 \ldots x_p t)$-Raum eine Menge $\mathfrak{C}$ dadurch, daß man in $\mathfrak{C}$ für jedes Wertsystem (x) alle Gitterpunkte

$$(x_1, \ldots, x_p, t) \text{ mit } 1 \leqq t \leqq m(x)$$

aufnimmt, so ist die $(n-1)$-dimensionale Gitterpunktmenge $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\mathfrak{K}_m^n)$ wegen (18) und (17) ersichtlich komprimiert und vom Grad m. Überdies ist klar, daß sich $\mathfrak{C}$ bei einem *zy*- oder *yz*-Umbau nicht ändert[47].

25. Wenn wir nun für eine bestimmte $(n-1)$-dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{C}_m^{n-1} = \mathfrak{C}_*$ des $(x_1 \ldots x_p t)$-Raumes mit $\Gamma(\mathfrak{C}_*)$ die Gesamtheit aller $\mathfrak{K}_m^n$ bezeichnen, für welche $\mathfrak{C}(\mathfrak{K}_m^n) = \mathfrak{C}_*$ ist, so befindet sich unter diesen $\mathfrak{K}_m^n$ genau eine, – sie werde mit $\widehat{\mathfrak{K}}$ bezeichnet, – deren sämtliche Punkte in $y = 1$ liegen und die alle Punkte[48]

$$(x_1, \ldots, x_p, 1, z) \text{ mit } 1 \leqq z \leqq m(x)$$

umfaßt; desgleichen genau eine – mit $\check{\mathfrak{K}}$ bezeichnete, – deren sämtliche Punkte in $z = 1$ liegen und die alle Punkte

$$(x_1, \ldots, x_p, y, 1) \text{ mit } 1 \leqq y \leqq m(x)$$

---

[47] Hier mag an die einer $\mathfrak{K}_m^n$ zugeordneten n Partitionen $\mathfrak{A}^{(\nu)}(\mathfrak{K}_m^n)$ erinnert werden (vgl. Note II, l. c. [2], Nr. 48, S. 115), von denen bei einem *zy*-Umbau die ersten $n-2=p$ Partitionen $\mathfrak{A}', \ldots, \mathfrak{A}^{(p)}$ natürlich ungeändert bleiben. Sind nun $\mathfrak{A}_*^{(\nu)}$ $(1 \leqq \nu \leqq n-1)$ die $n-1$ Partitionen von $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\mathfrak{K}_m^n)$, so ist offenbar $\mathfrak{A}_*^{(\nu)} = \mathfrak{A}^{(\nu)}$ für $1 \leqq \nu \leqq p$.

[48] Aus der gegebenen Menge $\mathfrak{C}_*$ gewinnt man für jedes Wertsystem $(x) = (\xi)$ die Zahl $m(\xi)$ als Anzahl jener Gitterpunkte $(x_1 \ldots x_p t)$ von $\mathfrak{C}_*$, für welche $x_1 = \xi_1, \ldots, x_p = \xi_p$ ist.

umfaßt. Dabei sind $\hat{\mathfrak{K}} = \hat{\mathfrak{K}}(\mathfrak{C}_*)$ und $\check{\mathfrak{K}} = \check{\mathfrak{K}}(\mathfrak{C}_*)$ notwendig verschieden, es sei denn, daß für kein (x) die Zahl $m(x) > 1$ ausfällt, was soviel heißt, als daß $\mathfrak{C}_*$ ganz in $t = 1$ liegt.

In dem letzterwähnten besonderen Falle gibt es nun nur eine einzige Menge $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^n_m$, für welche $\mathfrak{C}(\mathfrak{K}^n_m) = \mathfrak{C}_*$ ist. Denn für eine solche Menge $\mathfrak{K}$ kann für jedes Wertsystem (x), zu dem überhaupt ein Punkt $(x_1, \ldots, x_p, y, z)$ von $\mathfrak{K}$ gehört, wegen $m(x) = 1$ nur ein einziger Punkt gehören; die gemäß Nr. **7** gebildete Menge $\mathfrak{K}^2(x)$ kann also nur einen Punkt enthalten, der wegen der Komprimiertheit von $\mathfrak{K}^2(x)$ nur der Punkt $y = 1$, $z = 1$ sein kann. $\mathfrak{K}^n_m$ besteht also aus allen Punkten $(x_1, \ldots, x_p, 1, 1)$, für welche (x) zu $\mathfrak{C}_*$ gehört. Es ist also $\mathfrak{K}^n_m$ in diesem besonderen Falle eindeutig durch $\mathfrak{C}_*$ bestimmt und fällt mit $\hat{\mathfrak{K}}$ sowie mit $\check{\mathfrak{K}}$ zusammen.

26. Sehen wir von diesem besonderen Falle ab, so gilt, wie wir mittels des Existenz-Satzes 1 (Nr. **16**) sogleich sehen werden, der folgende Hauptsatz über den Umbau:

Satz 2. Sei $\mathfrak{C}_*$ eine nicht ganz in $t = 1$ gelegene komprimierte $(n - 1)$-dimensionale Gitterpunktmenge des $(x_1 \ldots x_p t)$-Raumes vom Grad m und sei $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^n_m$ eine zur Gesamtheit $\Gamma(\mathfrak{C}_*)$ gehörende n-dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge des $(x_1 \ldots x_p y z)$-Raumes, die von der in Nr. **25** erklärten Menge $\check{\mathfrak{K}} = \check{\mathfrak{K}}(\mathfrak{C}_*)$ verschieden ist. Dann kann man von $\mathfrak{K}$ zu $\check{\mathfrak{K}}$ durch einen zy-Umbau gelangen, d. h. durch eine ein- oder mehrgliedrige Kette elementarer zy-Umbauten.

Ist aber $\mathfrak{K}$ verschieden von $\hat{\mathfrak{K}} = \hat{\mathfrak{K}}(\mathfrak{C}_*)$, so kann man von $\mathfrak{K}$ zu $\hat{\mathfrak{K}}$ durch einen yz-Umbau gelangen.

Dabei braucht der letzte Teil von Satz 2 nicht besonders bewiesen zu werden, da er aus dem vorangehenden Teil durch bloße Vertauschung der Koordinaten y, z hervorgeht. Der erste Teil des Satzes 2 ist aber eine unmittelbare Folge des Satzes 1; denn $\mathfrak{K}$ liegt, weil von $\check{\mathfrak{K}}$ verschieden, nicht ganz in $z = 1$, gestattet also einen elementaren zy-Umbau; wobei man, – mit der aus $\mathfrak{K}$ hiedurch entstandenen Menge $\mathfrak{K}'$, falls $\mathfrak{K}' \neq \check{\mathfrak{K}}$, analog weiterschließend – wegen der endlichen Anzahl aller Mengen

$\mathfrak{K}_m^n$ und somit aller Mengen aus $\Gamma(\mathfrak{C}_*)$ notwendig nach endlich vielen Schritten zu $\underset{\vee}{\mathfrak{K}}$ gelangen muß[49].

27. Als Antwort auf die in Nr. **23** gestellte Frage ergibt sich also gemäß Satz 2, daß innerhalb jeder Gesamtheit $\Gamma(\mathfrak{C}_*)$ von $\widehat{\mathfrak{K}}$ aus durch einen zy-Umbau jede Menge $\mathfrak{K}$, die von $\widehat{\mathfrak{K}}$ verschieden ist, gewonnen werden kann und daß man, wenn $\mathfrak{K} \neq \underset{\vee}{\mathfrak{K}}$ ist, von $\mathfrak{K}$ aus durch einen zy-Umbau zu $\underset{\vee}{\mathfrak{K}}$ gelangen kann. Demnach erhält man, wie dies für $n = 2$ und $n = 3$ schon an den früher zitierten Stellen ausgeführt ist, für die Gesamtheit[50] $\Gamma(\mathfrak{C}_*)$ und ihre zy-Umbauten ein stammbaumartiges Bild mit $\widehat{\mathfrak{K}}$ an der Spitze und $\underset{\vee}{\mathfrak{K}}$ am Fußende.

So ergibt sich beispielsweise für die in Nr. **20** betrachtete durch Fig. 1 dargestellte 4-dimensionale Menge $\mathfrak{K}$ von 6 Gitterpunkten, daß die zugehörige Menge $\mathfrak{C}_*$ durch eben dieselbe Figur darstellbar ist, wenn man z durch t ersetzt und die eingezeichneten Punkte (●) demgemäß als Gitterpunkte eines $(x_1 x_2 t)$-Raumes auffaßt. $\mathfrak{K}$ liegt dabei ganz in $y = 1$, stellt somit selbst die Menge $\widehat{\mathfrak{K}}$ dar, während $\mathfrak{K}'$ (weil ganz in $z = 1$ gelegen) $= \underset{\vee}{\mathfrak{K}}$ ist. Die Gesamtheit $\Gamma(\mathfrak{C}_*)$ besteht hier also nur aus zwei Mengen, $\widehat{\mathfrak{K}} = \widehat{\mathfrak{K}}(\mathfrak{C}_*)$ und $\underset{\vee}{\mathfrak{K}} = \underset{\vee}{\mathfrak{K}}(\mathfrak{C}_*)$, die durch einen elementaren Umbau miteinander verbunden sind[51].

---

[49] Daß nämlich dabei niemals $\mathfrak{K}$ oder eine andere $\mathfrak{K}_m^n$ wiederkehren kann, folgt einfach daraus, daß bei einem zy-Umbau die über alle Punkte von $\mathfrak{K}$ erstreckte $\Sigma y = H_y$ zunimmt, $\Sigma z = H_z$ abnimmt (vgl. die diesbezüglichen Schlüsse für $n = 2$ und $n = 3$, l. c. [2], Nr. **23** und **36**).

[50] Diese Gesamtheit $\Gamma(\mathfrak{C}_*)$ – man könnte sie eine „yz-Familie" nennen – umfaßt bei gegebenem m für $n = 2$ alle Mengen $\mathfrak{K}_m^2$ vom Grad m, da $\mathfrak{C}(\mathfrak{K}_m^2)$ für alle diese $\mathfrak{K}_m^2$ übereinstimmt (vgl. Anm. 46); für $n = 3$ ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_m^2$ als 2-dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge durch eine der beiden zu $\mathfrak{C}$ gehörigen Partitionen $\mathfrak{A}'_*$, $\mathfrak{A}''_*$ festgelegt; man kann also wegen $\mathfrak{A}'_* = \mathfrak{A}'$ (vgl. Anm. 47) zur Kennzeichnung von $\Gamma(\mathfrak{C}_*)$ auch die Partition $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'(\mathfrak{K}_m^n)$ verwenden, wie dies l. c. [45] geschehen ist.

Für $n \geqq 4$ ist eine solche Kennzeichnung, allgemein gesprochen, nicht möglich, da dann $\mathfrak{C}_*$ eine $(n - 1) \geqq 3$-dimensionale Gitterpunktmenge ist und daher (vgl. l. c. [2], Nr. **6**, S. 73, sowie Anm. 71, 72, S. 104) weder durch $n - 2$ noch auch durch alle $n - 1$ zugehörigen Partitionen allemal eindeutig festgelegt werden kann.

[51] Das Gleiche gilt in dem allgemeineren Beispiel der Nr. **19**.

28. Etwas reichhaltigere Verhältnisse finden wir bei dem in Nr. **21** und **22** betrachteten Beispiel. Die zur dortigen Menge $\mathfrak{K}$ gehörige 3-dimensionale Menge $\mathfrak{C}_*$ des $(x_1 x_2 t)$-Raumes ist durch Fig. 6 wiedergegeben, wenn man darin z durch t ersetzt. Die gleiche Figur stellt natürlich die zur Gesamtheit $\Gamma(\mathfrak{C}_*)$ gehörige Menge $\hat{\mathfrak{K}} = \hat{\mathfrak{K}}(\mathfrak{C}_*)$ dar, wenn man die Figur als das Bild der – durchwegs im Teilraum $y = 1$ liegenden – Punkte $(x_1 x_2 z)$ von $\hat{\mathfrak{K}}$ ansieht. Die Gesamtheit $\Gamma(\mathfrak{C}_*)$ umfaßt in diesem Falle 14 Gitterpunktmengen, die der Einfachheit halber mit $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_{14}$ bezeichnet werden mögen. Zur Menge $\hat{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}_1$ gelangt man, wenn man von der in Nr. **22** durch einen elementaren yz-Umbau aus $\mathfrak{K}$ gewonnenen Menge $\mathfrak{K}_2$ ausgeht und an $\mathfrak{K}_2$ neuerdings einen elementaren yz-Umbau (es gibt nur einen einzigen) ausführt. Nunmehr kann man von $\mathfrak{K}_1 = \hat{\mathfrak{K}}$ ausgehend schrittweise alle jeweils möglichen zy-Umbauten vornehmen (wie dies in Nr. **21** speziell mit $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_5$ ausführlich auseinandergesetzt wurde) und erhält so alle Gitterpunktmengen aus $\Gamma(\mathfrak{C}_*)$.

In Fig. 22 ist die Gesamtheit der Ordnungsbeziehungen, die sich so zwischen den Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{14}$ von $\Gamma(\mathfrak{C}_*)$ ergeben, dargestellt. Dabei mögen die einzelnen Mengen $\mathfrak{K}_\lambda$ durch die folgende Tabelle beschrieben werden, die wir sogleich erläutern wollen.

$\mathfrak{K}_\lambda$	Teilmengen in $y = 1, 2, \ldots$	$\mathfrak{K}_\lambda$	Teilmengen in $y = 1, 2, \ldots$
$\mathfrak{K}_1$	A	$\mathfrak{K}_{14}$	J, J, M, M
$\mathfrak{K}_2$	B, M	$\mathfrak{K}_{13}$	G, J, M
$\mathfrak{K}_3$	C_1, L_2	$\mathfrak{K}_{12}$	F_2, L_1, M
$\mathfrak{K}_4$	C_2, L_1	$\mathfrak{K}_{11}$	F_1, L_2, M
$\mathfrak{K}_5$	D, K	$\mathfrak{K}_{10}$	G, G
$\mathfrak{K}_6$	E, J	$\mathfrak{K}_9$	D, M, M
$\mathfrak{K}_7$	F_1, H_2	$\mathfrak{K}_8$	F_2, H_1

In den Figuren 6 bis 21 sind gewisse mit $A, B, C_1, \ldots, L_2, M$ bezeichnete Gitterpunktmengen des $(x_1 x_2 z)$-Raumes dargestellt. Wenn nun in obiger Tabelle beispielsweise bei $\mathfrak{K}_9$ in der Rubrik „Teilmengen" die Mengen D, M, M angegeben sind, so soll das

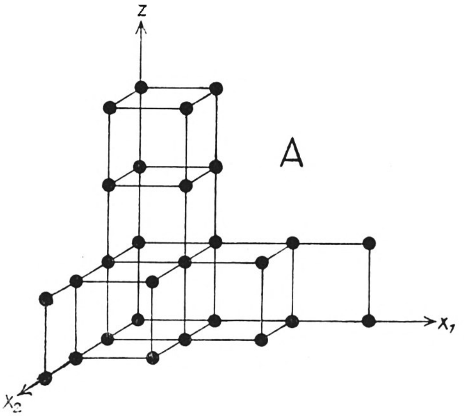

Fig. 6.

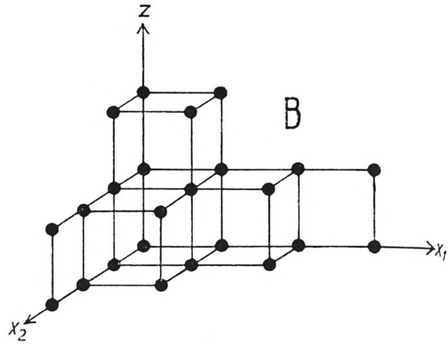

Fig. 7.

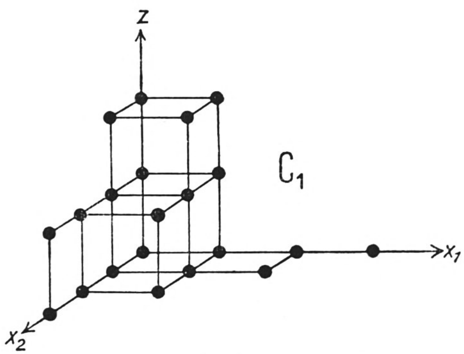

Fig. 8.

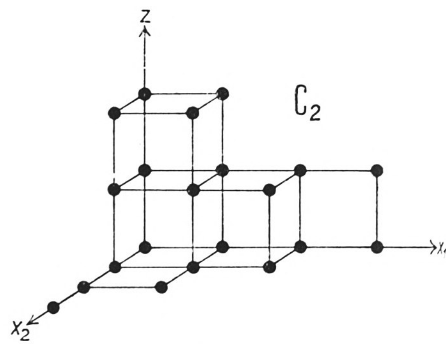

Fig. 9.

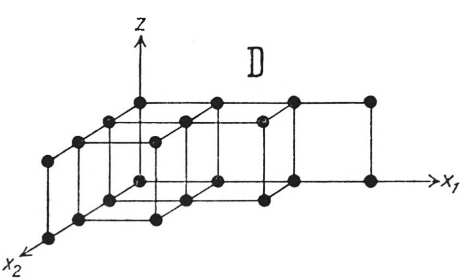

Fig. 10.

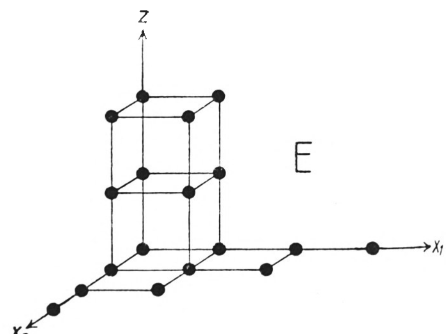

Fig. 11.

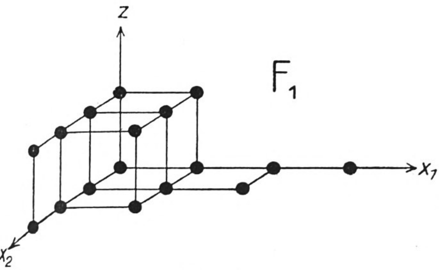

Fig. 12.

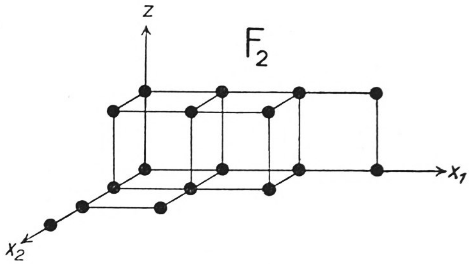

Fig. 13.

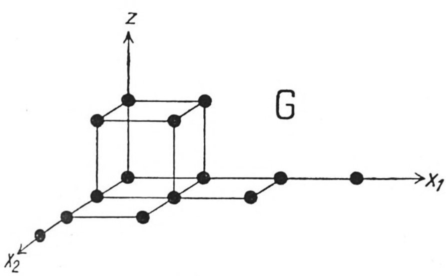

Fig. 14.

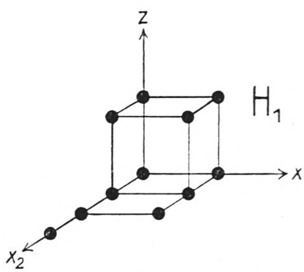

Fig. 15.

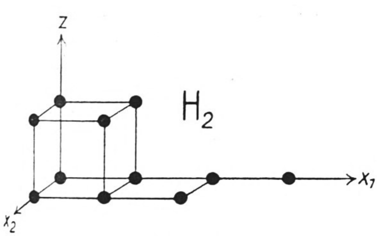

Fig. 16.

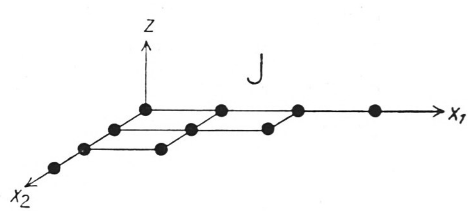

Fig. 17.

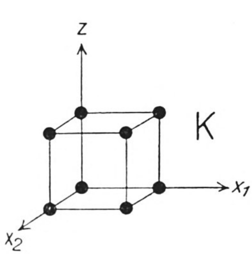

Fig. 18.

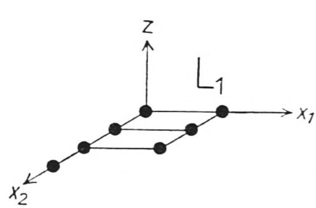

Fig. 19.

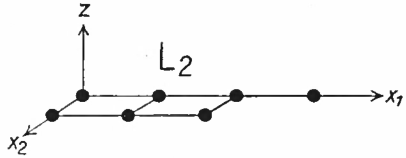

Fig. 20.

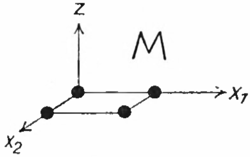

Fig. 21.

bedeuten, daß $\mathfrak{K}_9$ der Reihe nach im Teilraum $y = 1$ die (durch Fig. 10 dargestellte) Menge D von Punkten (x_1, x_2, z) enthält, ferner im Teilraum $y = 2$ die (in Fig. 21 dargestellte) Menge M, schließlich im Teilraum $y = 3$ wieder die Menge M. Analog ist die Kennzeichnung der Menge $\mathfrak{K}_5$ durch die Teilmengen D, K (vgl. Fig. 10 und 18) nichts anderes als die in Fig. 3a und 3b gegebene Darstellung dieser in Nr. **21** einfach mit $\mathfrak{K}$ bezeichneten Menge.

Auf diese Weise ist durch unsere Tabelle und die erwähnten Figuren tatsächlich jede unserer vierdimensionalen Gitterpunktmengen beschrieben. Die Menge $\mathfrak{K}$, von der wir in Nr. **21** ausgegangen sind, findet sich hier, wie gesagt, unter der Bezeichnung $\mathfrak{K}_5$. Die mit $\mathfrak{K}_{14}$ bezeichnete ganz in $z = 1$ liegende Menge ist gleich der zu unserer Gesamtheit $\Gamma(\mathfrak{E}_*)$ gehörigen Menge $\underset{\vee}{\mathfrak{K}}$ und findet sich dementsprechend in Fig. 22 am Fußende. In dieser Figur sind bei jedem $\mathfrak{K}_\lambda$ (innerhalb eines die Bezeichnung $\mathfrak{K}_\lambda$ umschließenden rechteckigen Rahmens) noch die beiden auf die y- und auf die z-Koordinate bezüglichen zu $\mathfrak{K}_\lambda$ gehörigen Partitionen angegeben[52], beispielsweise bei $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_5$ die Partitionen (20, 8) und (14, 14).

29. Fig. 22 gibt das stammbaumartige Bild für die betrachtete Gesamtheit vierdimensionaler komprimierter Gitterpunktmengen, wie bei früheren Gelegenheiten solche Bilder für 2- oder 3-dimensionale Gitterpunktmengen gegeben wurden[53]. Natürlich tritt alle-

---

[52] Zu jeder 4-dimensionalen Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}^4_m$ gehören (vgl. Note II, l. c. [2], Nr. **4** und **48**) vier Partitionen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$, $\mathfrak{A}''''$ der Gradzahl m. Innerhalb der Gesamtheit $\Gamma(\mathfrak{E}_*)$ sind aber $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ für alle Gitterpunktmengen dieselben (u. zw. in unserem Falle $\mathfrak{A}' = (12, 10, 4, 2)$, $\mathfrak{A}'' = (12, 10, 4, 2)$), sodaß wir sie nicht bei jeder $\mathfrak{K}_\lambda$ besonders anführen.

[53] Für $n = 2$ und die Gesamtheit aller Mengen $\mathfrak{K}^2_m$ vom Grad $m = 6$ ist dieses Gesamtbild in Monatshefte **49** (1940), § 7, S. 20, gegeben, wobei nur die dort gezeichneten „Quadratfiguren“ (vgl. l. c., Nr. **19**, S. 4) durch die

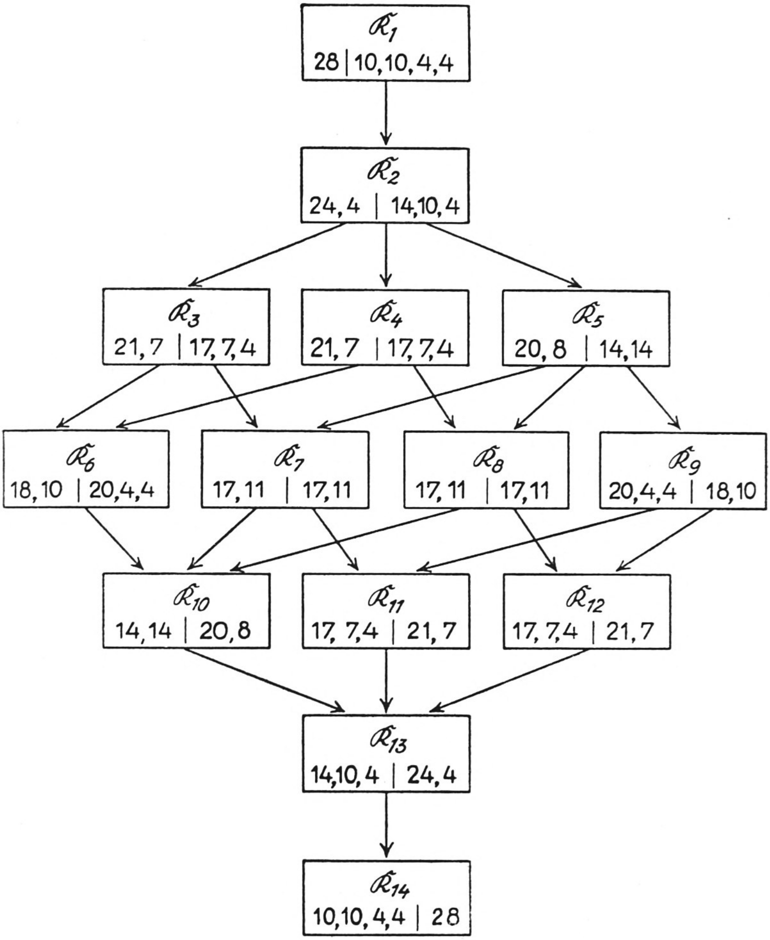

Fig. 22.

mal jene Symmetrie auf, die darauf beruht, daß aus jeder Gitterpunktmenge von $\Gamma(\mathfrak{C}_*)$ eine Gitterpunktmenge derselben Gesamtheit entsteht, wenn man die Rolle der Koordinaten y und z vertauscht. Man kann hier von „innerhalb der Gesamtheit $\Gamma(\mathfrak{C}_*)$

---

entsprechenden „Gitterpunktfiguren" zu ersetzen sind. Für $n = 3$ sei für eine gewisse – dort mit $\Gamma_1(7, 4, 2)$ bezeichnete yz-Familie von Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}^3_m$ vom Grad $m = 13$ auf Tafel II in Note II, l. c. [2], verwiesen, die allerdings nur einen Ausschnitt aus dem Gesamtbild wiedergibt (vgl. die Erläuterungen l. c. [2], Nr. **34**); andere Beispiele – mit $m = 2, 3$ und 4 – siehe ebenda in Tafel I.

konjugierten" Gitterpunktmengen sprechen; und wenn $\mathfrak{K}'$ aus $\mathfrak{K}$ durch einen elementaren zy-Umbau entsteht und $\overline{\mathfrak{K}}$ bzw. $\overline{\mathfrak{K}}'$ die zu $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{K}'$ konjugierte Menge ist, dann entsteht $\overline{\mathfrak{K}}'$ aus $\overline{\mathfrak{K}}$ durch einen elementaren yz-Umbau. Die zugehörigen auf y und z bezüglichen Partitionen sind natürlich bei $\mathfrak{K}$ und $\overline{\mathfrak{K}}$ vertauscht. Im besonderen sind $\hat{\mathfrak{K}}$ und $\check{\mathfrak{K}}$ zwei solche innerhalb $\Gamma(\mathfrak{C}_*)$ konjugierte Gitterpunktmengen.

Schon in der Tabelle in Nr. **28** ist die Anordnung so vorgenommen, daß in die gleiche Zeile zwei zueinander konjugierte Gitterpunktmengen, z. B. $\mathfrak{K}_5$ und $\mathfrak{K}_{10}$ gesetzt wurden[54]. Das hat zur Folge, daß z. B. die Figuren 3a und 3b, die die Menge $\mathfrak{K}_5$ darstellen, zugleich als Bild der (in derselben Zeile aufgeführten) Menge $\mathfrak{K}_{10}$ aufgefaßt werden können, wenn man in jeder der Figuren y statt z schreibt und durch die so dargestellten Mengen des $(x_1 x_2 y)$-Raumes der Reihe nach die im Teilraum $z = 1$ und die im Teilraum $z = 2$ liegenden Gitterpunkte von $\mathfrak{K}_{10}$ veranschaulicht[54a].

30. Natürlich kann man bei den n-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}_m^n$ im Raum der Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqq 2)$ irgend zwei der Koordinaten, etwa x_μ und x_ν, heraus-

[54] Natürlich kann es vorkommen (was bei unserem Beispiel nicht der Fall ist), daß eine Menge zu sich selbst konjugiert ist; und es können, wie schon von $n = 2$ her bekannt ist, auch mehrere selbstkonjugierte Gitterpunktmengen in derselben Gesamtheit $\Gamma(\mathfrak{C}_*)$ auftreten. Vgl. Monatshefte, l. c. [53] und ebenda Nr. **38**, Anm. 66, sowie Nr. **49**.

[54a] Die Teilmengen in $y = 1, y = 2, \ldots.$, die in der obigen Tabelle zur Kennzeichnung der einzelnen Mengen $\mathfrak{K}_\lambda$ benützt wurden, sind nichts anderes als jene Mengen des 3-dimensionalen $(x_1 x_2 z)$-Raumes, die gemäß Nr. **7** mit $\mathfrak{K}_\lambda^3(y)$ zu bezeichnen wären. Natürlich hätten wir unsere Mengen $\mathfrak{K}_\lambda$ auch kennzeichnen können, indem wir für die verschiedenen Wertepaare (y, z) die in der $x_1 x_2$-Ebene gelegenen Mengen $\mathfrak{K}_\lambda^2(y, z)$ angeben. Wenn man dabei die Figuren 17, 19, 20, 21 als Bilder von 2-dimensionalen Gitterpunktmengen J^*, L_1^*, L_2^*, M^* auffaßt, so ist beispielsweise die Menge $\mathfrak{K}_4$ gekennzeichnet durch $\mathfrak{K}_4^2(1, 1) = J^*$, $\mathfrak{K}_4^2(1, 2) = L_2^*$, $\mathfrak{K}_4^2(1, 3) = M^*$, $\mathfrak{K}_4^2(2, 1) = L_1^*$, hingegen die zu $\mathfrak{K}_4$ innerhalb der betrachteten Gesamtheit konjugierte Menge $\mathfrak{K}_{11}$ durch $\mathfrak{K}_{11}^2(1, 1) = J^*$, $\mathfrak{K}_{11}^2(1, 2) = L_1^*$, $\mathfrak{K}_{11}^2(2, 1) = L_2^*$, $\mathfrak{K}_{11}^2(3, 1) = M^*$. Bei dieser Kennzeichnung der Mengen tritt also unmittelbar in Erscheinung, wie die eine Menge aus ihrer konjugierten durch Vertauschung von y mit z hervorgeht.

greifen und nun ihnen für $x_\nu x_\mu$-Umbauten bzw. $x_\mu x_\nu$-Umbauten die gleiche Rolle zuweisen, wie in den vorangehenden Entwicklungen den Koordinaten $x_{n-1} = y$, $x_n = z$. Bei solchen Umbauten verbleibt man dann innerhalb einer Gesamtheit $\Gamma(\mathfrak{C}_*) = \Gamma_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}(\mathfrak{C}_*)$ von Mengen $\mathfrak{K}^n_m$, die man (vgl. Anm. 50) eine „$x_\mu x_\nu$-Familie" nennen könnte und die folgendermaßen erklärt ist: Es bedeuten $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ jene $p = n - 2$ Indizes der Reihe $1, 2, \ldots, n$, die von μ und ν verschieden sind; für irgend eine Menge $\mathfrak{K}^n_m$ ist dann $\mathfrak{C}(\mathfrak{K}^n_m)$ jene komprimierte Gitterpunktmenge eines $(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_p} t)$-Raumes, die aus allen Punkten $(x_{\lambda_1}, \ldots, x_{\lambda_p}, t)$ mit $1 \leqq t \leqq m(x)$ besteht, – hiebei unter $m(x^0)$ die Anzahl aller Gitterpunkte von $\mathfrak{K}^n_m$ verstanden, für welche $x_{\lambda_1} = x^0_{\lambda_1}, \ldots, x_{\lambda_p} = x^0_{\lambda_p}$ ist; und es ist $\Gamma(\mathfrak{C}_*)$ die Gesamtheit aller jener $\mathfrak{K}^n_m$, für welche $\mathfrak{C}(\mathfrak{K}^n_m)$ gleich derselben vorgegebenen komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{C}_*$ des $(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_p} t)$-Raumes ist.

Demgemäß erhält man für die Gesamtheit aller Umbauten innerhalb aller $\mathfrak{K}^n_m$ gleicher Dimension und gleichen Grades das Bild von $\frac{1}{2} n(n-1)$ Systemen von Stammbäumen, entsprechend den Fällen $n = 2$ und $n = 3$, wo es für jedes m einen einzigen alle $\mathfrak{K}^2_m$ umfassenden Stammbaum bzw. drei Systeme von Stammbäumen gibt[55].

[55] Vgl. hiezu Note II, l. c. [2], § 5 und § 8. Für $n = 3$ Dimensionen ist in jener Note II in Tafel I für die Mengen $\mathfrak{K}^3_m$ mit $m = 2$, 3 und 4 Gitterpunkten die zugehörige Gesamtfigur gegeben, außerdem in Tafel III ein kleiner Ausschnitt aus der (2481 Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}^3_{13}$ umfassenden) Gesamtfigur für $m = 13$. Solche Gesamtfiguren werden für $n = 4$ Dimensionen, wo $\frac{1}{2} n(n-1) = 6$ Systeme von Stammbäumen ineinander laufen, – außerdem wegen der mit m stark wachsenden Anzahl $P^4(m)$ der Mengen – verwickelt und umfangreich. Bereits für $m = 4$ (wo es in $n = 3$ Dimensionen 13 Mengen $\mathfrak{K}^3_4$ gibt) hat man in $n = 4$ Dimensionen 26 Mengen $\mathfrak{K}^4_4$; für $n = 4$ und $m = 6$ haben wir in Nr. **27** einen einzelnen yz-Stammbaum von nur 2 Mengen $\mathfrak{K}^4_6$ besprochen; die zugehörige alle 6 Systeme von Stammbäumen gebende Figur würde alle $P^4(6) = 140$ Mengen $\mathfrak{K}^4_6$ zu umfassen haben. – Wegen Berechnung der Anzahlen $P^n(m)$ vgl. übrigens Note II, l. c. [2], § 10 und eine Arbeit „Über die Anzahl komprimierter Gitterpunktmengen von gegebener Punktezahl", die demnächst an anderer Stelle erscheinen soll [in der Math. Zeitschrift (Zusatz bei der Korrektur)].